varietà paracompatte.

3. OMOMORFISMI DI $\mathcal{L}_s^r$ IN $\mathcal{L}_k^h$, SIMMETRIZZAZIONE E ALTERNAZIONE DI $\mathcal{L}_s^r$.

Sia $\Psi : \mathcal{T}_k^h \to \mathcal{T}_s^r$ un'applicazione $\mathfrak{F}$-lineare e per ogni $D \in \mathcal{L}_s^r$ sia $\bar{D} : \mathcal{T}_k^h \to \mathfrak{D}$ l'operatore definito da:

$$\bar{D}_K = D_{\Psi(K)} \qquad \forall K \in \mathcal{T}_k^h .$$

E' immediato verificare che $\bar{D} \in \mathcal{L}_k^h$ e che l'applicazione $\tilde{\Psi} : D \to \bar{D}$ dell'$\mathfrak{F}$-modulo $\mathcal{L}_s^r$ nell'$\mathfrak{F}$-modulo $\mathcal{L}_k^h$ è un omomorfismo; inoltre se Ψ è un isomorfismo, anche $\tilde{\Psi}$ è un isomorfismo. Si osservi che affinché Ψ sia un isomorfismo è necessario che sia $h + k = r + s$ ed è noto che se esiste un isomorfismo di $\mathcal{T}_1^o$ in $\mathcal{T}_o^1$, allora per ogni quaterna (h,k,r,s) di interi non negativi tali che $h + k = r + s > 0$ esiste un isomorfismo di $\mathcal{T}_k^h$ su $\mathcal{T}_s^r$.

Segue allora che:

<u>Proposizione</u> 3.1.- *Se gli $\mathfrak{F}$-moduli $\mathcal{T}_o^1$ e $\mathcal{T}_1^o$ sono isomorfi, allora per ogni quaterna (h,k,r,s) di interi non negativi tali che $h+k=r+s>0$, gli $\mathfrak{F}$-moduli $\mathcal{L}_k^h$ e $\mathcal{L}_s^r$ sono isomorfi.*

In particolare si ha:

<u>Proposizione</u> 3.2.- *Se la varietà M è paracompatta, allora per ogni quaterna (h,k,r,s) di interi non negativi tali che $h+k= r+s>0$, gli $\mathfrak{F}$-moduli $\mathcal{L}_k^h$ e $\mathcal{L}_s^r$ sono isomorfi.*

Indicato con $\mathcal{G}_n$ ($n \geq 1$) il gruppo delle permutazioni di $\{1,\dots,n\}$, è noto che per ogni $(\rho,\sigma) \in \mathcal{G}_r \times \mathcal{G}_s$ esiste un unico automorfismo ψ^σ_ρ di $\mathcal{T}^r_s$ tale che per ogni $X_1,\dots,X_r \in \mathcal{X}$ e per ogni $\omega^1,\dots,\omega^s \in \mathcal{T}^0_1$:

$$\psi^\sigma_\rho\,(X_1 \otimes\dots\otimes X_r \otimes \omega^1 \otimes \dots\otimes \omega^s) = X_{\rho(1)} \otimes\dots\otimes X_{\rho(r)} \otimes \omega^{\sigma(1)} \otimes\dots\otimes \omega^{\sigma(s)} .$$

Posto $\tau = (\rho,\sigma) \in \mathcal{G}_r \times \mathcal{G}_s$ l'applicazione $\chi_\tau (= \tilde{\psi}^\sigma_\rho)$ che ad ogni $D \in \mathcal{J}^r_s$ associa $\chi_\tau(D) \in \mathcal{J}^r_s$ e definito da

$$\chi_\tau(D)_T = D_{\psi^\sigma_\rho(T)}$$

è, per quanto osservato all'inizio di questo paragrafo, un automorfismo di $\mathcal{J}^r_s$

Posto $\chi_\tau(D) = {}^\tau D$ si dà la seguente

<u>Definizione</u> 3.3.- Se Γ è una pseudoconnessione lineare di specie (r,s) definita da $D \in \mathcal{J}^r_s$, allora per ogni $\tau = (\rho,\sigma) \in \mathcal{G}_r \times \mathcal{G}_s$, la pseudoconnessione lineare di specie (r,s) definita da ${}^\tau D$ si chiama *associata a tramite* τ e si indica con ${}^\tau\Gamma$.

E' di verifica immediata la seguente

<u>Proposizione</u> 3.4.- *Se* $A^{j_1\dots j_s h}_{i_1\dots i_r}$ *e* $\Gamma^{j_1\dots j_s h}_{i_1\dots i_r k}$ *sono le componenti di una pseudoconnessione lineare* Γ *di specie* (r,s) *rispetto ad una carta locale* (U,ϕ), *per ogni* $\tau = (\rho,\sigma) \in \mathcal{G}_r \times \mathcal{G}_s$ *le componenti*

${}^\tau A^{j_1\dots j_s h}_{i_1\dots i_r}$ *e* ${}^\tau\Gamma^{j_1\dots j_s h}_{i_1\dots i_r k}$ *della pseudoconnessione* ${}^\tau\Gamma$ *associata a* Γ *tramite* τ *sono date da:*

$$\tau A^{j_1\ldots j_s h}_{i_1\ldots i_r} = A^{j_{\sigma(1)}\ldots j_{\sigma(s)} h}_{i_{\rho(1)}\ldots i_{\rho(r)}}$$

$$\tau \Gamma^{j_1\ldots j_s h}_{i_1\ldots i_r k} = \Gamma^{j_{\sigma(1)}\ldots j_{\sigma(s)} h}_{i_{\rho(1)}\ldots i_{\rho(r)} k}$$

<u>Definizione</u> 3.5.- L'endomorfismo χ di $\mathcal{J}^r_s$ definito da

$$\chi = \frac{1}{r!s!} \sum_{\tau \in \mathcal{G}_r \times \mathcal{G}_s} \chi_\tau$$

si chiama *simmetrizzazione* di $\mathcal{J}^r_s$. Per ogni $D \in \mathcal{J}^r_s$, la pseudoconnessione lineare di specie (r,s) definita da $\chi(D)$ si chiama *simmetrizzata* della pseudoconnessione definita da D.

Dalla definizione precedente segue che se Γ è una pseudoconnessione determinata da $D \in \mathcal{J}^r_s$, allora la pseudoconnessione simmetrizzata di Γ è determinata da

$$\bar{D} = \frac{1}{r!s!} \sum_{\tau \in \mathcal{G}_r \times \mathcal{G}_s} \tau D .$$

Per questo motivo e tenuto presente 3.4., se $A^{j_1\ldots j_s h}_{i_1\ldots i_r}$ e $\Gamma^{j_1\ldots j_s h}_{i_1\ldots i_r k}$ sono le componenti di Γ rispetto ad una carta ammissibile (U,ϕ), le componenti $\bar{A}^{j_1\ldots j_s h}_{i_1\ldots i_r}$ e $\bar{\Gamma}^{j_1\ldots j_s h}_{i_1\ldots i_r k}$ della pseudoconnessione simmetrizzata di Γ sono date da:

$$\bar{A}^{j_1\ldots j_s h}_{i_1\ldots i_r} = \frac{1}{r!s!} \sum_{(\rho,\sigma) \in \mathcal{G}_r \times \mathcal{G}_s} A^{j_{\sigma(1)}\ldots j_{\sigma(s)} h}_{i_{\rho(1)}\ldots i_{\rho(r)}}$$

$$\bar{\Gamma}^{j_1 \ldots j_s h}_{i_1 \ldots i_r} = \frac{1}{r!s!} \sum_{(\rho,\sigma)\in \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s} \Gamma^{j_{\sigma(1)} \ldots j_{\sigma(s)} h}_{i_{\rho(1)} \ldots i_{\rho(r)} k}$$

Definizione 3.6.- Una pseudoconnessione lineare di specie (r,s) si dice a *derivata covariante simmetrica* se coincide con la sua simmetrizzata.

Segue immediatamente che:

Proposizione 3.7.- *Una pseudoconnessione lineare* Γ *di specie* (r,s) è *a derivata covariante simmetrica se e solo se per ogni* $\tau \in \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s$ Γ *coincide con* ${}^{\tau}\Gamma$.

Inoltre è facile verificare che:

Proposizione 3.8.- *Se* χ *è la simmetrizzazione di* $\mathcal{J}^r_s$ *risulta*

$$\chi \circ \chi = \chi .$$

Indicato con $\bar{\mathcal{J}}^r_s$ il sottoinsieme di $\mathcal{J}^r_s$ formato dagli elementi che definiscono le pseudoconnessioni a derivata covariante simmetrica, risulta $\chi(\mathcal{J}^r_s) = \bar{\mathcal{J}}^r_s$ e quindi:

Proposizione 3.9.- $\bar{\mathcal{J}}^r_s$ *è un sottomodulo di* $\mathcal{J}^r_s$.

Posto per ogni $\tau = (\rho,\sigma) \in {}_r \times {}_s$

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\rho)\cdot\varepsilon(\sigma)$$

dove per ogni $\rho \in \mathfrak{S}_r$ $(\sigma \in \mathfrak{S}_s)$ si è posto $\varepsilon(\rho) = \pm 1$ $(\varepsilon(\sigma) = \pm 1)$ a seconda che la permutazione ρ (σ) sia di classe pari o dispari, usando le notazioni precedenti si dà la seguente

Definizione 3.10.- L'endomorfismo Θ di $\mathcal{J}^r_s$ definito da

$$\Theta = \frac{1}{r!s!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s} \varepsilon(\tau)\chi_\tau$$

si chiama *alternazione* di $\mathcal{L}^r_s$. Per ogni $D \in \mathcal{L}^r_s$ la pseudoconnessione lineare definita da $\Theta(D)$ si chiama *pseudoconnessione alternata* della pseudoconnessione definita da D.

E' immediato allora che la pseudoconnessione alternata di Γ determinata da $D \in \mathcal{L}^r_s$, è determinata da:

$$\tilde{D} = \frac{1}{r!s!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s} \varepsilon(\tau)\,{}^{\tau}D$$

e che se $A^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r}$ e $\Gamma^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r k}$ sono le componenti di Γ rispetto ad una carta ammissibile (U,ϕ), le componenti $\tilde{A}^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r}$ e $\tilde{\Gamma}^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r k}$ della pseudoconnessione alternata di Γ sono:

$$\tilde{A}^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r} = \frac{1}{r!s!} \sum_{(\rho,\sigma) \in \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s} \varepsilon(\rho)\varepsilon(\sigma)\, A^{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(s)} h}_{i_{\rho(1)} \dots i_{\rho(r)}}$$

$$\tilde{\Gamma}^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r k} = \frac{1}{r!s!} \sum_{(\rho,\sigma) \in \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s} \varepsilon(\rho)\varepsilon(\sigma)\, \Gamma^{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(s)} h}_{i_{\rho(1)} \dots i_{\rho(r)} k} .$$

Definizione 3.11.- Una pseudoconnessione lineare di specie (r,s) si dice *a derivata covariante alternante* se coincide con la sua alternata.

Sono di semplice verifica le seguenti:

Proposizione 3.12. - *Una pseudoconnessione lineare* Γ *di specie* (r,s) *determinata da* D *é a derivata covariante alternante se e solo se per ogni* $\tau \in \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s$ $D = \varepsilon(\tau)\ {}^{\tau}D$.

Proposizione 3.13.- *Se* Θ *è alternazione di* $\mathcal{D}^r_s$ *risulta*

$$\Theta \circ \Theta = \Theta$$

Proposizione 3.14.- *Se* X *e* Θ *sono rispettivamente la simmetrizzazione e l'alternazione di* $\mathcal{D}^r_s$ *risulta:*

$$X \circ \Theta = \Theta \circ X = 0$$

Indicato con $\tilde{\mathcal{D}}^r_s$ il sottoinsieme di $\mathcal{D}^r_s$ formato dagli elementi che definiscono le pseudoconnessioni a derivata covariante alternante, risulta $\Theta(\mathcal{D}^r_s) = \tilde{\mathcal{D}}^r_s$ e quindi $\tilde{\mathcal{D}}^r_s$ è un sottomodulo di $\mathcal{D}^r_s$.

Accettato per la pubblicazione

su parere favorevole del Prof. C. Di Comite