Il viceversa: se $J_2 \in F$ e $J_1 \in F$, $J_1 \cap J_2 \in F$.

4. L'ultrapotenza di $\mathbb{R}$ rispetto ad F.

Un elemento a di $\mathbb{R}^J$ si dice "interno" se esiste un numero naturale $n \geq 0$ t.c. $a \in_F {}^*R_n$. Sono quindi elementi interni di $\mathbb{R}^J$ quelle applicazioni $(a(i))_{i\in J}$ che assumono valore in qualche R_n. Es. $a(i) = i \in R_o$. Gli elementi a di $\mathbb{R}$ riguardati come elementi di $\mathbb{R}^J$, cioé le funzioni di costante valore a, sono elementi interni, poiché $a \in R_n \iff {}^*a \in_F {}^*R_n$: si dicono "standard". Un elemento a di $\mathbb{R}^J$ è, quindi, standard quando $\exists\, b \in \mathbb{R}$ t.c. $a = {}^*b$. Tutti gli altri elementi di $\mathbb{R}^J$, cioé quelli che non sono interni, si dicono "esterni". L'unione di tutti gli elementi interni di $\mathbb{R}^J$ si dice l'ultrapotenza di $\mathbb{R}$ rispetto a F e si indica con simbolo ${}^*\mathbb{R}$, cioé:

$$ {}^*\mathbb{R} = \bigcup_{n=o}^{\infty} {}^*R_n $$

Si osservi che gli elementi interni di $\mathbb{R}^J$ sono gli elementi degli insiemi standard ${}^*R_n$ (${}^*R_n$ è interno, in quanto ${}^*R_n \in {}^*R_{n+1}$ ed è standard poiché $R_n \in \mathbb{R}$).

Gli elementi interni si possono caratterizzare nel seguente modo:

Teorema: Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

1) a, elemento di $\mathbb{R}^J$, è interno.
2) a è elemento di un'entità standard.

Dim. 1) ==> 2) $a \in_F {}^*R_n$ ed ${}^*R_n$ è standard

2) ==> 1) $a \in_F {}^*b$ con $b \in \mathbb{R}$; $b \in R_n$ per qualche n, cioé $b \in \mathcal{S}(R_o \cup R_{n-1})$, $b \subset R_o \cup R_{n-1}$, ${}^*b \subset {}^*R_o \cup {}^*R_{n-1}$ e quindi $a \in_F {}^*R_o \cup {}^*R_{n-1}$ cioé a è interno.

Teorema.- Se $a \in_F b \in_F {}^*R_n$ ($n \geq 1$), a è interno (cioé gli elementi di entità interne sono interni): $b \in_F {}^*R_n \iff J_1 = \{i \in J : b(i) \in R_n\} = \{i \in J : b(i) \subset R_o \cup R_{n-1}\} \in F$

e $a \in_F b \Longleftrightarrow J_2 = \{i \in J : a(i) \in b(i))\} \in F$: $\forall i \in J_1 \cap J_2 \in F : a(i) \in R_0 \cup R_{n-1}$,

cioé $a \in_F {}^*R_0 \cup {}^*R_{n-1}$.

5.- L'immersione $a \to {}^*a$ di $\mathbb{R}$ in ${}^*\mathbb{R}$ è propria se F è ultrafiltro δ-incompleto.

In questo paragrafo si dimostra che, nell'ipotesi che F sia δ-incompleto, vi sono elementi interni di $\mathbb{R}^J$ che non sono standard, ciò vuol dire che $\mathbb{R}$ è propriamente immerso in ${}^*\mathbb{R}$.

1° Teorema fondamentale.- Se F è δ-incompleto (6) ed $a \in \mathbb{R}$ è un'entità che ha infiniti elementi allora esiste $b \in {}^*a$ che non è standard. (b è interno perché elemento di entità standard).

Dim. - Poiché F è δ-incompleto, esiste una partizione numerabile $\{I_1, I_2, \ldots I_n$ di J tale che, $\forall n \in N : I_n \notin F$ (7).

(6) F si dice δ-incompleto se esiste una successione $F_n \in F$ t.c. $\bigcap_{u=1}^{\infty} F_n \notin F$. Si dice δ-completo quando $\forall F_n \in F$ (F_n successione) : $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \in F$, cioé quando la 2ª proprietà di filtro vale per un numero infinito di $F_n \in F$. Si ricorda che non si conosce se esistono ultrafiltri δ-completi liberi, mentre ogni δ-incompleto è libero, cioé $\bigcap(G:G \in F) = \emptyset$.

(7) Le seguenti proposizioni sono equivalenti: a) F è δ-incompleto.
b) $\exists\{I_1, I_2, \ldots, I_{n-1} \ldots\}$ di J tale che $I_n \notin F, \forall n$.

Dim.- Si ricorda che F è δ-completo $\Longleftrightarrow$ μ_F è una misura (cfr. [1])

a $\Longleftrightarrow$ b. Poiché F è δ-incompleto μ_F non è una misura, sicché non vale la completa additività, cioé $\exists F_n$, successione di parti di J, con $F_i \cap F_j = \emptyset \; i \neq j$, tale che $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n)$, cioé il 1° membro deve essere 1, il 2° membro 0, il che vuol dire $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in F$ ed $F_n \notin F, \forall n$. Posto $F_0 = (\bigcup_{i=1}^{\infty} F_n)'$ si ha che $F_0 \notin F$ ed $\{F_0, F_1, \ldots, F_n, \ldots\}$ è una partizione numerabile di J ed $F_n \notin F$ $\forall n = 0, 1, \ldots$;
b $\Longrightarrow$ a. Se $I_n \notin F$, $I_n' = J - I_n \in F$, inoltre $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n' = J - \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset \notin F$ essendo $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = J$, la successione degli I_n' è quella richiesta.