differenziabile di x_0 se

$$v_\alpha f_\alpha = v_\beta f_\beta = v_\gamma f_\gamma = \ldots\ldots\ldots$$

dove $v_\lambda = \rho_{\mu\lambda}(v_\mu)$ è considerato come derivazione su V.

CAPITOLO II

PROBLEMI DI SMUSSAMENTO. -

Alcuni Lemmi.-

(1.1) Sia

$$\phi : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{E}^m, 0)$$

un PL-omeomorfismo. Allora esiste una triangolazione D di $\mathbb{R}^m$ e una T di $\mathbb{E}^m$ tale che ϕ sia simpliciale, si può inoltre modificare D e T in modo tale che le origini siano vertici delle due triangolazioni.

Consideriamo ora $St(0,D)$ e prolunghiamo radialmente da 0 tutti i simplessi della stella che contengono 0. Analogamente per $St(0,T)$. Si ottiene così una decomposizione $\bar{D}$ di $\mathbb{R}^m$ (risp. $\bar{T}$ di $\mathbb{E}^m$) mediante "coni simpliciali" con vertici in 0.

L'applicazione $\phi \mid St(0,D)$ si estende linearmente, in modo unico, a tutto $\mathbb{R}^n$ e costituisce ancora un PL-omeomorfismo, che indichiamo $\bar{\phi}$.

Si vede facilmente che vale

(1.2) <u>LEMMA</u>.-

Siano $\phi_1, \phi_2 : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{E}^m, 0)$ *due PL-omeomorfismi. Allora*

$$\bar{\phi}_1 = \bar{\phi}_2 \iff germ_0\, \phi_1 = germ_0\, \phi_2$$

cioé le applicazioni $\bar{\phi}_i$ dipendono solo da ciò che accade in un intorno di 0, come è ovvio trattandosi di coni.

Sia η la matrice in $\mathbb{E}^m$ e Γ_ϕ la matrice riemanniana su $\mathbb{R}^m$ indotta da ϕ, cioé

$$\Gamma_\phi = \phi^*(\eta) \qquad \phi^* : T^*(E^m) \to T^*(\mathbb{R}^m).$$

Allora

(1.3) LEMMA. -

La metrica Γ_ϕ è determinata dala sua restrizione in 0 ed ha densità di volume costante.

Dim.-

La prima affermazione discende dalfatto che Γ_ϕ è "costante" su ogni cono simpliciale della decomposizione. Inoltre Γ_ϕ ha densità di volume costante poiché da

$$\Gamma_\phi(v,w) = \eta(\phi(v), \phi(w))$$

segue

$$|V^m_\alpha(0,\mathbb{R}^m)|^{\Gamma_\phi}_m = |V^m_\alpha \cap S^{m-1}_{\alpha,0}|^{\Gamma_\phi}_{S^{m-1}_{\alpha,0}} = |\phi(V^m_\alpha \cap S^{m-1}_{\alpha,0})|^\eta_{\phi(S^{m-1}_{\alpha,0})}$$

e quindi

$$\Omega(0,\mathbb{R}^m) = \sum_\alpha |V^m_\alpha(0,\mathbb{R}^m)|_m = |\phi(S^{m-1}_{\alpha,0})|_{\phi(S^{m-1}_{\alpha,0})} \quad \_|$$

Inversamente, se abbiamo una metrica riemanniana definita solo in $0 \in \mathbb{R}^m$, possiamo estenderla su tutto $\mathbb{R}^m$ come nel Lemma (1.5) del Cap. 1. Se questa metrica estesa ha densità di volume costante, diciamo che la metrica riemanniana iniziale in 0 è "normalizzata". Quindi una metrica riemanniana su M con densità di volume costante non è altro che un campo su M di metriche riemanniane normalizzate.

2. LO SPAZIO $\tilde{\Gamma}(M)$.-

Indichiamo con $\tilde{\Gamma}(m)$ l'insieme di tutte le metriche riemanniane normalizzate in $0 \in \mathbb{R}^m$ rispetto a tutte le possibili decomposizioni di $\mathbb{R}^m$ in coni simpliciali.

Introduciamo ora una topologia su $\tilde{\Gamma}(m)$.

Sia D una decomposizione di $\mathbb{R}^m$ in coni simplciali con vertici in 0. Per ogni cono simpliciale 1-dimensionale della decomposizione D, scegliamo un punto su esso, differente da 0. Siano $e_1,\ldots,e_p$ questi punti che si posono considerare anche come estremi di vettori uscenti da 0.

Indichiamo con A l'insieme di tutte le coppie di indici (i,j) per cui e_i e e_j appartengono ad uno stesso 2-cono simpliciale della decomposizione. Allora una metrica normalizzata in 0 è determinata dalla matrice (simmetrica) a coefficienti reali

$$(\langle e_i, e_j\rangle) \qquad (i,j) \in A.$$

Se N è la cardinalità dell'insieme dei 2-coni simpliciali della decomposizione, ogni matrice del tipo precedente (e quindi ogni metrica riemanniana normalizzata in 0) può essere identificata ad un punto di $\mathbb{R}^N$.

Naturalmente

$$N \leq \binom{p}{2} + p$$

dove al secondo membro compare la dimensione dello spazio delle matrici simmetriche di ordine p.

Quindi, fissata una decomposizione D di $\mathbb{R}^m$, l'insieme $\Gamma(D)$ di tutte le metriche riemanniane in 0 riceve una topologia, quella indotta da $\mathbb{R}^N$ tramite l'applicazione $\Gamma(D) \to \mathbb{R}^N$ che associa ad ogni metrica in 0 il punto di $\mathbb{R}^N$ corrispondente alla matrice associata. Indichiamo ancora con $\Gamma(D)$ lo spazio topologico di sostegno $\Gamma(D)$. Sia D'

un raffinamento di D, allora $p' \geq p$ da cui $N' \geq N$ e quindi $\Gamma(D) \subset \Gamma(D')$.

Allora sull'insieme

$$\tilde{\Gamma}(m) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ D}} \Gamma(D)$$

possiamo introdurre la topologia debole, cioè $U \subset \tilde{\Gamma}(m)$ è per definizione aperto in $\tilde{\Gamma}(m)$ se e solo se $U \cap \Gamma(D)$ è aperto in $\Gamma(D)$ per ogni D.

3. LO SPAZIO $\Gamma(m)$.-

(3.1) Consideriamo ora l'insieme PL(m) dei germi dei PL-omeomorfismi

$$\phi(\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{E}^m, 0)$$

L'insieme Pl(m) può essere dotato di struttura di gruppo con l'usuale composizione tra applicazioni avendo identificato $\mathbb{E}^m$ con $\mathbb{R}^m$.

Indicato con O(m) il sostegno di PL(m) costituito dalle trasformazioni ortogonali di $\mathbb{E}^m$ si consideri

$$\Gamma(M) = PL(m)_{/O(m)} .$$

Poiché O(m) in generale non è normale in PL(m), l'insieme quoziente in generale non è un gruppo.

Lo spazio $\Gamma(m)$ è fondamentale nella teoria dello smussamento. Intanto vale il seguente teorema che permette di identificare $\Gamma(m)$ con m prima introdotto.

(3.2) TEOREMA. -

Sia ϕ *il germe del PL-omeomorfismo*

$$\phi : (\mathbb{R}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{E}^m, 0)$$

Allora l'applicazione

$$\Psi : PL(m) \longrightarrow \tilde{\Gamma}(m) \qquad \phi \longmapsto \Gamma_\phi$$

si fattorizza tramite la corrispondenza biunivoca

$$\Theta \quad \Gamma(m) \rightarrow \tilde{\Gamma}(m).$$

<u>Dim.-</u>

Poiché una trasf. ortogonale di $\mathbb{E}^m$ non cambia la metrica di $\mathbb{E}^m$, si ha chiaramente

$$\begin{tikzcd} PL(m) \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \tilde{\Gamma}(m) \\ & \Gamma(m) \arrow[ur, "\Theta"'] & \end{tikzcd}$$

dove π è la proiezione canonica. Si vede facilmente che Θ è suriettiva. Infatti, considerata una metrica normalizzata γ in $0 \in \mathbb{R}^m$, per il lemma princiaple (2.1) del Cap. 1 esiste un PL-omeomorfismo $\phi : (\mathbb{R}^m,0) \rightarrow (\mathbb{E}^m,0)$ tale che $\Gamma_\phi \equiv \gamma$.

Supponiamo ora che

$$\phi_1, \phi_2 : (\mathbb{R}^m,0) \rightarrow (\mathbb{E}^m,0)$$

siano due PL-omeomorfismi tali che $\Gamma_{\phi_1} = \Gamma_{\phi_2}$. Allora sempre per il lemma prima ricordato si conclude che ϕ_1 e ϕ_2 differiscono per una trasformazione ortogonale. Ciò prova l'iniettività di Θ $\lrcorner$

(3.3) Sia M^m una PL-varietà. Per ogni punto $x \in M$ indichiamo con Γ_x lo spazio topologico di tutte le metriche riemanniane normalizzate in x.

Allora

$$\Gamma(M) = \bigcup_{x \in M} \Gamma_x$$

è lo spazio totale di un fibrato (localmente banale) su M con fibra $\Gamma(m)$.

Da quanto precede segue che

(3.4) PROPOSIZIONE.-

Ogni metrica riemanniana con densità di volume costante su M *è una sezione continua del fibrato* $\Gamma(M)$.

Da questa proposizione e dal lemma principale segue

(3.5) TEOREMA. -

La varietà combinatoria M *ammette una struttura differenziabile compatibile con la struttura combinatoria se e solo se esiste una sezione globale in* $\Gamma(M)$. *Ogni sezione continua in* $\Gamma(M)$ *definisce uno sumussamento.*

Dunque le ostruzioni a smussamenti su M si possono interpretare come ostruzioni alle sezioni del fibrato $E = (\Gamma(M), M, p)$ di fibra $\Gamma(m)$ (connessa per archi). Ora, come è noto, le ostruzioni si trovano nei gruppi di coomologia

$$H^i(M; \pi_{i-1}(\Gamma(m)))$$

della varietà M a coefficienti nel gruppo d'omotopia $(i-1)$-dimensionale della fibra.

4. LA RELAZIONE DI CONCORDANZA

(4.1) Si denoti con $S(M)$ l'insieme delle sezioni continue in $\Gamma(M)$ e quindi degli sumussamenti di M. Se $\alpha \in S(M)$, indichiamo con M_α la varietà differenziabile M con la struttura indotta da α.

In $S(M)$ esiste la relazione di equivalenza " $\overset{\sim}{\sim}$ " del diffeomorfismo

$$\alpha \overset{\sim}{\sim} \beta \iff M_\alpha \text{ diffeomorfa a } M_\beta$$

Ora vogliamo introdurre un'altra relazione di equivalenza, più adatta a classificare gli smussamenti.

Siano $\alpha, \beta \in S(M)$. Essi sono detti <u>concordanti</u> (nel senso di Milnor) in simboli $\alpha \sim \beta$, se esiste $\gamma \in S(MxI)$ tale che

$$\partial(MxI)_{\gamma} = M_{\alpha} \times 0 \cup M_{\beta} \times 1.$$

Si vede facilmente che la relazione di concordanza è una relazione di equivalenza. Si può inoltre dimostrare che

$$\alpha \sim \beta \implies \alpha \overset{\sim}{\sim} \beta$$

ma non è vero il viceversa ([3]).

Tenendo conto poi dei risultati del paragrafo precedente, è facile vedere che:

(4.2) <u>PROPOSIZIONE</u>. -

$\alpha \simeq \beta \iff \alpha \sim \beta$ *dove si è indicata con "$\simeq$" l'usuale relazione d'omotopia di sezioni.*

<u>Dim.</u>

Infatti se $\alpha \simeq \beta : M \to \Gamma(M)$ esiste un'appl. continua

$$\gamma : M \times I \to \Gamma(M)$$

tale che

$$\gamma(x,0) = \alpha(x) \qquad\qquad \gamma(x,1) = \beta(x)$$

cioè esiste una $\gamma \in S(MxI)$ tale che

$$\gamma \mid (Mx0) = \alpha \qquad\qquad \gamma \mid (Mx1) = \beta$$

cioè α e β sono concordanti.

L'inverso è ovvio. ⌋

Indicando con $\mathcal{S}(M) = S(M)/\sim$ le classi di concordanza di $S(M)$, e con $[M,\Gamma(M)]$ le classi di omotopia delle applicazioni $M \to \Gamma(M)$ (i cui livelli sono sezioni) dalla proposizione precedente segue

(4.3) COROLLARIO. -

Gli insiemi $\mathcal{S}(M)$ *e* $[M,\Gamma(M)]$ *sono in corrispondenza biunivoca, in simboli*

$$\mathcal{S}(M) \cong [M,\Gamma(M)]$$

(4.4) In particolare, se $M \cong S^m$ si ha

$$\mathcal{S}(S^m) \cong [S^m,\Gamma(M)] = \pi_m(\Gamma(M)).$$

Ora per $m \leq 3$, Munkres e Smale hanno dimostrato che tutti gli smussamenti di S^m sono concordanti, lo stesso ha dimostrato Cerf per $m = 4$. Quindi

$$\pi_m(\Gamma(M)) = 0 \qquad\qquad m \leq 4.$$