## 2. Alcune proprietà dell'immersione $a \to {}^*a$ di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^J$.

(i) ${}^*\phi$ è vuoto. Infatti, qualunque sia $a$, elemento di $\mathbb{R}^J$: $\{i \in J : x(i) \in \phi\} = \phi \notin F$, ciò vuol dire che $\sim (\exists x \in_F {}^*\phi)$.

(ii) $\forall a,b \in \mathbb{R} : a \subset b \Longleftrightarrow {}^*a \subset {}^*b$; $\Longrightarrow$: si deve far vedere che $z \in_F {}^*a \Longrightarrow z \in_F {}^*b$ nell'ipotesi che $(x \in a) \Longrightarrow (x \in b)$ : $z \in_F {}^*a \Longleftrightarrow J_1 = \{i \in J : z(i) \in a\} \in F \Rightarrow J_1 \subset J_2 = \{i \in J : z(i) \in b\} \in F$ cioé $z \in_F {}^*b$.

$\Longleftarrow$. E' ovvio; si deve far vedere che $x \in a \Longrightarrow x \in b$ nell'ipotesi che: $z \in_F {}^*a \Longrightarrow z \in_F {}^*b$: se $x \in a$ si ha che ${}^*x \in_F {}^*a$ e per l'ipotesi ${}^*x \in_F {}^*b \Longleftrightarrow x \in b$ poiché $x$ e $b \in \mathbb{R}$.

(iii) $\forall a \in \mathbb{R} : {}^*\{a\} = \{{}^*a\}$ ; $x \in_F {}^*\{a\} \Longleftrightarrow \{i \in J : x(i) \in \{a\}\} \in F \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \{i \in J : x(i) = a\} \in F$
$\Longleftrightarrow x \in_F \{{}^*a\}$ (si tenga presente per il 1° passaggio che ${}^*\{a\}(i) = \{a\}\ \forall i \in J$).

(iv) Se $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$:

${}^*(\bigcup_{i=1}^n a_i) = \bigcup_{i=1}^n {}^*a_i$; basta far vedere che ${}^*(a_1 \cup a_2) = {}^*a_1 \cup {}^*a_2$. Infatti:
$x \in_F {}^*(a_1 \cup a_2) \Longleftrightarrow J_1 = \{i \in J : x(i) \in a_1 \cup a_2\} \in F$ sicché
$J_1 = \{i \in J : x(i) \in a_1\} \cup \{i \in J : x(i) \in a_2\} \in F$, ciò implica [4] che almeno uno di tali insiemi $J_2$, $J_3$ appartiene ad $F$ ; si ha quindi $x \in_F {}^*a_1$ oppure $x \in_F {}^*a_2$, cioé $x \in_F {}^*a_1 \cup {}^*a_2$. Viceversa se $J_2 \in F$ o $J_3 \in F$, $J_1 = J_2 \cup J_3 \in F$.

${}^*(\bigcap_{i=a}^n a_i) = \bigcap_{i=1}^n {}^*a_i$; basta far vedere che ${}^*(a_1 \cap a_2) = {}^*a_1 \cap {}^*a_2$. Infatti:

$x \in_F {}^*(a_1 \cap a_2) \Longleftrightarrow J_1 = \{i \in J : x(i) \in a_1 \cap a_2\} \in F$ sicché
$J_1 = \{i \in J : x(i) \in a_1\} \cap \{i \in J : x(i) \in a_2\} = J_2 \cap J_3 \in F_1$, ciò implica $J_2 \in F$ e $J_3 \in F$, si ha quindi $x \in_F {}^*a_1$ e $x \in_F {}^*a_2$, cioé

---

[4] Se $\bigcup_{i=1}^n F_i \in F$ $(F_i \subset F, i=1,2,\ldots,)$ allora $F_i \in F$ per almeno un indice $i$: infatti se nessun $F_i \in F$, tutti gli $F_i'$ (complementari di $F_i$) $\in F$ e quindi $\bigcap F_i' \in F$ e ciò implica $\bigcup F_i = J = \bigcap F_i' \notin F$ contro l'ipotesi.

$x \in_F {}^*a_1 \cap {}^*a_2$. Viceversa se $J_2 \in F$ e $J_3 \in F$, $J_1 = J_2 \cap J_3 \in F$.

${}^*\{a_1,\dots,a_n\} = \{{}^*a_1,\dots,{}^*a_n\}$ ; ${}^*\{a_1,a_2\} = {}^*(\{a_1\} \cup \{a_2\}) = {}^*\{a_1\} \cup {}^*\{a_2\} =$

$\{{}^*a_1\} \cup \{{}^*a_2\} = \{{}^*a_1, {}^*a_2\}$ ; segue che ${}^*(a_1,\dots,a_n) = ({}^*a_1,\dots,{}^*a_n)$.

${}^*(a_1 \times \dots \times a_n) = {}^*a_1 \times \dots \times {}^*a_n$ ; $z \in_F {}^*(a_1 \times a_2) \Longleftrightarrow J_1 = \{i \in J : z(i) \in a_1 \times a_2\} \in F \Longleftrightarrow$

$\{i \in J : \exists (x(i),y(i)) = z(i) \in a_1 \times a_2\} \in F$. Sia $\bar{x}$ d $R^J$ t.c. $\bar{x}(i) = x(i)$ $\forall i \in J_1$,

si ha che $J_1 \subset J_2 = \{i \in J : \bar{x}(i) \in a_1\}$, cioé $\bar{x} \in_F {}^*a_1$; analogamente, sia

$\bar{y} \in_F {}^*a_2$ si ha $(\bar{x},\bar{y}) \in_F {}^*a_1 \times {}^*a_2$ ed $(\bar{x},\bar{y}) =_F z$.

(v) $\forall a,b \in R$ : ${}^*(a-b) = {}^*a - {}^*b$; $x \in_F {}^*(a-b) \Longleftrightarrow J_1 = \{i \in J : x(i) \in a-b\}$[5] $\in F \Longrightarrow$

$J_1 \subset J_2 = \{i \in J : x(i) \in a\} \in F$ e $J_1 \subset J_3 = \{i \in J : x(i) \notin b\} \in F$ cioé

$x \in_F {}^*a - {}^*b$ . Viceversa se $J_2$ e $J_3 \in F$, $J_2 \cap J_3 = \{i : x(i) \in a - b\} \in F$

cioé $x \in_F {}^*(a - b)$.

(vi) Se $b \in R$, $b$ relazione binaria : ${}^*(\mathrm{dom}\, b) = \mathrm{dom}\, {}^*b$, ${}^*(\mathrm{ran}\, b) = \mathrm{ran}\, {}^*b$ e $\forall a \in R$:

${}^*(b(a)) = {}^*\{y : (\exists x)(x \in a \wedge (x,y) \in b\} = {}^*b({}^*a) = \{y : (\exists x)(x \in {}^*a \wedge (x,y) \in {}^*b\}$;

$x \in_F {}^*(\mathrm{dom}\, b) \Longleftrightarrow J_1 = \{i \in J : x(i) \in \mathrm{dom}\, b\} \in F$ , vuol dire che $\forall i \in J_1$ $\exists y(i)$

tale che $(x(i),y(i)) \in b \Longleftrightarrow (x,y) \in_F {}^*b \Longleftrightarrow x \in_F \mathrm{dom}\, {}^*b$. Il viceversa è ovvio.

Analogo discorso per il rango.

$z \in_F {}^*\{y : (\exists x)(x \in a \wedge (x,y) \in b\} \Longleftrightarrow J_1 = \{i \in J : z(i) \in \{y : (\exists x)(x \in a \wedge (x,y) \in b\}\} \in F$

$\Longleftrightarrow \{i \in J : (\exists x(i) \in a \wedge (x(i), z(i)) \in b\} = J_1$. Sia $\bar{x}$ di $R^J$ t.c. $\bar{x}(i) = x(i)$

$\forall i \in J_1$: $(\bar{x},z) \in_F {}^*b$ e $\bar{x} \in_F {}^*a$ poiché $J_2 = \{i \in J : \bar{x}(i) \in a\} \supset J_1$.

---

[5] $a-b \subset a \in R_n \Longrightarrow a - b \in R_n$

Il viceversa: se $J_2 \in F$ e $J_1 \in F$, $J_1 \cap J_2 \in F$.

4. L'ultrapotenza di $\mathbb{R}$ rispetto ad $F$.

Un elemento $a$ di $\mathbb{R}^J$ si dice "interno" se esiste un numero naturale $n \geq 0$ t.c. $a \in_F {}^*R_n$. Sono quindi elementi interni di $\mathbb{R}^J$ quelle applicazioni $(a(i))_{i \in J}$ che assumono valore in qualche $R_n$. Es. $a(i) = i \in R_o$. Gli elementi $a$ di $\mathbb{R}$ riguardati come elementi di $\mathbb{R}^J$, cioé le funzioni di costante valore $a$, sono elementi interni, poiché $a \in R_n \iff {}^*a \in_F {}^*R_n$: si dicono "standard". Un elemento $a$ di $\mathbb{R}^J$ è, quindi, standard quando $\exists\, b \in \mathbb{R}$ t.c. $a = {}^*b$. Tutti gli altri elementi di $\mathbb{R}^J$, cioé quelli che non sono interni, si dicono "esterni". L'unione di tutti gli elementi interni di $\mathbb{R}^J$ si dice l'ultrapotenza di $\mathbb{R}$ rispetto a $F$ e si indica con simbolo ${}^*\mathbb{R}$, cioé:

$$ {}^*\mathbb{R} = \bigcup_{n=o}^{\infty} {}^*R_n $$

Si osservi che gli elementi interni di $\mathbb{R}^J$ sono gli elementi degli insiemi standard ${}^*R_n$ (${}^*R_n$ è interno, in quanto ${}^*R_n \in {}^*R_{n+1}$ ed è standard poiché $R_n \in \mathbb{R}$).

Gli elementi interni si possono caratterizzare nel seguente modo:

Teorema: Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

1) $a$, elemento di $\mathbb{R}^J$, è interno.
2) $a$ è elemento di un'entità standard.

Dim. 1) ==> 2) $a \in_F {}^*R_n$ ed ${}^*R_n$ è standard

2) ==> 1) $a \in_F {}^*b$ con $b \in \mathbb{R}$; $b \in R_n$ per qualche $n$, cioé $b \in \mathcal{S}(R_o \cup R_{n-1})$, $b \subset R_o \cup R_{n-1}$, ${}^*b \subset {}^*R_o \cup {}^*R_{n-1}$ e quindi $a \in_F {}^*R_o \cup {}^*R_{n-1}$ cioé $a$ è interno.

Teorema.- Se $a \in_F b \in_F {}^*R_n$ ($n \geq 1$), $a$ è interno (cioé gli elementi di entità interne sono interni); $b \in_F {}^*R_n \iff J_1 = \{i \in J : b(i) \in R_n\} = \{i \in J : b(i) \subset R_o \cup R_{n-1}\} \in F$