

## Probabilità non $\sigma$ -additive e analisi non-standard

di Alberto GIANNONE (Lecce)

SUMMARY.- We show how two-valued finitely additive probability measures on a set  $J$  allow the study of nonstandard models. This is accomplished via a set  ${}^*(\hat{R})$  of functions from  $J$  to  $\hat{R}$  (where  $\hat{R}$  is a superstructure built on  $R$  by considering inductively the power set), i.e. a property is true in  ${}^*(\hat{R})$  iff it holds almost certainly in  $J$ . Some applications to a few examples in classical analysis are also given.

1.- Le misure di probabilità non  $\sigma$ -additive sono state recentemente oggetto di numerose ricerche (cfr., ad es., [1], [2], [3], [4], [6], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15]), volte a sviluppare le idee sostenute da B. de Finetti nel corso dell'ultimo mezzo secolo (i suoi primi lavori sull'argomento risalgono infatti al 1928) e riportate in [5]. Generalmente, quando si considerano probabilità "finitamente additive", si intende "non necessariamente  $\sigma$ -additive", nel senso che l'assioma di  $\sigma$ -additività non viene imposto *a priori*, ma si può riguardare come una proprietà ulteriore della probabilità, valida solo in casi particolari.

Nei lavori sopra citati l'accento è invece posto sugli aspetti peculiari di una misura di probabilità per la quale la  $\sigma$ -additività non sussista.

E' di questo tipo anche una misura di probabilità suscettibile di assumere, sui sottoinsiemi di un insieme  $J$ , solo i due valori 0 e 1 (senza ridursi al caso banale di una misura concentrata in un punto): ovviamente, occorre assumere che  $k = \text{card } J$  sia quello che si dice un cardinale "non misurabile" (ma con ciò si rimane in un ambito assai generale, se si tiene presente che un cardinale misurabile  $k$  è necessariamente inaccessibile ed è preceduto da altri  $k$  cardinali inaccess-

sibili).

Chiameremo *massa*<sup>(1)</sup> una misura di probabilità  $\mu$  non  $\sigma$ -additiva definita su un insieme  $J$ , e tale che  $\mu(E) = 0$  oppure  $\mu(E) = 1$  per ogni  $E \subseteq J$ : com'è noto, l'insieme

$$\mathcal{U} = \{E \subseteq J : \mu(E) = 1\}$$

è un *ultrafiltro* in  $J$ , ma nel seguito non dovremo fare uso di questa osservazione. Notiamo anche che la  $\mu$  non può essere concentrata in un punto (cioè l'ultrafiltro  $\mathcal{U}$  è *libero*).

In questo lavoro (che si colloca nella linea di [7], proponendosi di rendere accessibili alcuni aspetti dei metodi non standard, anche prescindendo da conoscenze specifiche di logica matematica) costruiamo una struttura di ordine superiore ("non standard") attraverso il concetto di proprietà *quasi certa* (cioè "vera" con probabilità 1) su un insieme  $J$  di indici su cui è assegnata una massa  $\mu$ : il sostegno di questa struttura è costituito dalle applicazioni definite su  $J$  e a valori in un insieme costruito a partire dall'insieme  $R$  dei reali mediante successive operazioni di passaggio all'insieme potenza.

In tal modo i risultati di [7], in cui ci si limitava allo studio di un modello non standard del primo ordine, vengono notevolmente ampliati, e possono essere applicati (come mostreremo con qualche esempio nella parte finale del lavoro) per esporre rapidamente, ed in modo

---

(1) Questo termine è usato qui con un significato più particolare di quello della definizione adottata in [7], [10] e ripresa in alcuni dei lavori sopracitati.

molto più intuitivo dal punto di vista didattico, concetti e proprietà dell'analisi classica.

La linea espositiva scelta si basa anche sul lavoro [8], ma l'approccio qui adottato, con l'uso di una massa  $\mu$  sull'insieme  $J$ , mette chiaramente in luce che, affinché nella struttura di ordine superiore esistano elementi non standard (per es., nel caso di  $R$ , infinitesimi e infiniti), è essenziale che  $\mu$  non sia  $\sigma$ -additiva.

2.- Gli elementi di un insieme infinito  $X$  sono riguardati come atomi, cioè si conviene che, se  $a \in X$ , non ha senso scrivere  $y \in a$ . Definiti induttivamente i seguenti insiemi:

$$X_0 = X \quad \text{e} \quad X_n = \mathfrak{B}\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} X_k\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{e posto}$$

$$\hat{X} = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$$

$(\hat{X}, \epsilon, =)$  dicesi la *superstruttura* costruita sugli atomi di  $X$ .

Osserviamo che, nel caso  $X = R$ , le coppie ordinate  $(x_1, x_2) = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$ , e quindi le  $n$ -ple ordinate  $\{\{x_1\}, \{x_1, (x_2 \dots x_n)\}\}$ , sono elementi di  $\hat{R}$ , perché se  $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$ , si ha  $\{x_1\} \in R_1$ ,  $\{x_1, x_2\} \in R_1$  e quindi  $\{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\} \in R_2$ , il che vuol dire che  $R^2 \subset R_2$ ; si prova che  $R^n \subset R_{2(n-1)} \in R_{2n-1}$ ,  $n \geq 1$ .

Più in generale, se  $a, b \in \hat{R}$ , si ha  $axb \in \mathfrak{B}(\mathfrak{B}(a \vee b)) \in \hat{R}$ , e quindi funzioni e relazioni, con dominio e codominio elementi di  $\hat{R}$ , sono elementi di  $\hat{R}$ . Ne segue che tutti gli assiomi e le proprietà dell'insieme  $R$  dei numeri reali possono essere formulati mediante elementi di  $\hat{R}$ .

Sia  $J$  un arbitrario insieme infinito: detto  $\hat{R}^J$  l'insieme delle applicazioni da  $J$  in  $\hat{R}$ , ogni elemento  $a \in \hat{R}^J$  può essere identificato con l'elemento  $*a \in \hat{R}^J$  (che si dirà "standard") così definito:

$$*a(i) = a \quad \forall i \in J$$

Sia ora  $\mu$  una massa su  $J$ : si costruisce una struttura su  $\hat{R}^J$  estendendo le relazioni di appartenenza e di uguaglianza di  $\hat{R}$  nel seguente modo: dati  $\alpha, \beta \in \hat{R}^J$

$$(1) \quad \alpha =_{\mu} \beta \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \mu(\{i \in J : \alpha(i) = \beta(i)\}) = 1$$

$$(2) \quad \alpha \in_{\mu} \beta \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \mu(\{i \in J : \alpha(i) \in \beta(i)\}) = 1$$

Si può facilmente verificare che  $=_{\mu}$  è di equivalenza e che,  $\forall a, b \in \hat{R}$ :

$$(3) \quad a = b \iff *a =_{\mu} *b$$

$$(4) \quad a \in b \iff *a \in_{\mu} *b$$

Nel seguito, indicheremo anche l'uguaglianza e l'appartenenza in  $\hat{R}^J$  con i simboli usuali, tralasciando l'indice  $\mu$ .

Le definizioni precedenti sono giustificate dal fatto che,  $\forall \alpha, \beta \in \hat{R}^J$  risulta  $\alpha = \beta$  oppure (aut)  $\alpha \neq \beta$  ed anche  $\alpha \in \beta$  oppure  $\alpha \notin \beta$ : infatti, sia  $I_1 = \{i \in J : \alpha(i) = \beta(i)\}$  e  $I_2 = \{i \in J : \alpha(i) \neq \beta(i)\}$ ; poiché  $I_1 \cup I_2 = J$ , si ha  $\mu(I_1) = 1$  oppure  $\mu(I_2) = 1$ . Analogamente per l'altra affermazione.

3.- Ogni elemento di  $\hat{R}^J$  che appartenga a qualche  $*R_n$  si dice

"interno". L'unione di tutti gli elementi interni sarà denotato con  ${}^*(\hat{R})$ , sicché

$${}^*(\hat{R}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} {}^*R_n$$

Si noti che ogni elemento standard è interno, poiché

$$a \in R_n \iff {}^*a \in {}^*R_n$$

Per le ipotesi fatte su  $\mu$ , esiste una partizione numerabile  $\{I_1, I_2, \dots, I_n, \dots\}$  tale che

$$\mu(I_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se ne deduce:

Teorema 1.- Se  $a \in \hat{R}$  ha infiniti elementi, esiste un elemento interno  $b \in {}^*a$  che non è standard.

Dim.- Se  $b_n$  è una successione di elementi di  $a$  tale che  $b_n \neq b_m$ ,  $\forall n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq m$ , sia  $b$  l'applicazione di  $J$  in  $a$  tale che:

$$b(i) = b_n \quad \forall i \in I_n, (n = 1, 2, \dots).$$

Risulta  $b \in {}^*a$ , poiché  $\mu(\{i \in J : b(i) \in a\}) \equiv \mu(J) = 1$ .

Ma  $b$  non è standard: se esistesse  $c \in \hat{R}$  tale che  $b = {}^*c$ , si avrebbe  $\mu(\{i \in J : b(i) = c\}) = 1$ , contro l'ipotesi che  $b(i) = b_n$  in ciascuno degli  $I_n$  di massa nulla.

L'immersione di  $\hat{R}$  in  ${}^*(\hat{R})$  è, pertanto, propria.

Ad esempio, poiché  $R \in \hat{R}$  ha infiniti elementi,  ${}^*R$  avrà elementi interni che non sono standard (fra i quali gli infinitesimi e gli infiniti, che considereremo al n. 5): identificando  $R$  con l'insieme degli

elementi standard di  ${}^*R$ ; si può scrivere  $R \subset {}^*R$ .

Nel seguito, scriveremo "q.c.  $P(i)$ " (cioè  $P(i)$  vale quasi certamente in  $J$ ) per indicare che

$$\mu\{i \in J : P(i)\} = 1$$

Le (3), (4) costituiscono proprietà elementari dell'immersione  $a \rightarrow {}^*a$  di  $\hat{R}$  in  $\hat{R}^J$ ; ne elenchiamo alcune altre:

$$(5) \quad {}^*\emptyset = \emptyset$$

$$(6) \quad a, b \in \hat{R} \implies {}^*(a \cap b) = {}^*a \cap {}^*b$$

$$(7) \quad a, b \in \hat{R} \implies {}^*(a - b) = {}^*a - {}^*b$$

$$(8) \quad a, b \in \hat{R} \implies {}^*(axb) = {}^*a x {}^*b$$

$$(9) \quad a \in \hat{R}, b \in R^2 \implies {}^*(\text{dom } b) = \text{dom } {}^*b, {}^*(\text{codom } b) = \text{codom } {}^*b$$

Dimostriamo, come esempio, la (7): la dimostrazione delle altre è analoga, basandosi sempre sul fatto che una proprietà si può "trasferire" da  $\hat{R}$  a  $\hat{R}^J$  mediante una opportuna  $P(i)$  q.c. vera in  $J$ .

Si ha  $x \in {}^*(a-b)$  se e solo se q.c.  $x(i) \in a-b$ ; questa implica, a fortiori, che q.c.  $x(i) \in a$  e q.c.  $x(i) \notin b$ , cioè che  $x \in {}^*a$  e  $x \notin {}^*b$  e quindi  $x \in {}^*a - {}^*b$ . Viceversa, se  $x \in {}^*a - {}^*b$ , osservando che l'intersezione di due sottoinsiemi di  $J$  di massa 1 ha massa 1, si deduce facilmente che  $x \in {}^*(a-b)$ .

4.- Le proprietà della superstruttura  $\hat{R}$  possono essere descritte mediante un linguaggio formale  $L$ , costituito da variabili, dagli usuali simboli logici, e da simboli rappresentanti gli elementi di  $\hat{R}$  (detti anche "costanti"). In questo modo, partendo dalle cosiddette *formule atomiche*, cioè del tipo  $\alpha \in \beta$ , si possono scrivere, mediante l'uso

ripetuto di connettivi e quantificatori, delle formule che esprimono le proprietà di  $\hat{R}$ .

Una formula  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  contenente delle variabili libere (cioè che non figurano nel campo d'azione di un quantificatore) si dice un *predicato*; in caso contrario  $F$  si dice un *enunciato*.

Indicheremo con  $\Omega$  l'insieme degli enunciati di  $L$ , e con  $\Omega_0$  l'insieme degli enunciati di  $L$  che sono veri in  $\hat{R}$ .

Anche  $\hat{R}^J$  si può descrivere in maniera analoga, mediante un linguaggio  $\mathcal{L}$ .

Se  $F$  è una formula di  $L$ , indichiamo con  ${}^*F$  una formula di  $\mathcal{L}$  ottenuta da  $F$  sostituendo ciascuna costante  $a \in \hat{R}$  con  ${}^*a \in \hat{R}^J$  dato da (cfr. n.2)

$${}^*a(i) = a \quad \forall i \in J.$$

In tale formula figurano quindi solo elementi *standard* di  $\hat{R}^J$ .

Una formula di  $\mathcal{L}$  si dice *interna* (in particolare, *standard*) quando in essa figurano solo elementi interni di  $\hat{R}^J$ , cioè solo elementi di  ${}^*(\hat{R})$ .

Lemma.- Se  $F(x_1, x_2, \dots, x_p)$  è una formula di  $L$ , con le  $x_i$  variabili libere, e se  $b \in \hat{R}$ , posto

$$X = \{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in b : F(x_1, x_2, \dots, x_p)\},$$

si ha  $X \in \hat{R}$  e

$${}^*X = \{(y_1, y_2, \dots, y_p) \in {}^*b : {}^*F(y_1, y_2, \dots, y_p)\}$$

Dim.- In base alla definizione di  $\hat{R}$ , è facile verificare che  $X \in \hat{R}$ .

Supponiamo prima che la formula  $F$  sia atomica: allora l'affermazione riguardante  $*X$  segue dalle definizioni (1), (2) e dalla (4). Supponiamo ora che i simboli logici di  $F$  siano soltanto connettivi (cioè  $F$  sia priva di quantificatori): allora basta dimostrare che, se il risultato vale per  $F$  e  $G$ , vale anche per  $F \wedge G$  e per  $\sim F$ ; quest'ultima affermazione si dimostra osservando che, posto  $Y = b - X$ , si ha, per la (7),  $*Y = *b - *X$ . Analogamente, la dimostrazione riguardante  $F \wedge G$  si basa sulla (6).

Nel caso generale, si può procedere per induzione sul numero  $n$  di quantificatori (essendosi già provato il caso  $n = 0$ ). Se  $F$  ha  $n+1$  quantificatori, essa si può sempre trasformare in una formula contenente tutti i quantificatori prima di ogni connettivo, e non è restrittivo supporre che il primo quantificatore sia  $\exists$ . Allora  $F$  è del tipo:

$$\exists x G(x, x_1, x_2, \dots, x_p),$$

con  $G$  contenente gli altri  $n$  quantificatori con le relative variabili e l'insieme  $X$  si scrive

$$X = \{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in b : \exists x G(x, x_1, x_2, \dots, x_p)\}.$$

Pertanto  $X = \text{dom } B$ , con

$$B = \{(x_1, x_2, \dots, x_p), x) \in b \times a : G(x, x_1, x_2, \dots, x_p)\},$$

essendo  $a \in \hat{R}$  il dominio di  $\exists x$ . Ma siccome  $G$  ha  $n$  quantificatori, ed in tal caso stiamo supponendo il Lemma vero, si ha, tenendo presente anche la (8),

$$*B = \{(x_1, x_2, \dots, x_p), x) \in *b \times *a : *G(x, x_1, x_2, \dots, x_p)\}.$$

D'altra parte

$$\text{dom}(*B) = \{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in *b : \exists x *G(x, x_1, x_2, \dots, x_p)\},$$

e il dominio di  $\exists x$  è  $*a \in \hat{R}^J$ . Inoltre, per la (9),

$$\text{dom}(*B) = *( \text{dom } B ),$$

e quindi

$$*X = *( \text{dom } b ) = \{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in *b : *F(x_1, x_2, \dots, x_p)\},$$

cioè la tesi.

Sia ora  $*\Omega$  l'insieme degli enunciati interni di  $\mathcal{L}$ , ed  $*\Omega_0$  il sottoinsieme di quelli che sono veri in  $*(\hat{R})$ .

Teorema 2.- Sia  $F \in \Omega_0$  e sia  $*F \in *\Omega_0$  il corrispondente enunciato interno di  $\mathcal{L}$ . Allora si ha

$$F \in \Omega_0 \iff *F \in *\Omega_0.$$

Dim.- Se  $F$  è senza quantificatori, il teorema segue facilmente dalle definizioni (1), (2). Nel caso generale, si osservi che, scritto l'enunciato  $F$  nella forma  $\exists x G$ , dire che  $F \in \Omega_0$  equivale a dire che

$$A = \{x \in b : G\} \neq \emptyset,$$

essendo  $b$  il dominio di  $\exists x$ . Per il lemma precedente, per la (5) e per la (3), ciò equivale a

$$*A = \{x \in *b : *G\} \neq *\emptyset,$$

cioè l'enunciato  $\exists x *G$  appartiene a  $*\Omega_0$ . Ma  $\exists x *G = *F$ , e quindi il teorema è provato.

L'uso di tale teorema è uno dei più importanti aspetti dei metodi

non standard, perché consente di trasformare gli enunciati di  $\Omega_0$  in enunciati di  ${}^*\Omega_0$ , cioè in enunciati veri fra elementi di  ${}^*(\hat{R})$  (che sono interni).

Se  $y$  e  $\hat{R}$  è una relazione binaria, allora ogni proprietà di  $y$ , che si possa esprimere mediante un enunciato di  $\Omega_0$ , è proprietà di  ${}^*y$ : per es., se  $y$  è una funzione,  ${}^*y$  è una funzione.

5.- Per il Teorema 2,  ${}^*R$  ha le stesse proprietà di  $R$  che siano esprimibili mediante enunciati di  $\Omega_0$  e, pertanto,  ${}^*R$  è un campo totalmente **ordinato**. Ad es.,  $a \leq b$  in  ${}^*R$  significa che q.c.  $a(i) \leq b(i)$ , l'ordinamento totale indotto da tale relazione è espresso dal seguente enunciato di  $\Omega_0$ :

$$(\forall x)(\forall y) [x \in R \wedge y \in R] \Rightarrow [x < y] \vee [x = y] \vee [y < x]$$

che, per il Teorema 2, si estende a  ${}^*R$ . Altro esempio: ogni sottoinsieme non vuoto, *interno*, di  ${}^*R$ , limitato superiormente, ha un estremo superiore.

Considerato un qualunque sottoinsieme di  $R$ , ad es.  $N$ , l'insieme  ${}^*N$  ha le stesse proprietà di  $N$  che siano esprimibili mediante enunciati di  $\Omega_0$ : ad es., ogni sottoinsieme non vuoto, *interno*, di  ${}^*N$  ha un primo elemento.

Per il Teorema 1, esiste un elemento  $\alpha \in {}^*N$  che non è standard. Proviamo che  $\alpha > {}^*n$ ,  $\forall {}^*n \in N$  ( $N$  è identificato con l'insieme degli elementi standard di  ${}^*N$ ): sia infatti  $\alpha(i) = k \quad \forall i \in I_k$ , con  $\{I_1, I_2, \dots, I_k, \dots\}$  partizione numerabile di  $J$  tale che  $\mu(I_k) = 0$ ; allora si ha che, comunque si fissi  $n \in N$ ,

$$\mu(\{i \in J : \alpha(i) \leq {}^*n(i) = n\}) = \mu(I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n) = 0.$$

Allora q.c.  $\alpha(i) > n$ , cioè  $\alpha > {}^*n$ .

Poiché  $\forall r \in R$  ( $\in {}^*R$ ), esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $|r| < n$ , si avrà anche che  $\alpha > |r|$ ,  $\forall r \in R$ , e quindi si deduce l'esistenza dei "numeri" reali infiniti e infinitesimi<sup>(2)</sup>.

Definizione.- Dati  $\beta_1, \beta_2 \in {}^*R$ , si dice che  $\beta_1$  è *infinitamente vicino* a  $\beta_2$  se e solo se  $(\beta_1 - \beta_2) \in R^\circ$ . Si scrive  $\beta_1 \simeq \beta_2$ .

La relazione  $\simeq$  è di equivalenza:  $\beta_1 - \beta_1 = 0 \in R^\circ$ , cioè  $\beta_1 \simeq \beta_1$ ;  $(\beta_1 - \beta_2) \in R^\circ \implies (\beta_2 - \beta_1) = (-1)(\beta_1 - \beta_2) \in R^\circ$  (poiché  $-1 \in R_F$  ed  $R^\circ$  è un ideale dell'anello  $R_F$ ) e quindi  $\beta_1 \simeq \beta_2 \implies \beta_2 \simeq \beta_1$ ;  $[(\beta_1 - \beta_2) \in R^\circ \wedge (\beta_2 - \beta_3) \in R^\circ] \implies (\beta_1 - \beta_2) + (\beta_2 - \beta_3) \in R^\circ$ , cioè  $(\beta_1 - \beta_3) \in R^\circ$ , ossia  $\beta_1 \simeq \beta_3$ .

In particolare, se  $\beta_1, \beta_2 \in R_F$ , si ha<sup>(3)</sup>:

$$\beta_1 \simeq \beta_2 \implies (st\beta_1 + c_1) - (st\beta_2 + c_2) \in R^\circ \iff (st\beta_1 - st\beta_2) + (c_1 - c_2) \in R^\circ \iff$$

$$st\beta_1 = st\beta_2$$

(2) Cfr [7], p.50:  $R^\circ = \{\alpha \in {}^*R : |\alpha| < r, \forall r \in R^+\}$  è l'insieme degli infinitesimi;

$R_I = \{\beta \in {}^*R : r < |\beta|, \forall r \in R\}$  è l'insieme degli infiniti;

$R_F = {}^*R - R_I = \{\beta \in {}^*R : \exists r \in R^+ : |\beta| < r\}$  è l'insieme dei numeri finiti: si conviene di scrivere  $|\cdot|$  al posto di  ${}^*|\cdot|$ , poiché tale funzione può riguardarsi in  ${}^*R$  come corrispondente della  $|\cdot|$  di  $R$ , e per il Teor.2, ha la proprietà che  ${}^*|r| = r, \forall r \in {}^*R, r \geq 0$  e  ${}^*|r| = -r, r \in {}^*R, r < 0$ .

(3) Ogni  $\beta \in R_F$  può rappresentarsi, in modo unico, come somma di un numero finito standard (la sua parte standard "st $\beta$ ") e di un numero  $c \in R^\circ$  (cfr. [7], p.52).

6.- Ogni successione reale  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , sottoinsieme di  $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ , è un elemento  $y \in \hat{\mathbb{R}}$ , cui corrisponde in  ${}^*(\hat{\mathbb{R}})$  l'elemento standard  ${}^*y$  che, per il Teorema 2, risulta essere una successione, sottoinsieme di  ${}^*\mathbb{N} \times {}^*\mathbb{R}$ , tale che:

$${}^*y_{{}^*n} = {}^*(y_n) \quad \forall {}^*n \in {}^*\mathbb{N}, \quad \text{con } {}^*n \text{ standard,}$$

che ha le stesse proprietà di  $y$ , che siano esprimibili con enunciati di  $\Omega_0$ .

Lo stesso vale per ogni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , perché ad  $f$ , elemento di  $\hat{\mathbb{R}}$ , corrisponde l'elemento standard  ${}^*f$  ( ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ ) tale che:

$${}^*f({}^*x) = {}^*(f(x)) \quad \forall {}^*x \in {}^*\mathbb{R}, \quad \text{con } {}^*x \text{ standard.}$$

Siccome un elemento *standard* di  ${}^*\mathbb{R}$  si può riguardare come elemento di  $\mathbb{R}$ , nel seguito possiamo anche non usare l'asterisco per tali elementi.

Teorema 3.- Dati  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in [a,b]$ ,  $l \in \mathbb{R}$ , le seguenti proposizioni sono equivalenti:

$$P_1) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : (x \in [a,b] \wedge |x-x_0| < \delta) \implies |f(x) - l| < \alpha$$

$$P_2) \quad \forall x \in {}^*[a,b]^{(4)} : x \simeq x_0 \implies {}^*f(x) \simeq l$$

Dim.-  $P_1) \implies P_2)$  si deve dimostrare che, se  $x \in {}^*[a,b]$ :

(4) Fissato  $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ , esso è un elemento di  $\hat{\mathbb{R}}$  cui corrisponde  ${}^*[a,b]$  che, per il Teorema 1, è estensione propria di  $[a,b]$ : per es., se  $x_0 \in [a,b]$ ,  $x_0 + c$  ( $c \in \mathbb{R}^0$ ) è un elemento di  ${}^*[a,b]$  che non appartiene ad  $[a,b]$ .

$$(10) \quad x \underset{\sim}{\simeq} x_0 \implies |{}^*f(x) - \ell| < \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

La proposizione  $P_1)$  è una formula  $F$  appartenente ad  $\Omega_0$ , e quindi, per il Teorema 2,  ${}^*F \in {}^*\Omega_0$ , cioè, ricordando la convenzione stabilita prima di enunciare il Teorema,

$$(11) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : (x \in {}^*[a,b] \wedge |x-x_0| < \delta) \implies |{}^*f(x) - \ell| < \alpha.$$

In particolare, fra gli  $x \in {}^*[a,b]$  verificanti la  $|x-x_0| < \delta$  ci sono quelli infinitamente vicini a  $x_0$ , i quali soddisfano questa limitazione per ogni  $\delta \in \mathbb{R}^+$ . Allora, se  $x \underset{\sim}{\simeq} x_0$ ,  $\delta$  non dipende da  $\alpha$ , e quindi  ${}^*F$  si può scrivere nella forma (10).

$P_2) \implies P_1)$  : Se  $\delta = \delta_0$  con  $\delta_0$  un qualunque infinitesimo (in dipendente da  $\alpha$ ), la  $P_2)$  si può scrivere nella forma (11), e quindi la conclusione segue dal Teorema 2.

Con le opportune modifiche, se  $X$  è un insieme arbitrario, si deduce la seguente caratterizzazione della continuità in  $x_0 \in X$  di una  $f$ , definita in  $X$ :

$P'_1)$   $f$  è continua in  $x_0$ .

$$P'_2) \quad \forall x \in {}^*X : x \underset{\sim}{\simeq} x_0 \implies {}^*f(x) \underset{\sim}{\simeq} {}^*f(x_0) \quad (5).$$

---

(5) Si noti come si ottiene immediatamente la continuità della funzione composta  $f \circ f_1$  in  $x_0$ , se  $f_1(x)$  è continua in  $x_0$  e  $f(x)$  è continua in  $f_1(x_0)$  :  $x \underset{\sim}{\simeq} x_0 \implies f_1(x) \underset{\sim}{\simeq} f_1(x_0) \implies f(f_1(x)) \underset{\sim}{\simeq} f(f_1(x_0))$ .

Teorema 4.- Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

$$P') \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall x, x' \in X \wedge |x-x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \alpha.$$

$$P'') \quad \forall x, x' \in {}^*X : x \simeq x' \implies {}^*f(x) \simeq {}^*f(x').$$

Dim.-  $P') \implies P'')$ : Nella formula  ${}^*F$  corrispondente alla formula  $F$  che esprime la  $P')$  si possono scegliere  $x, x'$  tali che  $x \simeq x'$ , e quindi si può concludere in maniera analoga alla prima parte del Teorema 3.

$P'') \implies P')$ : anche qui la dimostrazione è analoga a quella della seconda parte del Teorema 3.

Si osservi l'immediatezza della dimostrazione di un classico Teorema: Se  $f$  è continua in  $[a, b]$  è, ivi, uniformemente continua.

Si deve provare che

$$\forall x_1, x_2 \in {}^*[a, b] : x_1 \simeq x_2 \implies {}^*f(x_1) \simeq {}^*f(x_2).$$

Poiché  $a \leq x_1 \leq b$ , si ha  $x_1 \in R_F$ , e lo stesso vale per  $x_2$ .

Pertanto, essendo  $x_1 \simeq x_2$ , si ha che  $stx_1 = stx_2$  (cfr. n.5., in fine)  
Posto  $stx_1 = stx_2 = x_0$ , si ha  $x_0 \in [a, b]$ <sup>(6)</sup>, poiché  $x_1 \simeq x_0$  e  $x_2 \simeq x_0$ ,

---

(6) Se fosse  $x_0 > b$  sarebbe  $x_0 - x_1 > b - x_1 = \alpha_1 \in \mathbb{R}^+$ , e ciò è assurdo poiché essendo  $x_0 \simeq x_1$ ,  $|x_1 - x_0| < \alpha$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ . Analogamente, non è  $x_0 < a$ . È questa una proprietà degli intervalli chiusi e limitati  ${}^*[a, b]$ , che ogni loro punto è infinitamente vicino a qualche punto di  $[a, b]$ . Tale proprietà, come si potrebbe far vedere, caratterizza ogni compatto  $X \subset \mathbb{R}$ .

ciò implica, essendo  $f$  continua in  $x_0$ , che:

$$*f(x_1) \simeq *f(x_0) \text{ e } *f(x_0) \simeq *f(x_2), \text{ cioè } *f(x_1) \simeq *f(x_2)$$

E se  $X$  è un qualunque compatto di  $\mathbb{R}$ , vale la stessa conclusione.

*Accettato per la pubblicazione su  
proposta del Prof. R. SCOZZAFAVA*

B I B L I O G R A F I A

- [1] B. BARIGELLI - L. BASSI : *Probabilità disintegrabili e  $\sigma$ -additività*, Riv. Mat. Univ. Parma (in corso di stampa)
- [2] E. BARONE : *Sulle misure semplicemente additive non continue*, Atti Semin. Math. Univ. Modena, 27(1978), pp. 39-44
- [3] E. BARONE, A. GIANNONE, R. SCOZZAFAVA : *Atomic, nonatomic and continuous finitely additive measures: results and applications*, Quad. Ist. Mat. Univ. Lecce, Q. 6-1978
- [4] G. COLETTI, G. REGOLI : *Sulla funzione di distribuzione di una misura di probabilità finitamente additiva*, Rend. Mat. (in corso di stampa).
- [5] B. DE FINETTI : *Teoria della probabilità*, vol. 1 e 2, Einaudi, Torino (1970)
- [6] L. E. DUBINS : *Finitely additive conditional probabilities, conglomerability and disintegrations*, Ann. Probability, 3(1975), pp. 89-99.
- [7] A. GIANNONE : *Un'introduzione ai metodi non-standard attraverso le misure semplicemente additive*, Period. Matem. (5) 54(1978) nn. 3-4, pp. 41-58.
- [8] W. A. J. LUXEMBURG : *What is nonstandard analysis?*, Amer. Math. Monthly, 80(1973), n. 6, part. II, pp. 38-67
- [9] R. SCOZZAFAVA : *On finitely additive probability measures*, Trans. of the "8th Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, and Random Processes" Praga (1978), vol. B, pp. 175-180.

- [10] R. SCOZZAFAVA : *Completa additività su opportune successioni di insiemi di una misura di probabilità semplicemente additiva e fortemente non atomica*, Boll.Univ.Mat.Ital., (5) 16-B (1979), pp.639-648
- [11] R. SCOZZAFAVA : *Un esempio concreto di probabilità non  $\sigma$ -additiva la distribuzione della prima cifra significativa dei dati statistici,....*
- [12] R. SCOZZAFAVA : *Probabilità  $\sigma$ -additive e non*, Lezioni Scuola di perfez.in Matem., Univ. di Firenze, I semestre 1979-80
- [13] S. TULIPANI : *Sulle masse continue e invarianti per una trasformazione*, Rend.Mat.12(1979), pp.245-256
- [14] S. TULIPANI : *Model-Completion of theories of finitely additive measures with values in an ordered field*, Zeitschrift für Logik (in corso di stampa)
- [15] S. TULIPANI : *Invarianti per l'equivalenza elementare per una classe assiomatica*, Boll.Univ. Mat.Ital. (in corso di stampa).