Introduzione. -

Sia M una varietà differenziabile di classe C^∞ e di dimensione n. Si indichi con $\mathfrak{F}$ l'algebra delle funzioni reali differenziabili su M, con $\mathfrak{X}$ l'$\mathfrak{F}$-modulo dei campi vettoriali differenziabili, con $\mathfrak{T}^r_s$ ($(r,s)\in N^2$) l'$\mathfrak{F}$-modulo dei campi tensoriali differenziabili di specie (r,s), con $\mathfrak{T} = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} \mathfrak{T}^r_s$ l'algebra dei campi tensoriali differenziabili e con $\mathfrak{D}$ l'$\mathfrak{F}$-modulo (algebra di Lie su R) delle derivazioni di $\mathfrak{T}$.

In un precedente lavoro [5] si è introdotta la definizione di pseudoconnessione lineare di specie (r,s) come generalizzazione della nozione di pseudoconnessione lineare: una *pseudoconnessione lineare* Γ *di specie* (r,s) su M è definita da un $\mathfrak{F}$-omomorfismo

$$D : T \to D_T \qquad \text{di} \qquad \mathfrak{T}^r_s \quad \text{in } \mathfrak{D} .$$

Indicato con $\mathcal{L}^r_s$ il modulo degli $\mathfrak{F}$-omomorfismi di $\mathfrak{T}^r_s$ in $\mathfrak{D}$, per ogni $D \in \mathcal{L}^r_s$ si definisce un campo tensoriale A di specie $(s+1,r)$, considerato come applicazione di $\mathfrak{T}^r_s \times \mathfrak{F}$ in $\mathfrak{F}$, ponendo per ogni $T \in \mathfrak{T}^r_s$ e per ogni $f \in \mathfrak{F}$ $A(T,f) = D_T f$.

Alcune proprietà di tali pseudoconnessioni utili per il seguito sono le seguenti:

i) Per definire una pseudoconnessione lineare di specie (r,s) occorre e basta assegnare un campo tensoriale $A \in \mathfrak{T}^{s+1}_r$ e un'applicazione $\mathfrak{F}$-lineare $B : T \to B_T$ di $\mathfrak{T}^r_s$ nell'$\mathfrak{F}$-modulo degli R-endomorfismi di $\mathfrak{X}$ tale che sia soddisfatta la seguente proprietà

$$B_T(fX) = f\, B_T X + A(T,f)X \qquad \forall f\in\mathfrak{F},\ \forall X\in\mathfrak{X},\ \forall T\in\mathfrak{T}^r_s .$$

ii) Se Γ è una pseudoconnessione lineare di specie (r,s) definita da $D \in \mathcal{L}^r_s$ e se U è un aperto di M, esiste un'unica pseudoconnessione lineare di specie (r,s) Γ_U su U tale che

$$(D_T K)_{|U} = (D_U)_{T_{|U}} (K_{|U}) \qquad \forall T \in \mathcal{T}^r_s, \ \forall K \in \mathcal{T}.$$

Inoltre se (U,ϕ) con $\phi = (x^1,\dots,x^n)$ è una carta locale di M, si chiamano *componenti* di Γ rispetto (U,ϕ) le funzioni $A^{j_1\dots j_s h}_{i_1\dots i_r}$ e $\Gamma^{j_1\dots j_s h}_{i_1\dots i_r k}$ definite nel modo seguente:

$$(D_U)_{e^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}} x^h = A^{j_1\dots j_s h}_{i_1\dots i_r} \ , \quad (D_U)_{e^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}} e_k = \Gamma^{j_1\dots j_s h}_{i_1\dots i_r k} \, e_h$$

$$\text{con } e_h = \frac{\partial}{\partial x^h} \ , \quad e^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} = e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} \, .$$

In questa nota si espongono alcune proprietà delle pseudoconnessioni lineari di specie (r,s) Precisamente nel §. 1 si introduce la nozione di pseudoderivata covariante, di pseudodifferenziale covariante e si definisce un campo tensoriale a carattere torsionale; nel § 2 vengono dimostrati alcuni teoremi di esistenza e di estensione; nel § 3 infine vengono studiati gli omomorfismi di $\mathcal{L}^r_s$ in $\mathcal{L}^h_k$ e se ne trovano alcune proprietà.

1. PSEUDODERIVATA E PSEUDODIFFERENZIALE COVARIANTE DI UN CAMPO TENSORIALE.

Sia Γ una pseudoconnessione lineare di specie (r,s) (con $r,s) \neq (0,0))$ su M definita da $D \in \mathcal{L}^r_s$, per ogni $T \in \mathcal{T}^r_s$ e per ogni $K \in \mathcal{T}$, $D_T K$ si chiama *pseudoderivata covariante* di K rispetto a T. Per ogni $K \in \mathcal{T}^{r'}_{s'}$, considerato come applicazione $\mathfrak{F}$-multilineare di $\mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{X}$ (s' volte) in $\mathcal{T}^{r'}_0$, si chiama *pseudodifferenziale covariante* di K, e si indica DK, il campo tensoriale di specie $(s+r', r+s')$ (considerato come applicazione $\mathfrak{F}$-multilineare di $\underbrace{\mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{X}}_{s'\text{volte}} \times \mathcal{T}^r_s$ in $\mathcal{T}^{r'}_0$ definito da:

$$(DK)(X_1, \ldots, X_{s'}, T) = (D_T K)(X_1, \ldots, X_{s'}).$$

Se $K \in \mathcal{T}$ è somma di campi tensoriali di specie diverse, si chiama *pseudodifferenziale covariante* di K, e si indica DK, la somma degli pseudodifferenziali covarianti dei campi tensoriali delle varie specie.

Si prova che

<u>Proposizione 1.1</u>.- *Se* $K \in \mathcal{T}^{r'}_{s'}$, *allora per ogni* $X_1, \ldots X_{s'} \in \mathfrak{X}$ *e per ogni* $T \in \mathcal{T}^r_s$, *risulta:*

$$(DK)(X_1, \ldots, X_{s'}, T) = D_T(K(X_1, \ldots X_{s'})) - \sum_{i=1}^{s'} K(X_1, \ldots, D_T X_i, \ldots, X_{s'})$$

Se $K \in \mathcal{T}$, $D(DK) = D^2 K$ si chiama *pseudodifferenziale covariante seconda* di K, e in generale $D^m K$, pseudodifferenziale covariante m-esimo di K, è definito induttivamente da:

$$D^m K = D(D^{m-1}K) \ .$$

Se $A^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r}$ e $\Gamma^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r k}$ sono le componenti di Γ rispetto ad una carta locale (U,ϕ) di M con $\phi = (x^1, \dots, x^n)$ e se X^i sono le componenti di $X \in \mathcal{X}$ rispetto alla stessa carta locale, allora le componenti $X^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r}$ di DX sono:

$$X^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r} = X^i \Gamma^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r i} + \frac{\partial X^h}{\partial x^k} A^{j_1 \dots j_s k}_{i_1 \dots i_r} \ .$$

Infatti posto $e^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} = e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}$ risulta:

$$(D_U)_{e^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}} (X^i e_i) = X^i (D_U)_{e^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}} e_i + A(e^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}, X^i)\, e_i =$$

$$= X^i \Gamma^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r i}\, e_h + \frac{\partial X^h}{\partial x^k} A^{j_1 \dots j_s k}_{i_1 \dots i_r}\, e_h \ .$$

In generale se $K \in \mathcal{T}^{r'}_{s'}$ ha componenti $K^{i_1 \dots i_{r'}}_{j_1 \dots j_{s'}}$ rispetto alla carta locale (U,ϕ), le componenti $K^{h_1 \dots h_s i_1 \dots i_{r'}}_{k_1 \dots k_r j_1 \dots j_{s'}}$ di DK sono:

$$K^{h_1 \dots h_s i_1 \dots i_{r'}}_{k_1 \dots k_r j_1 \dots j_{s'}} = A^{h_1 \dots h_s h}_{k_1 \dots k_r} \frac{\partial K^{i_1 \dots i_{r'}}_{j_1 \dots j_{s'}}}{\partial x^h} + \sum_{\alpha=1}^{r'} K^{i_1 \dots h \dots i_{r'}}_{j_1 \dots j_{s'}} \Gamma^{h_1 \dots h_s h_\alpha}_{k_1 \dots k_r h} -$$

$$- \sum_{\beta=1}^{s'} K^{i_1 \ldots i_r', \quad h_1 \ldots h_s h}_{j_1 \ldots h \ldots j_{s'}} \Gamma_{k_1 \ldots k_r j_\beta} \quad .$$

Se Γ è una pseudoconnessione lineare di specie (r,s) definita da $D \in \mathcal{L}^r_s$, il campo tensoriale $A \in \mathcal{T}^{s+1}_r$ definito da $A(T,f) = D_T f$ può essere considerato come applicazione $\mathfrak{F}$-lineare $\mathcal{A}$ di $\mathcal{T}^r_s$ in $\mathcal{X}$ tale che ad ogni $T \in \mathcal{T}^r_s$ associa $\mathcal{A}(T) \in \mathcal{X}$ definito per ogni $f \in \mathfrak{F}$ da $\mathcal{A}(T)f = D_T f$.

Nel seguito con abuso di notazione si indicherà $\mathcal{A}$ con A.

Fissato $\omega \in \mathcal{T}^o_s$, si ponga per ogni $(X_0, X_1, \ldots, X_r) \in \mathcal{X}^{r+1}$ $L_\omega(X_0, \ldots, X_r) =$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \varepsilon(\sigma) \{ [A(X_{\sigma(o)} \otimes \ldots \otimes X_{\sigma(r-1)} \otimes \omega), X_{\sigma(r)}] - \frac{1}{2} \sum_{i=o}^{r-1} (-1)^i A(X_{\sigma(o)} \otimes \ldots \otimes$$

$$\otimes [X_{\sigma(i)}, X_{\sigma(i+1)}] \otimes \ldots \otimes X_{\sigma(r)} \otimes \omega) \}$$

dove con $\mathfrak{S}_r$ si è indicato l'insieme delle permutazioni di $\{0, \ldots r\}$

Ebbene l'applicazione $S_\omega : (X_0, \ldots X_r) \to S_\omega(X_0, \ldots X_r)$ di $\mathcal{X}^{r+1}$ in $\mathcal{X}$ così definita:

$$S_\omega(X_o, \ldots X_r) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \varepsilon(\sigma) \, D_{X_{\sigma(o)} \otimes \ldots \otimes X_{\sigma(r-1)} \otimes \omega} X_{\sigma(r)} - L_\omega(X_o, \ldots, X_r) \right)$$

è un campo tensoriale di specie $(1,r+1)$ che viene chiamato ω-*torsione* di Γ.

Si osservi che per $r = 1$, $s = 0$, $\omega = 1_{\mathfrak{F}}$ (funzione di costante valore 1) si ottiene l'ordinario campo tensoriale di torsione di una pseudoconnessione lineare.

2. ESISTENZA ED ESTENSIONE DI PSEUDOCONNESSIONI LINEARI DI SPECIE (r,s).

Si proverà la seguente:

<u>Proposizione</u> 2.1.- *Se* M *è una varietà paracompatta, per ogni* $A \in \mathcal{T}_r^{s+1}$ *esiste una pseudoconnessione lineare* Γ *di specie* (r,s) *su* M, *tale che, indicata con* D *la pseudodifferenziazione covariante rispetto a* Γ, *il campo tensoriale* $(T,f) \in \mathcal{T}_s^r \times \mathfrak{F} \to D_T f \in \mathfrak{F}$ *coincide con* A.

<u>Dimostrazione</u>. Essendo M paracompatta, esiste una famiglia di carte ammissibili $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ tale che

a) $(U_i)_{i \in I}$ è un ricoprimento di M localmente finito;

b) $\forall i \in I$ $\bar{U}_i$ è compatto;

c) esiste una partizione dell'unità $(f_i)_{i \in I}$ subordinata al ricoprimento $(U_i)_{i \in I}$

Per ogni $i \in I$ sia Γ_i una pseudoconnessione lineare di specie (r,s) su U_i tale che, indicata con D_i la pseudodifferenziazione covariante rispetto a Γ_i, il campo tensoriale $A_i \in \mathcal{T}_r^{s+1}(U_i)$ definito da

$$A_i(T',g') = D_{iT'}g' \qquad \forall g' \in \mathfrak{F}(U_i), \forall T' \in \mathcal{T}_s^r(U_i)$$

coincida con $A_{|U_i}$.

Per ogni $i \in I$ si indichi con D'_i l'elemento di $\mathcal{L}_s^r$ definito così

$$\forall T \in \mathcal{T}^r_s\ ,\ \forall K \in \mathcal{T}\ ,\ \forall p \in M\ :\quad (D'_{iT}K)_p = \begin{cases} 0 & \text{se } p \notin U_i \\ f_i(p)(D_{iT_{|U_i}} K_{|U_i})_p & \text{se } p \in U_i \end{cases}$$

Sia ora D l'elemento di $\mathcal{L}^r_s$ definito da

$$D_T K = \sum_{i \in I} D'_{iT} K \qquad \forall T \in \mathcal{T}^r_s,\ \forall K \in \mathcal{T}$$

Se p è un qualunque punto di M, si indicherà con J la parte (finita) di I tale che per ogni $i \in J$ sia $p \in U_i$ e per ogni $i \notin J$ sia $p \notin U_i$.

Allora per ogni $g \in \mathfrak{F}$ e per ogni $T \in \mathcal{T}^r_s$ risulta:

$$(D_T g)_p = \sum_{i \in J} (D'_{iT} g)_p = \sum_{i \in J} f_i(p)(D_{iT_{|U_i}}\, g_{|U_i})_p =$$

$$= \sum_{i \in J} f_i(p)\ (A_i(T_{|U_i}, g_{|U_i}))_p = (A(T,g))_p \sum_{i \in J} f_i(p) = (A(T,g))_p .\ \blacksquare$$

Ricordando com'era stato definito l'omomorfismo $\Phi : \mathcal{L}^r_s \to \mathcal{T}^{s+1}_r$ (cfr [5] pag. 3), la precedente proposizione è equivalente alla seguente

<u>Proposizione</u> 2.2. - *Se* M *è una varietà paracompatta, l'omomorfismo* Φ $\mathcal{L}^r_s \to \mathcal{T}^{s+1}_r$ *è surgettivo.*

Si proverà ora la seguente:

<u>Proposizione</u> 2.3.- *Sia* V *una sottovarietà aperta di* M *e sia* $\overset{V}{-}$ *una pseudoconnessione lineare di specie* (r,s) *su* V, *allora per ogni* $p \in V$ *esiste un intorno aperto* U *di* p *incluso in* V *ed esiste una pseudo*

connessione lineare Γ *di specie* (r,s) *su* M, *tali che le pseudoconnessioni indotte su* U *da* Γ *e da* Γ^V *coincidono.*

Dimostrazione. - Per ogni $p \in V$ è noto che esistono $f \in \mathfrak{F}$ e un intorno aperto U di p incluso in V, tali che

$$f_{|U} = 1 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{supp}(f) \subset V.$$

Indicata con D^V la pseudoconnessione covariante rispetto a Γ^V, sia D l'elemento di $\mathcal{D}^r_s$ definito come segue:

$$\forall T \in \mathfrak{T}^r_s,\ \forall K \in \mathfrak{T},\ \forall q \in M \qquad (D_T K)_q = \begin{cases} 0 & \text{se } q \notin V \\ f(q)(D^V_{T_{|V}} K_{|V})_q & \text{se } q \in V \end{cases}$$

E' immediato allora verificare che la pseudoconnessione lineare di specie (r,s) definita da D verifica l'asserto. ∎

Si prova facilmente la seguente:

Proposizione 2.4 - *Sia* ∇ *la differenziazione covariante rispetto ad una connessione lineare su* M; *per ogni* $A \in \mathfrak{T}^{s+1}_r$ *e per ogni* $H \in \mathfrak{T}^{s+1}_{r+1}$ *sia* B *l'operatore definito da:*

$$B_T X = \nabla_{A(T)} X + H(T,X) \qquad \forall X \in \mathfrak{X},\ \forall T \in \mathfrak{T}^r_s .$$

Allora la coppia (A,B) *definisce una pseudoconnessione lineare di specie* (r,s) *su* M *e, indicata con* D *la pseudodifferenziazione covariante rispetto a* Γ, *l'applicazione* $(A,H) \to D$ *è un* $\mathfrak{F}$*-isomorfismo di* $\mathfrak{T}^{s+1}_r \otimes \mathfrak{T}^{s+1}_{r+1}$ *su* $\mathcal{D}^r_s$.

Si osservi che la proposizione 2.1 segue immediatamente dalla proposizione 2.4 sfruttando il noto teorema sull'esistenza delle connessioni lineari su varietà paracompatte.

3. OMOMORFISMI DI $\mathcal{L}^r_s$ IN $\mathcal{L}^h_k$, SIMMETRIZZAZIONE E ALTERNAZIONE DI $\mathcal{L}^r_s$.

Sia $\Psi : \mathcal{T}^h_k \to \mathcal{T}^r_s$ un'applicazione $\mathfrak{F}$-lineare e per ogni $D \in \mathcal{L}^r_s$ sia $\bar{D} : \mathcal{T}^h_k \to \mathcal{D}$ l'operatore definito da:

$$\bar{D}_K = D_{\Psi(K)} \qquad \forall K \in \mathcal{T}^h_k .$$

E' immediato verificare che $\bar{D} \in \mathcal{L}^h_k$ e che l'applicazione $\tilde{\Psi} : D \to \bar{D}$ dell'$\mathfrak{F}$-modulo $\mathcal{L}^r_s$ nell'$\mathfrak{F}$-modulo $\mathcal{L}^h_k$ è un omomorfismo; inoltre se Ψ è un isomorfismo, anche $\tilde{\Psi}$ è un isomorfismo. Si osservi che affinché Ψ sia un isomorfismo è necessario che sia $h + k = r + s$ ed è noto che se esiste un isomorfismo di $\mathcal{T}^o_1$ in $\mathcal{T}^1_o$, allora per ogni quaterna (h,k,r,s) di interi non negativi tali che $h + k = r + s > 0$ esiste un isomorfismo di $\mathcal{T}^h_k$ su $\mathcal{T}^r_s$.

Segue allora che:

<u>Proposizione</u> 3.1.- *Se gli $\mathfrak{F}$-moduli $\mathcal{T}^1_o$ e $\mathcal{T}^o_1$ sono isomorfi, allora per ogni quaterna (h,k,r,s) di interi non negativi tali che $h+k=r+s>0$, gli $\mathfrak{F}$-moduli $\mathcal{L}^h_k$ e $\mathcal{L}^r_s$ sono isomorfi.*

In particolare si ha:

<u>Proposizione</u> 3.2.- *Se la varietà M è paracompatta, allora per ogni quaterna (h,k,r,s) di interi non negativi tali che $h+k= r+s>0$, gli $\mathfrak{F}$-moduli $\mathcal{L}^h_k$ e $\mathcal{L}^r_s$ sono isomorfi.*

Indicato con $\mathcal{G}_n$ ($n \geq 1$) il gruppo delle permutazioni di $\{1,\dots,n\}$, è noto che per ogni $(\rho,\sigma) \in \mathcal{G}_r \times \mathcal{G}_s$ esiste un unico automorfismo ψ^σ_ρ di $\mathcal{T}^r_s$ tale che per ogni $X_1,\dots,X_r \in \mathcal{X}$ e per ogni $\omega^1,\dots,\omega^s \in \mathcal{T}^o_1$:

$$\psi^\sigma_\rho (X_1 \otimes\dots\otimes X_r \otimes \omega^1 \otimes \dots\otimes \omega^s) = X_{\rho(1)} \otimes\dots\otimes X_{\rho(r)} \otimes \omega^{\sigma(1)} \otimes\dots\otimes \omega^{\sigma(s)}.$$

Posto $\tau = (\rho,\sigma) \in \mathcal{G}_r \times \mathcal{G}_s$ l'applicazione $\chi_\tau (= \tilde{\psi}^\sigma_\rho)$ che ad ogni $D \in \mathcal{D}^r_s$ associa $\chi_\tau(D) \in \mathcal{D}^r_s$ e definito da

$$\chi_\tau(D)_T = D_{\psi^\sigma_\rho(T)}$$

è, per quanto osservato all'inizio di questo paragrafo, un automorfismo di $\mathcal{D}^r_s$

Posto $\chi_\tau(D) = {}^\tau D$ si dà la seguente

<u>Definizione</u> 3.3.- Se Γ è una pseudoconnessione lineare di specie (r,s) definita da $D \in \mathcal{D}^r_s$, allora per ogni $\tau = (\rho,\sigma) \in \mathcal{G}_r \times \mathcal{G}_s$, la pseudoconnessione lineare di specie (r,s) definita da ${}^\tau D$ si chiama *associata a tramite* τ e si indica con ${}^\tau\Gamma$.

E' di verifica immediata la seguente

<u>Proposizione</u> 3.4.- *Se* $A^{j_1\dots j_s h}_{i\dots i_r}$ *e* $\Gamma^{j_1\dots j_s h}_{i_1\dots i_r k}$ *sono le componenti di una pseudoconnessione lineare* Γ *di specie* (r,s) *rispetto ad una carta locale* (U,ϕ), *per ogni* $\tau = (\rho,\sigma) \in \mathcal{G}_r \times \mathcal{G}_s$ *le componenti* ${}^\tau A^{j_1\dots j_s h}_{i_1\dots i_r}$ *e* ${}^\tau\Gamma^{j_1\dots j_s h}_{i_1\dots i_r k}$ *della pseudoconnessione* ${}^\tau\Gamma$ *associata a* Γ *tramite* τ *sono date da:*

$$^{\tau}A^{j_1\dots j_s h}_{i_1\dots i_r} = A^{j_{\sigma(1)}\dots j_{\sigma(s)} h}_{i_{\rho(1)}\dots i_{\rho(r)}}$$

$$^{\tau}\Gamma^{j_1\dots j_s h}_{i_1\dots i_r k} = \Gamma^{j_{\sigma(1)}\dots j_{\sigma(s)} h}_{i_{\rho(1)}\dots i_{\rho(r)} k}$$

Definizione 3.5.- L'endomorfismo χ di $\mathcal{J}^r_s$ definito da

$$\chi = \frac{1}{r!s!} \sum_{\tau\in\mathcal{G}_{\delta r}\times\mathcal{G}_{\delta s}} \chi_\tau$$

si chiama *simmetrizzazione* di $\mathcal{J}^r_s$. Per ogni $D \in \mathcal{J}^r_s$, la pseudoconnessione lineare di specie (r,s) definita da $\chi(D)$ si chiama *simmetrizzata* della pseudoconnessione definita da D.

Dalla definizione precedente segue che se Γ è una pseudoconnessione determinata da $D \in \mathcal{J}^r_s$, allora la pseudoconnessione simmetrizzata di Γ è determinata da

$$\bar{D} = \frac{1}{r!s!} \sum_{\tau\in\mathcal{G}_{\delta r}\times\mathcal{G}_{\delta s}} {}^{\tau}D .$$

Per questo motivo e tenuto presente 3.4., se $A^{j_1\dots j_s h}_{i_1\dots i_r}$ e $\Gamma^{j_1\dots j_s h}_{i_1\dots i_r k}$ sono le componenti di Γ rispetto ad una carta ammissibile (U,ϕ), le componenti $\bar{A}^{j_1\dots j_s h}_{i_1\dots i_r}$ e $\bar{\Gamma}^{j_1\dots j_s h}_{i_1\dots i_r k}$ della pseudoconnessione simmetrizzata di Γ sono date da:

$$\bar{A}^{j_1\dots j_s h}_{i_1\dots i_r} = \frac{1}{r!s!} \sum_{(\rho,\sigma)\in\mathcal{G}_{\delta r}\times\mathcal{G}_{\delta s}} A^{j_{\sigma(1)}\dots j_{\sigma(s)} h}_{i_{\rho(1)}\dots i_{\rho(r)}}$$

$$\bar{\Gamma}^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r} = \frac{1}{r!s!} \sum_{(\rho,\sigma)\in \mathcal{S}_r \times \mathcal{S}_s} \Gamma^{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(s)} h}_{i_{\rho(1)} \dots i_{\rho(r)} k}$$

Definizione 3.6.- Una pseudoconnessione lineare di specie (r,s) si dice a *derivata covariante simmetrica* se coincide con la sua simmetrizzata.

Segue immediatamente che:

Proposizione 3.7.- *Una pseudoconnessione lineare* Γ *di specie* (r,s) *è a derivata covariante simmetrica se e solo se per ogni* $\tau \in \mathcal{S}_r \times \mathcal{S}_s$ Γ *coincide con* ${}^{\tau}\Gamma$.

Inoltre è facile verificare che:

Proposizione 3.8.- *Se* χ *è la simmetrizzazione di* $\mathcal{L}^r_s$ *risulta*

$$\chi \circ \chi = \chi .$$

Indicato con $\bar{\mathcal{L}}^r_s$ il sottoinsieme di $\mathcal{L}^r_s$ formato dagli elementi che definiscono le pseudoconnessioni a derivata covariante simmetrica, risulta $\chi(\mathcal{L}^r_s) = \bar{\mathcal{L}}^r_s$ e quindi:

Proposizione 3.9.- $\bar{\mathcal{L}}^r_s$ *è un sottomodulo di* $\mathcal{L}^r_s$.

Posto per ogni $\tau = (\rho,\sigma) \in {}_r \times {}_s$

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\rho)\cdot\varepsilon(\sigma)$$

dove per ogni $\rho \in \mathcal{S}_r$ $(\sigma \in \mathcal{S}_s)$ si è posto $\varepsilon(\rho) = \pm 1$ $(\varepsilon(\sigma) = \pm 1)$ a seconda che la permutazione ρ (σ) sia di classe pari o dispari, usando le notazioni precedenti si dà la seguente

Definizione 3.10.- L'endomorfismo Θ di $\mathcal{L}^r_s$ definito da

$$\Theta = \frac{1}{r!s!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s} \varepsilon(\tau) \chi_\tau$$

si chiama *alternazione* di $\mathcal{L}^r_s$. Per ogni $D \in \mathcal{L}^r_s$ la pseudoconnessione lineare definita da $\Theta(D)$ si chiama *pseudoconnessione alternata* della pseudoconnessione definita da D.

E' immediato allora che la pseudoconnessione alternata di Γ determinata da $D \in \mathcal{L}^r_s$, è determinata da:

$$\tilde{D} = \frac{1}{r!s!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s} \varepsilon(\tau)\, {}^{\tau}D$$

e che se $A^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r}$ e $\Gamma^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r k}$ sono le componenti di Γ rispetto ad una carta ammissibile (U,ϕ), le componenti $\tilde{A}^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r}$ e $\tilde{\Gamma}^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r k}$ della pseudoconnessione alternata di Γ sono:

$$\tilde{A}^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r} = \frac{1}{r!s!} \sum_{(\rho,\sigma) \in \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s} \varepsilon(\rho)\varepsilon(\sigma)\, A^{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(s)} h}_{i_{\rho(1)} \dots i_{\rho(r)}}$$

$$\tilde{\Gamma}^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r k} = \frac{1}{r!s!} \sum_{(\rho,\sigma) \in \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s} \varepsilon(\rho)\varepsilon(\sigma)\, \Gamma^{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(s)} h}_{i_{\rho(1)} \dots i_{\rho(r)} k} .$$

<u>Definizione 3.11</u>.- Una pseudoconnessione lineare di specie (r,s) si dice *a derivata covariante alternante* se coincide con la sua alternata.

Sono di semplice verifica le seguenti:

Proposizione 3.12. - *Una pseudoconnessione lineare* Γ *di specie* (r,s) *determinata da* D *é a derivata covariante alternante se e solo se per ogni* $\tau \in \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s$ $D = \varepsilon(\tau)\, {}^{\tau}D$.

Proposizione 3.13.- *Se* Θ *è alternazione di* $\mathcal{L}^r_s$ *risulta*

$$\Theta \circ \Theta = \Theta$$

Proposizione 3.14.- *Se* χ *e* Θ *sono rispettivamente la simmetrizzazione e l'alternazione di* $\mathcal{L}^r_s$ *risulta:*

$$\chi \circ \Theta = \Theta \circ \chi = 0$$

Indicato con $\widetilde{\mathcal{L}}^r_s$ il sottoinsieme di $\mathcal{L}^r_s$ formato dagli elementi che definiscono le pseudoconnessioni a derivata covariante alternante, risulta $\Theta(\mathcal{L}^r_s) = \widetilde{\mathcal{L}}^r_s$ e quindi $\widetilde{\mathcal{L}}^r_s$ è un sottomodulo di $\mathcal{L}^r_s$.

Accettato per la pubblicazione
su parere favorevole del Prof.C. Di Comite

BIBLIOGRAFIA

[1] C. Di Comite, *Pseudoconnessioni tensoriali di specie* (r,s) *di ordine* n, Ann.Mat.Pura ed Appl.,(4),79 (1968).

[2] C. Di Comite, *Pseudoconnessioni lineari su una varietà differenziabile di classe* C^∞. Ann.Mat. Pura Appl. (4),83, (1969).

[3] S.Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, 1962.

[4] S.Kobayashi-K.Nomizu *Foundation of differential geometry*, Interscience Publisher, 1963.

[5] S. Rizzo *Pseudoconnessioni lineari di specie* (r,s) B.U.M.I. (5), 14-B,(1977).