ULTERIORI PROPRIETA' DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE GENERALIZZATE

E. Ferrari

ISTITUTO DI FISICA DELL'UNIVERSITA' - Roma -

INTRODUZIONE.-

Il presente lavoro è la continuazione e il completamento di un lavoro precedente, pubblicato nel 1979 nella collana dei "Quaderni di Lecce"[1]. In tale lavoro è stata definita una nuova classe di funzioni di una variabile, chiamate "funzioni trigonometriche generalizzate"(FTG). Tali funzioni sono contraddistinte da un intero positivo n, chiamato "ordine", e indicate con i simboli $A_n(x)$, $T_n(x)$, $S_n(x) = A_n(x)/T_n(x)$ [3]. Le relazioni fondamentali a cui soddisfano le suddette funzioni sono l'identità

$$A^n(x) + T^n(x) = 1 \tag{1}$$

---

1) E. FERRARI, Definizione e studio di una nuova classe di funzioni, che permettono una presentazione diversa dalle funzioni ellittiche, Quaderni dell'Istituto di Matematica dell'Università di Lecce Q.2-1979. (Nel seguito tale lavoro verrà indicato con il simbolo I). In tale lavoro è anche contenuto un breve richiamo alle principali proprietà delle funzioni ellittiche, per la cui discussione approfondita ci si è riferiti al noto testo di TRICOMI (Ref. 2).

2) F. TRICOMI , Funzioni ellittiche, Zanichelli (Bologna) 1951.

3) Seguendo la prassi usata in I, l'indicazione esplicita dell'ordine verrà generalmente omessa nei simboli, e, spesso, quando possibile, anche l'indicazione dell'argomento.

con la condizione $A(0) = 0$, $T(0) = 1$, le relazioni differenziali

$$\frac{dA}{dx} = T^{n-1} \quad ; \quad \frac{dT}{dx} = -A^{n-1} \tag{2}$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{T^2} \quad ; \quad \frac{d(1/S)}{dx} = -\frac{1}{A^2} \tag{3}$$

e le relazioni di complementarità

$$A(x) = T(m-x); \quad S(x) = 1/S(m-x) \tag{4}$$

ove m è un particolare valore reale (chiaramente dipendente dall'ordine n) per cui $A(m) = 1$, $T(m) = 0$.

In I è stato dato particolare risalto a quesi casi ($n = 3,4,6$) in cui si è trovata una connessione tra FTG e funzioni ellittiche.

Lo sviluppo più interessante si è avuto per $n = 4$, ove, estendendo opportunamente la definizione delle FTG in modo da farle dipendere anche da un parametro aggiuntivo λ, si è fornita una nuova maniera di presentare le funzioni ellittiche, mediante la quale sono state messe in luce alcune notevoli proprietà di simmetria, difficilmente riscontrabili nelle formulazioni correnti (quali possono essere trovate, p. es. in Ref. 2). Le equazioni (1) e (2), per le FTG estese di ordine 4 (indicate con $A(x|\lambda)$ e simili, con possibile omissione della specificazione del parametro e dell'argomento), si modificano nella seguente maniera:

$$A^4 + T^4 + 2\lambda A^2T^2 = 1 \tag{5}$$

$$\frac{dA}{dx} = T^3 + \lambda A^2T \quad ; \quad \frac{dT}{dx} = -A^3 - \lambda AT^2 \tag{6}$$

mentre le equazioni (3) e i valori delle funzioni in $x = 0$ restano invariati.

(L'equazione (4), con m dipendente da λ, vale solo per λ reale > -1).

Visto l'interesse dei risultati di tale trattazione, da I è stata ricavata una versione abbreviata, in lingua inglese, contenente solo le conclusioni più importanti [4]. Tuttavia, né in I né in Ref. 4 ha potuto trovar posto la discussione di alcune interessanti proprietà delle suddette funzioni, o perché sono state elaborate successivamente alla pubblicazione dei lavori suddetti, o perché, pur essendo già state studiate al momento della stesura di questi ultimi, si è ritenuto preferibile non riportarle in dettaglio per non appesantire eccessivamente la trattazione: e infatti in alcuni punti di I si trova un esplicito riferimento a problemi da discutere in altra sede. Poiché tali argomenti lasciati, per così dire, in sospeso vengono a costituire un insieme di informazioni rilevante nel quadro delle proprietà delle FTG, è apparso utile all'autore della presente nota di presentarli, riuniti insieme, all'attenzione di chiunque possa essere interessato all'approfondimento dello studio di tali funzioni.

Per quanto detto in precedenza, il presente lavoro avrà un carattere meno organico e più miscellaneo se confrontato con I, di cui, come già detto, esso costituisce sostanzialmente un complemento. La prima Sezione di questo lavoro si riferisce ad alcune proprietà generali delle FTG non discusse in precedenza. La seconda Sezione tratta in dettaglio il problema dell'integrazione di tali funzioni, ed è di interesse soprattutto applicativo. La terza Sezione, infine, è dedicata alla discussione di alcune importanti proprietà delle FTG di ordine 3, non riportate in I a causa della complessità delle loro dimostrazioni.

---

4) E. FERRARI, A new approach to elliptic functions via generalized trigonometric functions, Preprint n.157 dell'Istituto di Fisica dell'Università di Roma (1979).