Probabilità non σ-additive e analisi non-standard

di *Alberto* GIANNONE (Lecce)

SUMMARY.- *We show how two-valued finitely additive probability measures on a set* J *allow the study of nonstandard models. This is accomplished via a set* $^*(\hat{R})$ *of functions from* J *to* $\hat{R}$ *(where* $\hat{R}$ *is a superstructure built on* R *by considering inductively the power set), i.e. a property is true in* $^*(\hat{R})$ *iff it holds almost certainly in* J. *Some applications to a few examples in classical analysis are also given.*

1.- Le misure di probablità non σ-additive sono state recentemente oggetto di numerose ricerche (cfr., ad es., [1], [2], [3], [4], [6], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15]), volte a sviluppare le idee sostenute da B. de Finetti nel corso dell'ultimo mezzo secolo (i suoi primi lavori sull'argomento risalgono infatti al 1928) e riportate in [5]. Generalmente, quando si considerano probabilità "*finitamente additive*", si intende "non *necessariamente* σ-additive", nel senso che l'assioma di σ-additività non viene imposto *a priori*, ma si può riguardare come una proprietà ulteriore della probabilità, valida solo in casi particolari.

Nei lavori sopra citati l'accento è invece posto sugli aspetti peculiari di una misura di probabilità per la quale la σ-additività *non* sussista.

E' di questo tipo anche una misura di probabilità suscettibile di assumere, sui sottoinsiemi di un insieme J, solo i due valori 0 e 1 (senza ridursi al caso banale di una misura *concentrata* in un punto): ovviamente, occorre assumere che k = card J sia quello che si dice un cardinale "*non misurabile*" (ma con ciò si rimane in un ambito assai generale, se si tiene presente che un cardinale misurabile k è necessariamente inaccessibile ed è preceduto da altri k cardinali inaccessibili).

Chiameremo *massa*[1] una misura di probabilità μ non σ-additiva definita su un insieme J, e tale che $\mu(E) = 0$ oppure $\mu(E) = 1$ per *ogni* $E \subseteq J$: com'è noto, l'insieme

$$\mathcal{U} = \{E \subseteq J : \mu(E) = 1\}$$

è un *ultrafiltro* in J, ma nel seguito non dovremo fare uso di questa osservazione. Notiamo anche che la μ *non* può essere concentrata in un punto (cioè l'ultrafiltro $\mathcal{U}$ è *libero*).

In questo lavoro (che si colloca nella linea di [7], proponendosi di rendere accessibili alcuni aspetti dei metodi non standard, anche prescindendo da conoscenze specifiche di logica matematica) costruiamo una struttura di ordine superiore ("non standard") attraverso il concetto di proprietà *quasi certa* (cioè "vera" con probabilità 1) su un insieme J di indici su cui è assegnata una massa μ: il sostegno di questa struttura è costituito dalle applicazioni definite su J e a valori in un insieme costruito a partire dall'insieme R dei reali mediante successive operazioni di passaggio all'insieme potenza.

In tal modo i risultati di [7], in cui ci si limitava allo studio di un modello non standard del primo ordine, vengono notevolmente ampliati, e possono essere applicati (come mostreremo con qualche esempio nella parte finale del lavoro) per esporre rapidamente, ed in modo

---

(1) Questo termine è usato qui con un significato più particolare di quello della definizione adottata in [7],[10] e ripresa in alcuni dei lavori sopracitati.

molto più intuitivo dal punto di vista didattico, concetti e proprietà dell'analisi classica.

La linea espositiva scelta si basa anche sul lavoro [8], ma l'approccio qui adottato, con l'uso di una massa μ sull'insieme J, mette chiaramente in luce che, affinché nella struttura di ordine superiore esistano elementi non standard (per es., nel caso di R, infinitesimi e infiniti), è essenziale che μ *non* sia σ-additiva.

2.- Gli elementi di un insieme infinito X sono riguardati come atomi, cioé si conviene che, se $a \in X$, non ha senso scrivere $y \in a$. Definiti induttivamente i seguenti insiemi:

$X_o = X$ e $X_n = \mathcal{P}(\bigcup_{k=o}^{n-1} X_k)$ $\forall n \in N$, e posto

$$\hat{X} = \bigcup_{n=o}^{\infty} X_n$$

$(\hat{X}, \in, =)$ dicesi la *superstruttura* costruita sugli atomi di X.

Osserviamo che, nel caso $X = R$, le coppie ordinate $(x_1,x_2) = \{\{x_1\},\{x_1,x_2\}\}$, e quindi le n-ple ordinate $\{\{x_1\},\{x_1,(x_2 \ldots x_n)\}\}$, sono elementi di $\hat{R}$, perché se $x_1,x_2,\ldots x_n \in R$, si ha $\{x_1\} \in R_1$, $\{x_1,x_2\} \in R_1$ e quindi $\{\{x_1\},\{x_1,x_2\}\} \in R_2$, il che vuol dire che $R^2 \subset R_2$; si prova che $R^n \subset R_{2(n-1)} \in R_{2n-1}$, $n \geq 1$.

Più in generale, se $a,b \in \hat{R}$, si ha $a \times b \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b)) \in \hat{R}$, e quindi funzioni e relazioni, con dominio e codominio elementi di $\hat{R}$, sono elementi di $\hat{R}$. Ne segue che *tutti gli assiomi e le proprietà dell'insieme R dei numeri reali possono essere formulati mediante elementi di* $\hat{R}$.

Sia J un arbitrario insieme infinito: detto $\hat{R}^J$ l'insieme delle applicazioni da J in $\hat{R}$, ogni elemento $a \in \hat{R}$ può essere identificato con l'elemento ${}^*a \in \hat{R}^J$ (che si dirà "standard") così definito:

$$^*a(i) = a \qquad \forall i \in J$$

Sia ora μ una massa su J: si costruisce una struttura su $\hat{R}^J$ estendendo le relazioni di appartenenza e di uguaglianza di $\hat{R}$ nel seguente modo: dati α , β $\in \hat{R}^J$

$$(1) \qquad \alpha =_\mu \beta \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \mu(\{i \in J : \alpha(i) = \beta(i)\}) = 1$$

$$(2) \qquad \alpha \in_\mu \beta \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \mu(\{i \in J : \alpha(i) \in \beta(i)\}) = 1$$

Si può facilmente verificare che $=_\mu$ è di equivalenza e che, $\forall a,b \in \hat{R}$:

$$(3) \qquad a = b \Longleftrightarrow {}^*a =_\mu {}^*b$$

$$(4) \qquad a \in b \Longleftrightarrow {}^*a \in_\mu {}^*b$$

Nel seguito, indicheremo anche l'uguaglianza e l'appartenenza in $\hat{R}^J$ con i simboli usuali, tralasciando l'indice μ.

Le definizioni precedenti sono giustificate dal fatto che, $\forall \alpha,\beta \in \hat{R}^J$ risulta $\alpha = \beta$ oppure (aut) $\alpha \neq \beta$ ed anche $\alpha \in \beta$ oppure $\alpha \notin \beta$: infatti, sia $I_1 = \{i \in J : \alpha(i) = \beta(i)\}$ e $I_2 = \{i \in J : \alpha(i) \neq \beta(i)\}$; poiché $I_1 \cup I_2 = J$, si ha $\mu(I_1) = 1$ oppure $\mu(I_2) = 1$. Analogamente per l'altra affermazione .

3.- Ogni elemento di $\hat{R}^J$ che appartenga a qualche ${}^*R_n$ si dice "interno". L'unione di tutti gli elementi interni sarà denotato con $^*(\hat{R})$, sicché

$$^*(\hat{R}) = \bigcup_{n=o}^{\infty} {}^*R_n$$

Si noti che ogni elemento standard è interno, poiché

$$a \in R_n \iff {}^*a \in {}^*R_n$$

Per le ipotesi fatte su μ, esiste una partizione numerabile $\{I_1, I_2, \ldots I_n, \ldots\}$ tale che

$$\mu(I_n) = 0 \qquad \forall n \in N$$

Se ne deduce:

Teorema 1.- Se $a \in \hat{R}$ ha infiniti elementi, esiste un elemento interno $b \in {}^*a$ che non è standard.

Dim.- Se b_n è una successione di elementi di a tale che $b_n \neq b_m$, $\forall n,m \in N$, $n \neq m$, sia b l'applicazione di J in a tale che:

$$b(i) = b_n \qquad \forall i \in I_n \text{ , } (n = 1,2,\ldots) .$$

Risulta $b \in {}^*a$, poiché μ $(\{i \in J : b(i) \in a\}) \equiv \mu(J) = 1$.
Ma b non è standard: se esistesse $c \in \hat{R}$ tale che $b = {}^*c$, si avrebbe μ $(\{i \in J : b(i) = c\}) = 1$, contro l'ipotesi che $b(i) = b_n$ in ciascuno degli I_n di massa nulla.

L'immersione di $\hat{R}$ in $^*(\hat{R})$ è, pertanto, propria.

Ad esempio, poiché $R(\in \hat{R})$ ha infiniti elementi, $^*R$ avrà elementi interni che non sono standard (fra i quali gli infinitesimi e gli infiniti, che considereremo al n. 5): identificando R con l'insieme degli elementi standard di $^*R$; si può scrivere $R \subset {}^*R$.

Nel seguito, scriveremo "q.c. $P(i)$" (cioé $P(i)$ vale quasi certamente in J) per indicare che

$$\mu\{i\in J : P(i)\} = 1$$

Le (3), (4) costituiscono proprietà elementari dell'immersione $a \to {}^*a$ di $\hat{R}$ in $\hat{R}^J$; ne elenchiamo alcune altre:

(5) $\quad {}^*\emptyset = \emptyset$

(6) $\quad a,b\in\hat{R} \Longrightarrow {}^*(a\cap b) = {}^*a \cap {}^*b$

(7) $\quad a,b\in\hat{R} \Longrightarrow {}^*(a-b) = {}^*a - {}^*b$

(8) $\quad a,b\in\hat{R} \Longrightarrow {}^*(a\times b) = {}^*a\times{}^*b$

(9) $\quad a\in\hat{R}, b \subset R^2 \Longrightarrow {}^*(\mathrm{dom}\ b) = \mathrm{dom}\ {}^*b, {}^*(\mathrm{codom}\ b)=\mathrm{codom}\ {}^*b$

Dimostriamo, come esempio, la (7): la dimostrazione delle altre è analoga, basandosi sempre sul fatto che una proprietà si può "trasferire" da $\hat{R}$ a $\hat{R}^J$ mediante una opportuna $P(i)$ q.c. vera in J.

Si ha $x \in {}^*(a-b)$ se e solo se q.c. $x(i) \in a-b$; questa implica, a fortiori , che q.c. $x(i)\in a$ e q.c. $x(i) \notin b$, cioé che $x \in {}^*a$ e $x \notin {}^*b$ e quindi $x \in {}^*a-{}^*b$. Viceversa, se $x\in{}^*a-{}^*b$, osservando che l'intersezione di due sottoinsiemi di J di massa 1 ha massa 1, si deduce facilmente che $x \in {}^*(a-b)$.

4.- Le proprietà della superstruttura $\hat{R}$ possono essere descritte mediante un linguaggio formale L,costituito da variabili, dagli usuali simboli logici, e da simboli rappresentanti gli elementi di $\hat{R}$ (detti anche "costanti"). In questo modo, partendo dalle cosiddette *formule atomiche,* cioé del tipo $\alpha \in \beta$, si possono scrivere, mediante l'uso ripetuto di connettivi e quantificatori, delle formule che esprimono le proprietà di $\hat{R}$.

Una formula $F(x_1,x_2,\ldots x_n)$ contenente delle variabili *libere* (cioé che non figurano nel campo d'azione di un quantificatore) si dice un *predicato*; in caso contrario F si dice un *enunciato*.

Indicheremo con Ω l'insieme degli *enunciati* di L, e con Ω_o l'insieme degli enunciati di L che sono *veri* in $\hat{R}$.

Anche $\hat{R}^J$ si può descrivere in maniera analoga, mediante un linguaggio $\mathcal{L}$.

Se F è una formula di L, indichiamo con ${}^*F$ una formula di $\mathcal{L}$ ottenuta da F sostituendo ciascuna costante $a\in\hat{R}$ con ${}^*a\in R^J$ dato da (cfr. n.2)

$$ {}^*a(i) = a \qquad \forall i\in J. $$

In tale formula figurano quindi solo elementi *standard* di $\hat{R}^j$.

Una formula di $\mathcal{L}$ si dice *interna* (in particolare, *standard*) quando in essa figurano solo elementi interni di $\hat{R}^J$, cioé solo elementi di ${}^*(\hat{R})$.

<u>Lemma</u>.- Se $F(x_1,x_2,\ldots x_p)$ è una formula di L, con le x_i variabili libere, e se $b\in\hat{R}$, posto

$$ X = \{(x_1,x_2\ldots x_p) \in b : F(x_1,x_2\ldots x_p)\} , $$

si ha $X \in \hat{R}$ e

$$ {}^*X = \{(y_1,y_2\ldots y_p) \in {}^*b : {}^*F(y_1,y_2\ldots y_p)\} $$

<u>Dim</u>.- In base alla definizione di $\hat{R}$, è facile verificare che $X\in\hat{R}$.

Supponiamo prima che la formula F sia atomica: allora l'affermazione riguardante $^*X$ segue dalle definizioni (1), (2) e dalla (4). Supponiamo ora che i simboli logici di F siano soltanto connettivi (cioé F sia priva di quantificatori): allora basta dimostrare che, se il risultato vale per F e G, vale anche per $F \wedge G$ e per $\sim F$; quest'ultima affermazione si dimostra osservando che, posto $Y = b - X$, si ha, per la (7), $^*Y = {}^*b - {}^*X$. Analogamente, la dimostrazione riguardante $F \wedge G$ si basa sulla (6).

Nel caso generale, si può procedere per induzione sul numero n di quantificatori (essendosi già provato il caso $n = 0$). Se F ha $n+1$ quantificatori, essa si può sempre trasformare in una formula contenente tutti i quantificatori prima di ogni connettivo, e non è restrittivo supporre che il primo quantificatore sia $\exists$. Allora F è del tipo:

$$\exists x\ G(x,x_1,x_2\ldots x_p),$$

con G contenente gli altri n quantificatori con le relative variabili e l'insieme X si scrive

$$X = \{(x_1,x_2\ldots x_p)\in b \ :\ \exists x\ G(x,x_1,x_2\ldots x_p)\}\ .$$

Pertanto $X = \mathrm{dom}\ B$, con

$$B = \{((x_1,x_2\ldots x_p),x)\in b\times a : G(x,x_1,x_2\ldots x_p)\}\ ,$$

essendo $a\in\hat{R}$ il dominio di $\exists x$. Ma siccome G ha n quantificatori, ed in tal caso stiamo supponendo il Lemma vero, si ha, tenendo presente anche la (8),

$$^*B = \{((x_1,x_2\ldots x_p),x)\in {}^*b\times {}^*a : {}^*G(x,x_1,x_2\ldots x_p)\}.$$

D'altra parte

$$\mathrm{dom}({}^*B) = \{(x_1,x_2 \dots x_p) \epsilon {}^*b : \exists x\, {}^*G(x,x_1,x_2 \dots x_p)\},$$

e il dominio di $\exists x$ è ${}^*a \epsilon \hat{R}^J$. Inoltre, per la (9),

$$\mathrm{dom}({}^*B) = {}^*(\mathrm{dom}\ B),$$

e quindi

$${}^*X = {}^*(\mathrm{dom}\ b) = \{(x_1,x_2 \dots x_p) \epsilon {}^*b : {}^*F(x_1,x_2 \dots x_p)\} ,$$

cioé la tesi.

Sia ora ${}^*\Omega$ l'insieme degli *enunciati interni* di $\mathcal{L}$, ed ${}^*\Omega_o$ il sottoinsieme di quelli che sono veri in ${}^*(\hat{R})$.

Teorema 2.- Sia $F \in \Omega_o$ e sia ${}^*F \in {}^*\Omega_o$ il corrispondente enunciato interno di $\mathcal{L}$. Allora si ha

$$F \in \Omega_o \Longleftrightarrow {}^*F \in {}^*\Omega_o \quad .$$

Dim.- Se F è senza quantificatori, il teorema segue facilmente dalle definizioni (1), (2). Nel caso generale, si osservi che, scritto l'enunciato F nella forma $\exists x\ G$, dire che $F \in \Omega_o$ equivale a dire che

$$A = \{x \in b : G\} \neq \emptyset ,$$

essendo b il dominio di $\exists x$. Per il lemma precedente, per la (5) e per la (3), ciò equivale a

$${}^*A = \{x \in {}^*b : {}^*G\} \neq {}^*\emptyset ,$$

cioé l'enunciato $\exists x\, {}^*G$ appartiene a ${}^*\Omega_o$. Ma $\exists x\, {}^*G = {}^*F$, e quindi il teorema è provato.

L'uso di tale teorema è uno dei più importanti aspetti dei metodi non standard, perché consente di trasformare gli enunciati di Ω_o in enunciati di ${}^*\Omega_o$, cioé in enunciati veri fra elementi di ${}^*(\hat{R})$ (che sono interni).

Se $y \in \hat{R}$ è una relazione binaria, allora ogni proprietà di y, che si possa esprimere mediante un enunciato di Ω_o, è proprietà di ${}^*y$: per es., se y è una funzione, ${}^*y$ è una funzione.

5.- Per il Teorema 2, ${}^*R$ ha le stesse proprietà di R che siano esprimibili mediante enunciati di Ω_o e, pertanto, ${}^*R$ è un campo totalmente **ordinato**. Ad es., $a \leq b$ in ${}^*R$ significa che q.c. $a(i) \leq b(i)$, l'ordinamento totale indctto da tale relazione è espresso dal seguente enunciato di Ω_o:

$$(\forall x)(\forall y)\ [x \in R \wedge y \in R] \Rightarrow [x<y] \vee [x=y] \vee [y<x]$$

che, per il Teorema 2, si estende a ${}^*R$. Altro esempio:ogni sottoinsieme non vuoto, *interno*, di ${}^*R$, limitato superiormente, ha un estremo superiore.

Considerato un qualunque sottoinsieme di R, ad es. N, l'insieme ${}^*N$ ha le stesse proprietà di N che siano esprimibili mediante enunciati di Ω_o : ad es., ogni sottoinsieme non vuoto, *interno*, di ${}^*N$ ha un primo elemento.

Per il Teorema 1, esiste un elemento $\alpha \in {}^*N$ che non è standard. Proviamo che $\alpha > {}^*n$, $\forall {}^*n \in N$ (N è identificato con l'insieme degli elementi standard di ${}^*N$): sia infatti $\alpha(i) = k$ $\forall i \in I_k$, con $\{I_1, I_2, \dots I_k, \dots\}$ partizione numerabile di J tale che $\mu(I_k) = 0$; allora si ha che, comunque si fissi $n \in N$,

$$\mu(\{i\in J : \alpha(i) \leq {}^*n(i) = n\}) = \mu(I_1 \cup I_2 .. \cup I_n) = 0.$$

Allora q.c. $\alpha(i) > n$, cioé $\alpha > {}^*n$.

Poiché $\forall r\in R$ ($\subset {}^*R$), esiste $n\in N$ tale che $|r| < n$, si avrà anche che $\alpha > |r|$, $\forall r\in R$, e quindi si deduce l'esistenza dei "numeri" reali infiniti e infinitesimi(2).

<u>Definizione</u>.- Dati $\beta_1,\beta_2 \in {}^*R$, si dice che β_1 è *infinitamente vicino* a β_2 se e solo se $(\beta_1-\beta_2) \in R^\circ$. Si scrive $\beta_1 \simeq \beta_2$.

La relazione $\simeq$ è di equivalenza: $\beta_1 - \beta_1 = 0\in R^\circ$, cioé $\beta_1 \simeq \beta_1$; $(\beta_1-\beta_2) \in R^\circ \Longrightarrow (\beta_2-\beta_1) = (-1)(\beta_1-\beta_2)\in R^\circ$ (poiché $-1\in R_F$ ed R° è un ideale dell'anello R_F) e quindi $\beta_1 \simeq \beta_2 \Longrightarrow \beta_2 \simeq \beta_1$; $[(\beta_1-\beta_2)\in R^\circ \wedge (\beta_2-\beta_3)\in R^\circ]$ $(\beta_1-\beta_2) + (\beta_2-\beta_3) \in R^\circ$, cioé $(\beta_1-\beta_3) \in R^\circ$, ossia $\beta_1 \simeq \beta_3$.

In particolare, se $\beta_1,\beta_2 \in R_F$, si ha (3):

$$\beta_1 \simeq \beta_2 \Longrightarrow (st\beta_1+c_1) - (st\beta_2+c_2)\in R^\circ \Longleftrightarrow (st\beta_1-st\beta_2) + (c_1-c_2)\in R^\circ \Longleftrightarrow$$

$$st\beta_1 = st\beta_2$$

---

(2) Cfr [7], p.50: $R^\circ = \{\alpha\in {}^*R : |\alpha| < r, \ \forall r\in R^+\}$ è l'insieme degli infinitesimi;
$R_I = \{\beta\in {}^*R : r < |\beta|, \ \forall r\in R\}$ è l'insieme degli infiniti;
$R_F = {}^*R - R_I = \{\beta\in {}^*R : \exists r\in R^+ : |\beta| < r\}$ è l'insieme dei numeri finiti: si conviene di scrivere $|\cdot|$ al posto di ${}^*|\cdot|$, poiché tale funzione può riguardarsi in ${}^*R$ come corrispondente della $|\cdot|$ di R, e per il Teor.2, ha la proprietà che ${}^*|r| = r$, $\forall r\in {}^*R, r \geq 0$ e ${}^*|r| = -r$, $r\in {}^*R$, $r < 0$.

(3) Ogni $\beta\in R_F$ può rappresentarsi, in modo unico, come somma di un numero finito standard (la sua parte standard "$st\beta$") e di un numero $c\in R^\circ$ (cfr. [7], p.52).

6.- Ogni successione reale $(y_n)_{n\in N}$, sottoinsieme di $N \times R$, è un elemento $y \in \hat{R}$, cui corrisponde in $^*(\hat{R})$ l'elemento standard $^*y$ che, per il Teorema 2, risulta essere una successione, sottoinsieme di $^*N \times {}^*R$, tale che:

$$^*y_{^*n} = {}^*(y_n) \quad \forall^*n \in {}^*N, \quad \text{con } {}^*n \text{ standard},$$

che ha le stesse proprietà di y, che siano esprimibili con enunciati di Ω_0.

Lo stesso vale per ogni $f : R \to R$, perché ad f, elemento di $\hat{R}$, corrisponde l'elemento standard $^*f$ $({}^*f : {}^*R \to {}^*R)$ tale che:

$$^*f({}^*x) = {}^*(f(x)) \ \forall\ {}^*x \in {}^*R, \quad \text{con } {}^*x \text{ standard}.$$

Siccome un elemento *standard* di $^*R$ si può riguardare come elemento di R, nel seguito possiamo anche non usare l'asterisco per tali elementi.

<u>Teorema</u> 3.- Dati $f : [a,b] \to R$, $x_0 \in [a,b]$, $\ell \in R$, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

$P_1)$ $\quad \forall\alpha \in R^+, \exists\delta\in R^+ : (x\in[a,b] \wedge |x-x_0| < \delta) \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \alpha$

$P_2)$ $\quad \forall x \in {}^*[a,b]$ (4) $: x \simeq x_0 \Longrightarrow {}^*f(x) \simeq \ell$

<u>Dim.</u>- $P_1) \Rightarrow P_2)$ si deve dimostrare che, se $x \in {}^*[a,b]$:

---

(4) Fissato $[a,b] \subset R$, esso è un elemento di $\hat{R}$ cui corrisponde $^*[a,b]$ che, per il Teorema 1, è estensione propria di $[a,b]$: per es., se $x_0 \in [a,b], x_0+c$ $(c\in R^\circ)$ è un elemento di $^*[a,b]$ che non appartiene ad $[a,b]$.

(10) $\quad x \simeq x_o \Longrightarrow |{}^*f(x) - \ell| < \alpha, \ \forall\alpha \in R^+.$

La proposizione P_1) è una formula F appartenente ad Ω_o, e quindi, per il Teorema 2, ${}^*F \in {}^*\Omega_o$, cioé, ricordando la convenzione stabilita prima di enunciare il Teorema,

(11) $\forall\alpha \in R^+, \exists\delta \in R^+ : (x \in {}^*[a,b] \wedge |x-x_o| < \delta) \Longrightarrow |{}^*f(x)-\ell|<\alpha.$

In particolare, fra gli $x \in {}^*[a,b]$ verificanti la $|x-x_o|<\delta$ ci sono quelli infinitamente vicini a x_o, i quali soddisfano questa limitazione *per ogni* $\delta \in R^+$. Allora, se $x \simeq x_o$, δ *non dipende* da α, e quindi ${}^*F$ si può scrivere nella forma (10).

$P_2) \Longrightarrow P_1)$: Se $\delta = \delta_o$ con δ_o un qualunque infinitesimo (indipendente da α), la P_2) si può scrivere nella forma (11), e quindi la conclusione segue dal Teorema 2.

Con le opportune modifiche, se X è un insieme arbitrario, si deduce la seguente caratterizzazione della continuità in $x_o \in X$ di una f, definita in X:

P_1') f è continua in x_o.

P_2') $\forall x \in {}^*X : x \simeq x_o \Longrightarrow {}^*f(x) \simeq {}^*f(x_o)$[5].

---

(5) Si noti come si ottiene immediatamente la continuità della funzione composta $f \circ f_1$ in x_o, se $f_1(x)$ è continua in x_o e $f(x)$ è continua in $f_1(x_o)$: $x \simeq x_o \Longrightarrow f_1(x) \simeq f_1(x_o) \Longrightarrow f(f_1(x)) \simeq f(f_1(x_o))$.

Teorema 4.- Sia $f : X \to R$. Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

P') $\forall \alpha \in R^+, \exists \delta \in R^+ : \forall x,x' \in X \wedge |x-x'|<\delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \alpha.$

P") $\forall x,x' \in {}^*X : x \simeq x' \Longrightarrow {}^*f(x) \simeq {}^*f(x')$.

Dim.- P') $\Longrightarrow$ P"): Nella formula $^*F$ corrispondente alla formula F che esprime la P') si possono scegliere x,x' tali che $x \simeq x'$, e quindi si può concludere in maniera analoga alla prima parte del Teorema 3.

P") $\Longrightarrow$ P'): anche qui la dimostrazione è analoga a quella della seconda parte del Teorema 3.

Si osservi l'immediatezza della dimostrazione di un classico Teorema: Se f è continua in $[a,b]$ è, ivi, uniformemente continua.

Si deve provare che

$$\forall x_1,x_2 \in {}^*[a,b] : x_1 \simeq x_2 \Longrightarrow {}^*f(x_1) \simeq {}^*f(x_2) .$$

Poiché $a \leq x_1 \leq b$, si ha $x_1 \in R_F$, e lo stesso vale per x_2 .

Pertanto, essendo $x_1 \simeq x_2$. si ha che $stx_1 = stx_2$ (cfr. n.5., in fine) Posto $stx_1 = stx_2 = x_0$, si ha $x_0 \in [a,b]$(6), poiché $x_1 \simeq x_0$ e $x_2 \simeq x_0$,

(6) Se fosse $x_0 > b$ sarebbe $x_0 - x_1 > b - x_1 = \alpha_1 \in R^+$, e ciò è assurdo poiché essendo $x_0 \simeq x_1$, $|x_1 - x_0| < \alpha$, $\forall \alpha \in R^+$. Analogamente, non è $x_0 < a$. E' questa una proprietà degli intervalli chiusi e limitati $^*[a,b]$, che ogni loro punto è infinitamente vicino a qualche punto di $[a,b]$. Tale proprietà, come si potrebbe far vedere, caratterizza ogni compatto $X \subset R$.

ciò implica, essendo f continua in x_0, che:

$$^*f(x_1) \simeq {}^*f(x_0) \quad e \quad {}^*f(x_0) \simeq {}^*f(x_2) \ , \text{ cioè } \ {}^*f(x_1) \simeq {}^*f(x_2)$$

E se X è un qualunque compatto di R, vale la stessa conclusione.

Accettato per la pubblicazione su
proposta del Prof. R. SCOZZAFAVA