luzione dello stesso pdr.

§ 3. Alcune condizioni sufficienti per l'unicità della soluzione del pdr.

Sussiste il seguente

Teorema 2.- *Se f è costante a tratti in $\bar{\Omega}$, allora il pdr ammette una unica soluzione in $\bar{\Omega}$ verificante un assegnato dato iniziale ammissibile (s,b).*

Dimostrazione.-

E' sufficiente provare il teorema per $f(t) = c$ in $\bar{\Omega}$.
Per $c = 0$ l'unicità è ovvia; sia allora $c \neq 0$. Se u è soluzione del pdr verificante le condizioni $u(0) = s$, $\dot{u}^{+}(0) = b$, si ha (dalla (iv))

$$(6) \qquad \frac{1}{2}\left[\dot{u}^{\pm}(t)\right]^2 = \frac{1}{2} b^2 - s\,c + c\,u(t) \qquad \text{per } t \in \bar{\Omega}.$$

Da (6) ricaviamo, per $u(t) = 0$,

$$(7) \qquad \left[\dot{u}^{\pm}(t)\right]^2 = b^2 - 2\,s\,c .$$

La tesi consegue, allora, in virtù di noti teoremi di unicità locale, dalle seguenti osservazioni.

1. Se è $b^2 - 2\,s\,c > 0$, tutti gli eventuali zeri di u sono isolati; inoltre se τ_1 e τ_2 sono due zeri consecutivi $(\tau_2 > \tau_1)$ si ha:

$$(8) \qquad c(\tau_2 - \tau_1) = 2\sqrt{b^2 - 2\,s\,c} \quad ;$$

da cui

$$(9) \qquad \tau_2 - \tau_1 = \frac{2}{c}\sqrt{b^2 - 2\,s\,c} .$$

Da (8) segue che

(c) per $c < 0$ u ammette al più uno zero,

(d) per $c > 0$ gli zeri consecutivi di u sono equidistanti,

per (9) (e quindi sono in numero finito).

2. Se è $b^2 - 2\,s\,c = 0$ si ha

(e) $c > 0$: $u(t) \geq 0$ e quindi $u(t) = 0$ (per (6));

(f) $c < 0$: u ammette al più uno zero.

Per provare che (f) è vera, basta tenere conto che si ha: u ha solo zeri isolati e non può avere più di uno zero isolato; che u non possa avere più di uno zero isolato segue da (8); che abbia solo zeri isolati segue dal fatto che negli zeri τ di u è $\dot{u}(\tau) = 0$ ed $f(\tau) < 0$.

Evidentemente u non ha zeri se $b^2 - 2\,s\,c < 0$. ■

La dimostrazione del teorema 2 suggerisce il seguente risultato.

Teorema 3.- *Se u è una soluzione del pdr, in $\bar{\Omega}$, con dato $f \in L^1(\bar{\Omega};R)$ e condizioni iniziali ammissibili (s,b) ed ha un numero finito di zeri, allora u è l'unica soluzione del pdr in $\bar{\Omega}$ con dato f e condizioni iniziali ammissibili (s,b).*

Dimostrazione.-

Supponiamo che u_1 sia una soluzione del pdr, in $\bar{\Omega}$, con lo stesso dato f e le stesse condizioni iniziali ammissibili (s,b). E' evidente che u ed u_1 possono non coincidere solo a partire da uno zero τ di u per cui $\dot{u}^-(\tau) = 0$.

Detto τ_1 lo zero di u successivo a τ si ha:

$\ddot{u}_1(t) \leq f(t) = \ddot{u}(t) \qquad t \in [\tau, \tau_1]$.

Ne segue $\quad u_1(t) \leq u(t) < 0 \quad$ per $\quad t \in]\tau, \tau_1[\quad$ e

quindi $\quad u_1(t) = u(t)$. ■

Sussiste inoltre il seguente

Teorema 4.- *Se* u *è soluzione del pdr in* $\bar{\Omega}$ *con* $f \in L^1(\bar{\Omega};R)$ *e verifica la condizione "esiste* $p > 0$ *tale che* $[\dot{u}^{\pm}(\tau)]^2 \geq p$, *per* $u(\tau) = 0$", *allora* u *è l'unica soluzione del pdr.*

Dimostrazione.-

La condizione posta assicura che gli eventuali zeri di u sono isolati e per la compattezza di $[0,T]$ essi sono in numero finito. Inoltre, per $f \in C^\circ(\bar{\Omega};R)$, $f > 0$ (3), considerando due zeri isolati consecutivi τ_1, τ_2, si ha

$$\ddot{u}(\xi)(\tau_2-\tau_1) = f(\xi)(\tau_2-\tau_1) = \dot{u}^-(\tau_2) - \dot{u}^+(\tau_1) =$$

$$= |\dot{u}^-(\tau_2)| + |\dot{u}^-(\tau_1)| \geq 2\sqrt{p} > 0.$$

Da ciò

$$(10) \qquad \tau_2 - \tau_1 \geq \frac{2\sqrt{p}}{f(\xi)} \geq \frac{2\sqrt{p}}{M}$$

dove $M = \max_{x \in \bar{\Omega}} f(x)$. ■

(3) Osserviamo esplicitamente che se $f \leq 0$, c'è unicità per la soluzione del pdr, essendoci al più uno zero per u.

Concludiamo col

Teorema 5.- *Sia f assolutamente continua in $\bar{\Omega}$ con $L^1(\bar{\Omega}) \ni \dot{f} \geq 0$;*

(g) *Se $f(0) > 0$, per ogni condizione iniziale ammissibile $(s,b) \neq (0,0)$, esiste una unica soluzione del pdr in $\bar{\Omega}$.*

(h) *Per ogni condizione iniziale ammissibile (s,b) verificante la disuguaglianza $b^2 - 2s\,f(0) > 0$, il pdr ammette una unica soluzione in $\bar{\Omega}$.*

Dimostrazione.-

Dalla conservazione dell'energia segue

$$\frac{1}{2}\left[\dot{u}^{\pm}(\tau)\right]^2 \geq \frac{1}{2}b^2 - s\,f(0) \qquad \text{per} \quad u(\tau) = 0. \tag{11}$$

(g) Dalla (11) segue l'unicità in virtù del teorema 4.

(h) Intanto è $(s,b) \neq (0,0)$. Se $f(0) \geq 0$ si ricade nel caso (g); se $f(0) < 0$, si ha che per $f(t) \leq 0$ u ha al più uno zero e per $f(t)>0$ valgono le considerazioni di (g). ■

Accettato per la pubblicazione nella rivista "Rendiconti di Matematica" Fasc.IV Vol.13 Serie VI (1980), Roma.