nessione lineare.

2. ESISTENZA ED ESTENSIONE DI PSEUDOCONNESSIONI LINEARI DI SPECIE (r,s).

Si proverà la seguente:

Proposizione 2.1.- *Se* M *è una varietà paracompatta, per ogni* $A \in \mathcal{T}_r^{s+1}$ *esiste una pseudoconnessione lineare* Γ *di specie* (r,s) *su* M, *tale che, indicata con* D *la pseudodifferenziazione covariante rispetto a* Γ, *il campo tensoriale* $(T,f) \in \mathcal{T}_s^r \times \mathfrak{F} \to D_T f \in \mathfrak{F}$ *coincide con* A.

Dimostrazione. Essendo M paracompatta, esiste una famiglia di carte ammissibili $(U_i,\phi_i)_{i\in I}$ tale che

a) $(U_i)_{i\in I}$ è un ricoprimento di M localmente finito;

b) $\forall i \in I$ $\bar{U}_i$ è compatto;

c) esiste una partizione dell'unità $(f_i)_{i\in I}$ subordinata al ricoprimento $(U_i)_{i\in I}$

Per ogni $i \in I$ sia Γ_i una pseudoconnessione lineare di specie (r,s) su U_i tale che, indicata con D_i la pseudodifferenziazione covariante rispetto a Γ_i, il campo tensoriale $A_i \in \mathcal{T}_r^{s+1}(U_i)$ definito da

$$A_i(T',g') = D_{iT'}g' \qquad \forall g' \in \mathfrak{F}(U_i), \forall T' \in \mathcal{T}_s^r(U_i)$$

coincida con $A_{|U_i}$.

Per ogni $i \in I$ si indichi con D_i' l'elemento di $\mathcal{L}_s^r$ definito così

$$\forall T \in \mathcal{T}^r_s\ ,\ \forall K \in \mathcal{T}\ ,\ \forall p \in M\ :\quad (D'_{iT}K)_p = \begin{cases} 0 & \text{se } p \notin U_i \\ f_i(p)(D_{iT_{|U_i}} K_{|U_i})_p & \text{se } p \in U_i \end{cases}$$

Sia ora D l'elemento di $\mathcal{L}^r_s$ definito da

$$D_T K = \sum_{i \in I} D'_{iT} K \qquad \forall T \in \mathcal{T}^r_s,\ \forall K \in \mathcal{T}$$

Se p è un qualunque punto di M, si indicherà con J la parte (finita) di I tale che per ogni $i \in J$ sia $p \in U_i$ e per ogni $i \notin J$ sia $p \notin U_i$.

Allora per ogni $g \in \mathfrak{F}$ e per ogni $T \in \mathcal{T}^r_s$ risulta:

$$(D_T g)_p = \sum_{i \in J} (D'_{iT} g)_p = \sum_{i \in J} f_i(p)(D_{iT_{|U_i}} g_{|U_i})_p =$$

$$= \sum_{i \in J} f_i(p)\, (A_i(T_{|U_i}, g_{|U_i}))_p = (A(T,g))_p \sum_{i \in J} f_i(p) = (A(T,g))_p . \quad \blacksquare$$

Ricordando com'era stato definito l'omomorfismo $\Phi : \mathcal{L}^r_s \to \mathcal{T}^{s+1}_r$ (cfr [5] pag. 3), la precedente proposizione è equivalente alla seguente

<u>Proposizione</u> 2.2. - *Se* M *è una varietà paracompatta, l'omomorfismo* Φ $\mathcal{L}^r_s \to \mathcal{T}^{s+1}_r$ *è surgettivo.*

Si proverà ora la seguente:

<u>Proposizione</u> 2.3.- *Sia* V *una sottovarietà aperta di* M *e sia* $\overset{V}{\ }$ *una pseudoconnessione lineare di specie* (r,s) *su* V, *allora per ogni* $p \in V$ *esiste un intorno aperto* U *di* p *incluso in* V *ed esiste una pseudo*

connessione lineare Γ *di specie* (r,s) *su* M, *tali che le pseudoconnessioni indotte su* U *da* Γ *e da* Γ^V *coincidono.*

Dimostrazione. - Per ogni $p \in V$ è noto che esistono $f \in \mathfrak{F}$ e un intorno aperto U di p incluso in V, tali che

$$f_{|U} = 1 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{supp}(f) \subset V.$$

Indicata con D^V la pseudoconnessione covariante rispetto a Γ^V, sia D l'elemento di $\mathcal{D}^r_s$ definito come segue:

$$\forall T \in \mathfrak{T}^r_s,\ \forall K \in \mathfrak{T},\ \forall q \in M \qquad (D_T K)_q = \begin{cases} 0 & \text{se } q \notin V \\ f(q)(D^V_{T_{|V}} K_{|V})_q & \text{se } q \in V \end{cases}$$

E' immediato allora verificare che la pseudoconnessione lineare di specie (r,s) definita da D verifica l'asserto. ∎

Si prova facilmente la seguente:

Proposizione 2.4 - *Sia* ∇ *la differenziazione covariante rispetto ad una connessione lineare su* M; *per ogni* $A \in \mathfrak{T}^{s+1}_r$ *e per ogni* $H \in \mathfrak{T}^{s+1}_{r+1}$ *sia* B *l'operatore definito da:*

$$B_T X = \nabla_{A(T)} X + H(T,X) \qquad \forall X \in \mathfrak{X},\ \forall T \in \mathfrak{T}^r_s .$$

Allora la coppia (A,B) *definisce una pseudoconnessione lineare di specie* (r,s) *su* M *e, indicata con* D *la pseudodifferenziazione covariante rispetto a* Γ, *l'applicazione* $(A,H) \to D$ *è un* $\mathfrak{F}$*-isomorfismo di*

$$\mathfrak{T}^{s+1}_r \otimes \mathfrak{T}^{s+1}_{r+1} \quad \text{su} \quad \mathcal{D}^r_s .$$

Si osservi che la proposizione 2.1 segue immediatamente dalla proposizione 2.4 sfruttando il noto teorema sull'esistenza delle connessioni lineari su varietà paracompatte.

3. OMOMORFISMI DI $\mathcal{L}^r_s$ IN $\mathcal{L}^h_k$, SIMMETRIZZAZIONE E ALTERNAZIONE DI $\mathcal{L}^r_s$.

Sia $\Psi : \mathcal{T}^h_k \to \mathcal{T}^r_s$ un'applicazione $\mathfrak{F}$-lineare e per ogni $D \in \mathcal{L}^r_s$ sia $\bar{D} : \mathcal{T}^h_k \to \mathfrak{D}$ l'operatore definito da:

$$\bar{D}_K = D_{\Psi(K)} \qquad \forall K \in \mathcal{T}^h_k .$$

E' immediato verificare che $\bar{D} \in \mathcal{L}^h_k$ e che l'applicazione $\tilde{\Psi} : D \to \bar{D}$ dell'$\mathfrak{F}$-modulo $\mathcal{L}^r_s$ nell'$\mathfrak{F}$-modulo $\mathcal{L}^h_k$ è un omomorfismo; inoltre se Ψ è un isomorfismo, anche $\tilde{\Psi}$ è un isomorfismo. Si osservi che affinché Ψ sia un isomorfismo è necessario che sia $h + k = r + s$ ed è noto che se esiste un isomorfismo di $\mathcal{T}^o_1$ in $\mathcal{T}^1_o$, allora per ogni quaterna (h,k,r,s) di interi non negativi tali che $h + k = r + s > 0$ esiste un isomorfismo di $\mathcal{T}^h_k$ su $\mathcal{T}^r_s$.

Segue allora che:

<u>Proposizione</u> 3.1.- *Se gli $\mathfrak{F}$-moduli $\mathcal{T}^1_o$ e $\mathcal{T}^o_1$ sono isomorfi, allora per ogni quaterna (h,k,r,s) di interi non negativi tali che $h+k=r+s>0$, gli $\mathfrak{F}$-moduli $\mathcal{L}^h_k$ e $\mathcal{L}^r_s$ sono isomorfi.*

In particolare si ha:

<u>Proposizione</u> 3.2.- *Se la varietà M è paracompatta, allora per ogni quaterna (h,k,r,s) di interi non negativi tali che $h+k= r+s>0$, gli $\mathfrak{F}$-moduli $\mathcal{L}^h_k$ e $\mathcal{L}^r_s$ sono isomorfi.*