C A P I T O L O I

UNA CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER LO SMUSSAMENTO.

1. PREMESSE

(1.1) Sia M una PL-varietà di dimensione m e

$$K = \{\Delta_\alpha^r\} \qquad \alpha \in \Lambda \qquad 0 \leq r \leq m \qquad r = \dim \Delta_\alpha^r$$

il complesso simpliciale associato ad una triangolazione di M. Nel seguito identificheremo M con il suo schema combinatorio K che pensiamo realizzato in modo euclideo in $\mathbb{R}^N$ (anche se ciò non è necessario).

Sia inoltre Γ una struttura combinatoria riemanniana di classe C° su M: cioé ad ogni simplesso massimale (chiuso) $\sigma = \Delta_\alpha^m$ è associata una struttura riemanniana continua Γ_σ tale che

$$\Gamma_\sigma | \sigma \cap \tau = \Gamma_\tau | \sigma \cap \tau$$

per ogni coppia σ , τ di simplessi "vicini" (cioé tali che $\sigma \cap \tau$ sia un $(m-1)$-simplesso di K). Si dice anche che la struttura riemanniana è C°-compatibile.

Se $x \in |K| = M$ allora definiamo

$$\Lambda(x) = \{\alpha \in \Lambda \,|\, x \in \Delta_\alpha^r , \quad 0 \leq r \leq m\}$$

$$\Lambda'(x) = \{\alpha \in \Lambda \,|\, x \in \Delta_\alpha^r , \quad r = m\}$$

Ora Δ_α^r è immerso in $\mathbb{R}^N$, quindi ha una struttura differenziabile indotta da quella di $\mathbb{R}^N$; ha senso quindi considerare lo spazio tangente $T_x(\Delta_\alpha^r)$ a Δ_α^r nel punto x.

Consideriamo ora cammini:

$$\lambda : [0,1] \rightarrow \Delta^r_\alpha$$

di classe C^1 uscenti da x e definiamo

$$V^r_\alpha(x,M) = \{v \mid v = \dot{\lambda}(0) \in T_x(\Delta^r_\alpha)\ , \qquad \lambda(0) = x\}$$

La struttura riemanniana in M definisce una metrica piatta euclidea su $V^r(x,M)$, che è detto angolo solido tangente di Δ^r_α in x. Per definizione $\dim V^r_\alpha(x,M) = r$.

Indicata con $S^{r-1}_{\alpha,x}$ la sfera unitaria di centro l'origine di $T_x(\Delta^r_\alpha)$, consideriamo i "triangoli sferici"

$$\tau^{r-1}_\alpha(x,M) = V^r_\alpha(x,M) \cap S^{r-1}_{\alpha,x} \qquad\qquad \alpha \in \Lambda\ (x)\ .$$

Le relazioni d'incidenza tra i Δ^r_α $(\alpha \in \Lambda(x))$ determinano relazioni d'incidenza tra i $V^r_\alpha(x,M)$; queste determinano relazioni d'incidenza tra i triangoli sferici. Possiamo allora considerare i complessi seguenti (con le relazioni d'incidenza indotte):

$$V(x,M) = \{V^r_\alpha(x,M) \mid \alpha \in \Lambda(x),\ 1 \leq r \leq m\}$$

$$\Sigma(x,M) = \{\tau^{r-1}_\alpha \mid \alpha \in \Lambda(x)\ ,\quad 1 \leq r \leq m\}$$

Allora

$$\Sigma(x,M) \subset V(x,M).$$

Chiamiamo poi misura dell'angolo $V^m_\alpha(x,M)$ e la indichiamo $|V^m_\alpha(x,M)|_m$, la misura su $S^{m-1}_{\alpha,x}$ di $\tau^{m-1}_\alpha(x,M)$, che dipende dalla metrica nel vertice x.

La somma

$$\Omega(x,M) = \sum_{\alpha\in\Lambda'(x)} |V^m_\alpha(x,M)|_m$$

è detta densità di volume di Γ in x. La varietà triangolata M è detta a densità di volume costante se

$$\forall x \in M \qquad \Omega(x,M) = |S^{m-1}|_{m-1}$$

Si osservi che la densità di volume è certamente costante in ogni punto che non appartiene allo scheletro (m-2)-dimensionale.

(1.2) Esempio.-

Consideriamo la varietà bidimensionale tetraedro regolare con la metrica indotta da quella di $\mathbb{R}^3$. Esso non ha densità di volume costante; nei vertici si ha infatti

$$\Omega(x,M) = 3 \ \frac{\pi}{3} = \pi \neq 2\pi = |S^1|_1 \ .$$

Ma è possibile modificare la metrica data in modo che essa diventi a densità di volume costante. Nel caso particolare basta che la nuova metrica raddoppi gli angoli.

(1.3) Osservazione.-

In generale si vuole che un angolo α diventi β, cioè $\cos\alpha = a$ diventi $\cos\beta = b$.

Si deve trovare un nuovo prodotto scalare (h_{ij}) tale che

$$\frac{h_{ij} \ v^i w^j}{\sqrt{h_{ij} v^i v^j}\ \sqrt{h_{ij} w^i w^j}} = \frac{b}{a} \frac{g_{ij} \ v^i \ w^j}{\sqrt{g_{ij} \ v^i \ w^j}\ \sqrt{g_{ij} \ w^i w^j}} \qquad a \neq 0$$

Conoscendo i coefficienti (g_{ij}) ed applicando il principio d'identità dei polinomi si ricavano i coefficienti (h_{ij}).

In particolare se vogliamo $\beta = 2\alpha$ e quindi $\cos\beta = 2\cos^2\alpha - 1$ si ha $b = 2a^2-1$.

(1.4) Supponiamo d'ora in avanti che M sia a densità di volume costante. Sia $x_o \in M$ un punto di M che possiamo sempre supporre essere un vertice; infatti, se non lo è, è sempre possibile, tramite una suddivisione, far diventare x_o un vertice della decomposizione. E la metrica indotta sulla nuova suddivisione ha ancora densità di volume costante.

Inoltre poiché dobbiamo verificare proprietà locali, possiamo limitare le nostre considerazioni alla stella $St(x_o,M)$ che supponiamo abbia vertici $x_o,v_1,\dots,v_n$. Ora $St(x_o,M) \subset V(x_o,M)$ e ogni angolo $V^r_\alpha(x_o,M) \subset V(x_o,M)$ ha una struttura affine ben determinata; indichiamo con S_i il vettore $\overrightarrow{x_o v_i}$ $(i=1,2,\dots n)$.

Se $v_i \in \Delta^r_\alpha \subset St(x_o,St)$ si considera su Δ^r_α il campo $\bar{X}_i$ di vettori paralleli con X_i, che viene esteso a $V^r_\alpha(x_o,M)$ Δ^r_α. La metrica riemanniana Γ^r_α è determinata dai prodotti scalari

$$< \bar{X}_i, \bar{X}_j >_\xi \qquad \xi \in V^r_\alpha$$

(1.5) <u>LEMMA</u>. -

Con le stesse ipotesi e notazioni si costruisca su $V(x_o,M)$ *una metrica riemanniana* <u>*costante*</u> $\tilde{\Gamma}_{x_o}(M) = \{ \tilde{\Gamma}^r_\alpha \}$, $\alpha \in \Lambda(x_o)$, *mediante il seguente prodotto scalare*

$$< \bar{X}_i , \bar{X}_j >_\xi = <X_i , X_j>_{x_o} \qquad \xi \in V(x_o,M)$$

Allora $\tilde{\Gamma}_{x_o}(M)$ *ha densità di volume costante.*

<u>Dim</u>.-

La proprietà $|S^{m-1}|_{m-1} = \omega(\xi, V(x_o,M))$ per $\xi \in V(x_o,M)$ fa intervenire solo il prodotto scalare $\widetilde{< , >}_\xi$. Considerata la seguente omotopia

$$\widetilde{<\bar{X}_i,\bar{X}_j>}_{t,\xi} = <\bar{X}_i,\bar{X}_j>_{(1-t)x_o+t\xi} \qquad 0 \le t \le 1$$

abbiamo

$$\lim_{t\searrow o} \widetilde{< , >}_{t,\xi} = <\bar{X}_i,X_j>_{x_o} = \widetilde{< , >}_\xi .$$

Ora $\Omega(\xi,V(x_o,M))_{\widetilde{< , >}_{t,\xi}}$ è una funzione continua della variabile t, e quindi

$$\Omega(\xi,V(x_o,M))_{\widetilde{< , >}_\xi} = \Omega(\xi,V(x_o,M))_{\lim\limits_{t\searrow o} \widetilde{< , >}_{t,\xi}} =$$

$$= \lim_{t\searrow o} \Omega(\xi,V(x_o,M))_{< , >_{(1-t)x_o+t\xi}} = \lim_{t\searrow o} |S^{m-1}| = |S^{m-1}|$$

che prova il lemma. $\lrcorner$

(1.6) <u>LEMMA</u>. -

Sia $V(x_o,M)$ dotato della metrica riemanniana $\tilde{\Gamma}_{x_o}(M)$ e sia $\tilde{\tilde{\Gamma}}_{x_o}(\Sigma(x_o,M))$ la metrica indotta su $\Sigma(x_o,M)$. Allora $\tilde{\tilde{\Gamma}}_{x_o}(\Sigma(x_o,M))$ ha densità di volume costante.

<u>Dim</u>.-

Sia $\xi \in \Sigma(x_o,M)$ e $V^r_\alpha(x_o,M)$ un angolo solido che contiene ξ, allora

$$V^r_\alpha(\xi,V(x_o,M)) = V^{r-1}_\alpha(\xi,\tau^{r-1}_\alpha(x_o,M)) \oplus \mathbb{R}\,\xi$$

dove $\oplus$ denota la decomposizione ortogonale (si osservi che il raggio che contiene ξ è ortogonale alla sfera $S^{r-1}_{\alpha}(x_o,M)$).

Da questa decomposizione si deduce

$$V^m_{\alpha}(\xi,V(x_o,M)) = \frac{|V^{m-1}_{\alpha}(\xi,\ \Sigma(x_o,M))|}{|S^{m-2}|}\ |S^{m-1}|$$

Inoltre

$$\Omega(\xi,\Sigma(x_o,M)) = \sum_{\alpha\in\Lambda'(x_o)} |V^{m-1}_{\alpha}(\xi,\Sigma(x_o,M))| =$$

$$= \frac{|S^{m-2}|}{|S^{m-1}|} \sum_{\alpha\in\Lambda'(x_o)} |V^m_{\alpha}(\xi,V(x_o,M))| = \frac{|S^{m-2}|}{|S^{m-1}|} |S^{m-1}| = |S^{m-2}|$$

tenendo conto anche del lemma precedente. $\lrcorner$

2. <u>IL LEMMA PRINCIPALE</u> .

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente lemma fondamentale per il seguito, dove si è indicato con $\mathbb{E}^m$ lo spazio $\mathbb{R}^m$ dotato della metrica euclidea ordinaria.

(2.1) <u>LEMMA</u>. -

Sia M *una PL-varietà di dimensione* m *e* Γ *una metrica riemanniana su* M *di classe* C^0 *a densità di volume costante. Allora* $\forall x_o \in M$ *esiste un PL-omeomorfismo*

$$\Phi(x_o,M) : V(x_o,M) \to \mathbb{E}^m \qquad \Phi(x_o,M)(x_o) = 0$$

verificante le seguenti proprietà

(*i*) $\phi(x_o,M)|V_\alpha^r(x_o,M)$ *con* $\alpha \in \Lambda(x_o)$ *è un'isometria sull'immagine;*

(*ii*) $\phi(x_o,M)$ *è unico a meno di isometrie di* $\mathbb{E}^m$;

(*iii*) $\phi(x_o,M)$ *varia in modo continuo quando* x_o *percorre un suo intorno stellato.*

(2.2) Osservazioni. -

La proprietà (i) dice che se $\phi(x_o,M)$ esiste,allora esso si può costruire come segue. Si parte da un angolo solido tangente massimale $V_\alpha^m(x_o,M)$ che rappresentiamo isometricamente in $\mathbb{E}^m$ in modo tale che il vertice x_o di $V^m(x_o,M)$ vada in $0 \in \mathbb{E}^m$. Chiamiamo tale isometria $\phi_1(x_o,M)$. Consideriamo ora un altro angolo solido tangente massimale di $V(x_o,M)$ adiacente al primo, se $\phi(x_o,M)$ esiste, allora $\phi_1(x_o,M)$ può essere esteso al nuovo angolo in modo unico tale da verificare(i) e così via.

Dim. del lemma. -

Procediamo per induzione sulla dimensione m di M. Per $m = 2$ il teorema è chiaramente vero.Infatti per ipotesi è possibile "sviluppare" sul piano (in modo isometrico) le piramidi $V^2(x_o,M)$ e poi si procede come indicato nell'osservazione precedente. Supponiamo quindi vero il teorema per $m-1$ e dimostriamolo per m.

Supponiamo allora di aver costruito $\phi(x_o,M)$ soddisfacente le proprietà i) iv) e sia

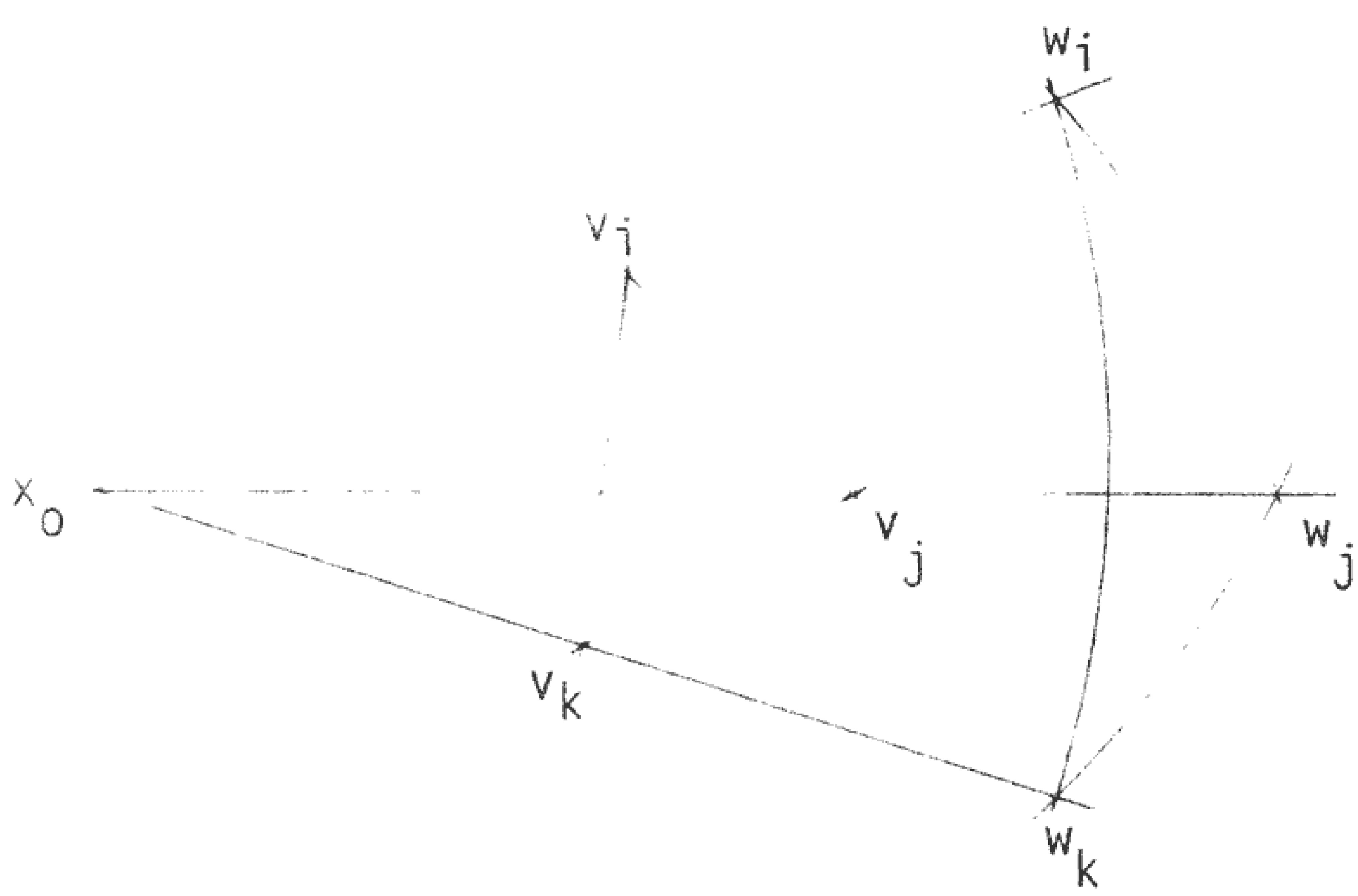
$$\Psi(x_o,M) : \Sigma(x_o,M) \to S^{m-1}$$

la restrizione di $\phi(x_o,M)$ a $\Sigma(x_o,M)$.

Indichiamo con i') - iv') le corrispondenti affermazioni di i)-iv) del teorema in cui abbiamo cambiato ϕ con Ψ, V con τ ed E con S. Allora $\Psi(x_o,M)$ soddisfa i')-iv').

Inversamente supponiamo di avere un'appl. $\Psi(x_o,M)$ che soddisfi i')-iv'). Allora esiste una ed una sola possibilità di costruire $\phi(x_o,M)$ in modo tale che soddisfi i)-iv) e inoltre valga $\Psi = \phi|\Sigma$.
Facciamo vedere ora come possa essere costruita $\Psi(x_o,M)$

Sia $w_i(1 \leq i \leq n)$ il vertice di $\Sigma(x_o,M)$ collineare con x_o e x_i dove $x_o, x_1,\dots,x_n$ sono i vertici della stella $St(x_o,M)$.



Per prima proveremo che si può costruire $\Psi(x_o,M)$ su $St(w_i,\Sigma)$, dopo faremo vedere che $\Psi(x_o,M)$ può essere estesa su tutto $\Sigma(x_o,M)$. Ora $\Sigma(x_o,M)$ è una varietà combinatoria di dimensione m-1, sulla quale per il lemma (1.6) si può considerare la metrica $\tilde{\tilde{\Gamma}}(\Sigma(x_o,M))$ di densità di volume costante. Possiamo allora applicare a $\Sigma(x_o,M)$ l'ipotesi induttiva. Dunque esiste un PL-omeomorfismo

$$\phi_o(w_i,\Sigma(x_o,M)) : V(w_i,\Sigma(x_o,M)) \to \mathbb{E}^{m-1}$$

che soddisfa i)-iv).

Sia $\bar{w}_i$ un punto di S^{m-1} e consideriamo il diagramma seguente

$$\begin{tikzcd}
V(w_i,\Sigma(x_o,M)) \arrow[r, "\phi_o(w_i,\Sigma(x_o,M)"] \arrow[d, "\exp_{w_i}"'] & E^{m-1} \arrow[d, "\exp_{\bar{w}_i}"] \\
St(w_i,\Sigma(x_o,M)) \arrow[r, "\Psi_{w_i}(x_o,M)"] & S^{m-1}
\end{tikzcd}$$

dove $\exp_{\bar{w}_i}$ è come al solito l'applicazione che associa ad un vettore tangente $v \in T_{\bar{w}_i}(S^{m-1}) \cong E^{m-1}$ il punto di S^{m-1} a distanza $\|v\|$ da $\bar{w}_i$ sulla geodetica uscente da $\bar{w}_i$ nella direzione v; analogamente per $\exp_{w_i}$ considerando la metrica $\tilde{\Gamma}(\Sigma(x_o,M)$. L'applicazione $\Psi_{w_i}(x_o,M)$ è quella che rende commutativo il diagramma.

Si osservi che ogni 1-simplesso $[w_i,w_j] \subset St(w_i,\Sigma(x_o,M))$ è un arco di cerchio massimo (essendo $\Sigma(x_o,M) \subset S^{m-1}$). L'appl. $\Psi_{w_i}(x_o,M)$ ha le seguenti proprietà:

1) porta ogni 1-simplesso $[w_i,w_j]$ in un arco congruente di cerchio massimo in S^{m-1},

2) conserva l'angolo tra ogni coppia di 1-simplessi $[w_i, w_j]$, $[w_i, w_k]$ appartenenti allo stesso 2-simplesso contenuto in $St(w_i, \Sigma(x_o, M))$;

3) è un omeomorfismo di un intorno di w_i sull'immagine. Inoltre l'applicazione $\Psi_{w_i}(x_o, M))$ soddisfa i')-ii').

Noi ora costruiremo $\Psi(x_o, M)$. Fissiamo un simplesso massimale $\tau^{m-1}_{\alpha_o} \in \Sigma(x_o, M)$ e scegliamo un'immersione isometrica:

$$\Psi_{\alpha_o}(x_o, M) : \tau^{m-1}_{\alpha_o} \to S^{m-1} .$$

Lo scopo è quello di estendere tale immersione a tutti i simplessi massimali di $\Sigma(x_o, M)$ e quindi a tutto $\Sigma(x_o, M)$.

Sia τ^{m-1}_{α} un qualsiasi simplesso massimale di $\Sigma(x_o, M)$. Esisterà allora almeno una catena (di simplessi massimali)

$$\gamma \equiv (\tau^{m-1}_{\alpha_o}, \tau^{m-1}_{\alpha_1}, \ldots, \tau^{m-1}_{\alpha_p} = \tau^{m-1}_{\alpha})$$

tale che $\forall i$, $0 \leq i \leq p-1$, $\dim(\tau^{m-1}_{\alpha_i} \cap \tau^{m-1}_{\alpha_{i+1}}) = m-2$.

Si può allora costruire induttivamente partendo da ψ_{α_o} un'applicazione continua

$$\Psi_\gamma : \bigcup_{i=0}^{p} \tau^{m-1}_{\alpha_i} \to S^{m-1}$$

con le seguenti proprietà

(a) $\Psi_\gamma \mid \tau^{m-1}_{\alpha_o} = \Psi_{\alpha_o}(x_o, M)$

(b) $\Psi_\gamma(\tau^{m-1}_{\alpha_i}) \cap \Psi_\gamma(\tau^{m-1}_{\alpha_{i+1}}) = \Psi_\gamma(\tau^{m-1}_{\alpha_i} \cap \tau^{m-1}_{\alpha_{i+1}})$

(c) $\Psi_\gamma|\tau^{m-1}_{\alpha_i}$ $\quad 0 \leq i \leq p$ è un'immersione isometrica.

La condizone (b) può richiedere che si debba ancora suddividere $\Sigma(x_o,M)$ che supponiamo si possa fare.

Poniamo allora per definizione

$$\Psi(x_o,M) \mid \tau^{m-1}_\alpha = \Psi_\gamma|\tau^{m-1}_\alpha \ .$$

Rimane da far vedere che tale definizione è ben posta, non dipende cioé dalla scelta della catena congiungente τ^{m-1}_α con $\tau^{m-1}_{\alpha_o}$, una volta scelta l'immersione iniziale $\Psi_{\alpha_o}(x_o,M)$.

Innanzitutto notiamo che per l'ipotesi induttiva, dato un qualsiasi simplesso $\tau \in \Sigma(x_o,M)$ (di dimensione arbitraria) e una immersione isometrica $\Psi_\sigma : \sigma \to S^{m-1}$ di un qualsiasi simplesso massimale $\sigma \in St(\tau,\Sigma(x_o,M))$, allora esiste un'unica immersione

che $\qquad\qquad \Psi : St(\tau,\Sigma(x_o,M)) \to S^{m-1}$

(i) estende Ψ_σ in modo continuo,

(ii) quando è ristretta ad un simplesso massimale di $St(\tau,\Sigma(x_o,M))$ è un'isometria.

Infatti Ψ è un'applicazione aperta sull'interno di $St(\tau,\Sigma(x_o,M))$.
Ritorniamo ora alla nostra questione.

Siano γ e γ' due catene congiungenti $\tau^{m-1}_{\alpha_o}$ e τ^{m-1}_α .

Poiché S^{m-1} è semplicemente connessa per $m \geq 3$, allora esiste una "omotopia" γ_j $(1 \leq j \leq N)$ che la collega, cioé una successione finita di catene γ_j

$$\gamma = \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N = \gamma'$$

tale che $\forall j$, $1 \leq j \leq N-1$, le catene γ_j e γ_{j+1} sono della forma

$$\gamma_j \equiv (a,b,c) \qquad\qquad \gamma_{j+1} \equiv (a,b',c)$$

dove a,b,b',c sono catene e b,b' sono contenute in $St(\tau,\Sigma(x_o,M))$ per un (arbitrario) simplesso $\tau \in \Sigma(x_o,M)$.

Da queste considerazioni segue che $\Psi(x_o,M)$ è continua.

Infatti siano τ_α^{m-1} e τ_β^{m-1} due arbitrari simplessi con $\dim(\tau_o^{m-1} \cap \tau_\beta^{m-1}) = m-2$ e sia γ una catena congiungente $\tau_{\alpha_o}^{m-1}$ con τ_α^{m-1}.

Allora $(\gamma, \tau_\beta^{m-1})$ è una catena congiungente $\tau_{\alpha_o}^{m-1}$ con τ_β^{m-1} e quindi può essere usata per definire $\Psi(x_o,M)$ su entrambi i simplessi τ_α^{m-1} e τ_β^{m-1} ; dalla definizione di queste restrizioni segue che $\Psi(x_o,M)$ è continua su $\tau_\alpha^{m-1} \cap \tau_\beta^{m-1}$ e quindi è continua.

Come si diceva prima, l'ipotesi induttiva implica che $\Psi(x_o,M)$ è aperta. Inoltre $\Psi(x_o,M)\ (\Sigma(x_o,M))$ è chiuso ed aperto in S^{m-1} ma S^{m-1} è connesso per cui vale

$$\Psi(x_o,M)\ (\Sigma(x_o,M)) = S^{m-1}$$

Poiché $\Psi(x_o,M)$ è una isometria locale si ha la diseguaglianza stretta

$$\mathrm{Mis}\left[\Psi(x_o,M)(\Sigma(x_o,M))\right] < \sum_{\tau_{\alpha_i}^{m-1} \in \Sigma(x_o,M)} \mathrm{Mis}\left[\Psi(x_o,M)(\tau_{\alpha_i}^{m-1})\right]$$

se e solo se $\Psi(x_o,M)$ è non iniettiva. Ora il primo termine della diseguaglianza è $|S^{m-1}|$ poiché $\Psi(x_o,M)$ è suriettiva; ma anche il secondo termine della diseguaglianza è $|S^{m-1}|$ per l'ipotesi della metrica con densità di volume costante, per cui si conclude che $\Psi(x_o,M)$ è anche iniettiva.

Si conclude allora che $\Psi(x_o,M)$ è l'applicazione richiesta. $\square$

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema che dà una condizione analitica necessaria e sufficiente per lo smussamento di varietà PL.

(2.3) TEOREMA DELLO SMUSSAMENTO. -

Se Γ è una metrica riemanniana di classe C^0 con densità di volume costante sulla PL-varietà M, allora Γ definisce una struttura differenziabile di classe C^1 su M, compatibile con la struttura combinatoria.

Dim.-

Sia $V(M) = \bigcup_{x \in M} V(x,M)$ (unione disgiunta) con la topologia naturale e consideriamo il diagramma

$$M \xrightarrow{s} V(M) \xrightarrow{p} M$$

dove le applicazioni sono così definite

$$s(x) = 0 \in V(x,M) \qquad\qquad p(V(x,M)) = x$$

Si vede subito che esso individua un microfibrato (1) equivalente al microfibrato tangente di M

(1) Cfr. §3 dell'Appendice.

$$M \xrightarrow{\Delta} M \times M \xrightarrow{pr_1} M$$

Basta far vedere che un intorno della sezione nulla di $V(M)$ è un intorno anche della sezione nulla di $M \times M$.

Si considerino infatti $M \times M$, con una triangolazione indotta dalla reticolazione di prodotto topologico, e $St((x,x),M\times M)$ per $x \in M$. Ovviamente $St(x,x),M\times M)$ è un intorno di (x,x) in M, ma anche un intorno di $(x,0)$ in $V(M)$ come si può vedere facilmente.

Infatti l'affermazione (i) del lemma ci permette di introdurre una struttura vettoriale sulla fibra di $V(M)$ e la (ii) ci assicura che tale struttura è ben definita. La proprietà (iii) esprime la banalità locale. Quindi il microfibrato tangente ammette una struttura vettoriale e per un teorema di Milnor [(2)] si conclude che M ammette una struttura differenziabile di classe C^1 compatibile con la struttura combinatoria.⌋

(2.4) <u>Osservazioni</u>.-

Da quanto procede è chiaro che cosa debba intendersi per <u>spazio tangente</u> ad M in un suo punto x_o. Fissiamo la nostra attenzione al caso in cui x_o sia un vertice di M, gli altri casi essendo contenuti in questo dopo un'opportuna reticolazione.

Indichiamo con E^r_α lo spazio vettoriale di dimensione r che contiene V^r_α e limitiamoci al caso $r = m$, ponendo per semplicità $V^m_\alpha = V_\alpha$.

Sia

$$\phi(x_o,M) : V(x_o,M) \longrightarrow E^m$$

l'omeomorfismo del lemma (2.1) e

---

(2) Cfr. l'Appendice (3.7)

$$\phi_\alpha = \phi|_\alpha \; : V_\alpha \to \phi(V_\alpha) = W_\alpha \subset E^m$$

l'isometria indotta. Ora ϕ_α si estende ad un'isometria

$$\rho_\alpha : E_\alpha \to E.$$

Sia v_α un vettore (uscente da x_0 e) appartenente a V_α. Allora $\phi_\alpha(v_\alpha) = w_\alpha \in W_\alpha$ e chiamiamo

$$v_\beta = \rho_\beta^{-1}(w_\alpha)$$

che risulta unico.

Infatti se $\rho : E \to E$ è un'isometria risulta commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & E & \\
 & E & \\
E_\alpha \arrow[ur, "\rho_\alpha"] \arrow[uur, "\bar\rho_\alpha"] \arrow[rr, "\rho_{\alpha\beta}"'] & & E_\beta \arrow[ul, "\rho_\beta"'] \arrow[uul, "\bar\rho_\beta"']
\end{tikzcd}$$

e quindi

$$\rho_{\alpha\beta} = \rho_\beta^{-1} \circ \rho_\alpha = \bar\rho_{\alpha\beta}$$

essendo

$$v_\beta = \rho_{\alpha\beta}(v_\alpha)$$

L'insieme $\{v_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda(x_0)}$ di tutti i vettori corrispondenti nel modo sopra detto costituisce per <u>definizione</u> lo <u>spazio tangente</u> in x_0 alla PL-varietà M.

Concludiamo dicendo che cosa debba intendersi per <u>funzione differenziabile</u> $f : M \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in M$. Sia $f : M \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$f_\alpha = f|V_\alpha$ sia differenziabile per ogni α. Questo ha senso poiché su $V_\alpha \subset E_\alpha$ esiste una struttura differenziabile canonica. Diremo che f è differenziabile di x_0 se

$$v_\alpha f_\alpha = v_\beta f_\beta = v_\gamma f_\gamma = \dots\dots\dots$$

dove $\qquad v_\lambda = \rho_{\mu\lambda}(v_\mu)$ è considerato come derivazione su V .

CAPITOLO II

PROBLEMI DI SMUSSAMENTO. -

Alcuni Lemmi.-

(1.1) Sia

$$\phi : (\mathbb{R}^m,0) \rightarrow (\mathbb{E}^m,0)$$

un PL-omeomorfismo. Allora esiste una triangolazione D di $\mathbb{R}^m$ e una T di $\mathbb{E}^m$ tale che ϕ sia simpliciale, si può inoltre modificare D e T in modo tale che le origini siano vertici delle due triangolazioni.

Consideriamo ora $St(0,D)$ e prolunghiamo radialmente da 0 tutti i simplessi della stella che contengono 0. Analogamente per $St(0,T)$. Si ottiene così una decomposizione $\bar{D}$ di $\mathbb{R}^m$ (risp. $\bar{T}$ di $\mathbb{E}^m$) mediante "coni simpliciali" con vertici in 0.

L'applicazione $\phi \mid St(0,D)$ si estende linearmente, in modo unico, a tutto $\mathbb{R}^n$ e costituisce ancora un PL-omeomorfismo, che indichiamo $\bar{\phi}$.

Si vede facilmente che vale

(1.2) LEMMA.-

Siano $\phi_1,\phi_2 : (\mathbb{R}^m,0) \rightarrow (\mathbb{E}^m,0)$ *due PL-omeomorfismi. Allora*

$$\bar{\phi}_1 = \bar{\phi}_2 \Longleftrightarrow germ_0\, \phi_1 = germ_0\, \phi_2$$