(27) $$T^{*}f = \iint_A K^{(m)*}(z,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta,$$ dove si è posto

(28) $$K^{(m)*}(z,\zeta)=\iint_A d\xi_1 d\eta_1 \iint_A d\xi_2 d\eta_2 \dots \iint_A d\xi_{m-2} d\eta_{m-2} \iint_A K_m^{*}(z,\zeta_1)\dots K_1^{*}(\zeta_{m-1},\zeta)d\xi_{m-1}d\eta_{m-1}.$$

Tornando al nostro problema (11),(12), in virtù dei risultati di [2] esiste una ed una soluzione u appartenente allo spazio $\mathcal{U}(A)$.Essa è data da

(29) $$u = Gf ,$$

dove

(30) $$G = TT^{*} - TPT^{*}$$

essendo P il proiettore ortogonale di $\mathcal{L}^2(A)$ sul sottospazio $\Omega(A)$ di $\mathcal{L}^2(A)$ costituito dalle funzioni di $C^{\omega}(A)$ soluzioni della equazione omogenea

(31) $$E^{*}u = 0 \text{ in } A .$$

TEOREMI DI COMPLETEZZA PER LO SPAZIO $\Omega(A)$.

Facciamo vedere che, fissato un opportuno dominio $B \supset \bar{A}$, comunque si scelga $w \in H_m(A)$ soluzione di $E^{*}w = 0$ in A e comunque si scelga $\varepsilon > 0$, esiste $u \in H_m(B)$, soluzione di $E^{*}u = 0$ in B, tale che $||w-u||_A < \varepsilon$.(3)

(3) Ora e nel seguito la norma ed il prodotto scalare indicati sono quelli usuali dello spazio $\mathcal{L}^2(A)$.

A tale scopo premettiamo alcuni lemmi.

LEMMA I

Sia $u \in H_2(A)$ e $L^* = -(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$.

Sussiste la seguente implicazione :

$$\left[u|_{\partial A} = 0 \text{ e } L^* u|_{\partial A} = 0\right] \Rightarrow \left[Du|_{\partial A} = 0\right] .$$

Dimostrazione.

Posto $u = u_1 + iu_2$ (u_1 e u_2 reali), si ha $L^* u = -\frac{\partial u_1}{\partial x} - i\frac{\partial u_2}{\partial x} - i\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial y} =$

$= -\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} - i(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y})$.

Pertanto dev'essere :

$$\text{(i)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \\ & \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right. \qquad \text{su } \partial A.$$

D'altra parte, da $u_1 + iu_2 = 0$ su ∂A, consegue

$$\text{(ii)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{dy}{ds} = 0 \\ & \frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{dy}{ds} = 0 \end{aligned} \right. \qquad \text{su } \partial A.$$

Le (i),(ii) costituiscono un sistema omogeneo di quattro equazioni nelle incognite $\frac{\partial u_1}{\partial x}$, $\frac{\partial u_1}{\partial y}$, $\frac{\partial u_2}{\partial x}$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}$, il cui determinante è $(\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2 \neq 0$.

Pertanto l'unica soluzione di (i),(ii) è $\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$.

Osserviamo che, in virtù delle (17) che trasformano un qualsiasi operatore L_h^* $(h=1,2,\dots,m)$ del nostro problema in L^*, il lemma continua a sussistere se si sostituisce a L^* uno qualunque degli operatori L_h^*.

LEMMA II

Siano dati :

1) L, L^* gli operatori (13),(14) e sia $K(z,\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\bar{\zeta}-\bar{z}}$, $K^*(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\zeta-z}$

2) un dominio B di $\mathbb{R}^2$ tale che : i) $B \supset \bar{A}$; ii) $\forall z_\circ \in \complement\bar{A}$, $\exists z \in \complement\bar{B}$, tale che z e $z_\circ$ siano estremi di una poligonale tutta contenuta in $\complement\bar{A}$;

3) $w \in \mathcal{L}^2(A)$.

Sussiste la seguente implicazione :

$$\left((w,u)_A = 0\ ,\forall u \in C^\omega(B) \mid L^* u = 0 \text{ in } B\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{l}\exists \psi \in H_1(A)\ ,\ \text{tale che :}\\ \quad L\psi = w \text{ in } A \text{ e } \psi|_{\partial A} = 0\end{array}\right)$$

Dimostrazione.

Per ogni $z \in \complement\bar{B}$ poniamo $u(\zeta) = K^*(z,\zeta)$.

Risulta : $L_\zeta^* u = 0$ in B . Infatti

$$u(\zeta) = K^*(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi} L_\zeta \log|z-\zeta|$$

da cui

$$L_\zeta^* u = -\frac{1}{2\pi} L_\zeta^* L_\zeta \log|z-\zeta| = -\frac{1}{2\pi}\Delta_2 \log|z-\zeta| = 0.$$

Per ipotesi si ha

$$\iint_A w(\zeta)\overline{(K^*(z,\zeta))}d\xi d\eta = 0 \text{ ossia } \iint_A K(z,\zeta)w(\zeta)d\xi d\eta = 0.$$

Tale uguaglianza è vera per la 2) ii), per ogni $z \in \complement\bar{A}$

Posto $\psi(z) = \iint_A K(z,\zeta)w(\zeta)d\xi d\eta$ e $\phi(z) = \iint_A \log|z-\zeta|w(\zeta)d\xi d\eta$, e osservato che $K(z,\zeta) = -\frac{1}{2\pi} L_z \log|z-\zeta|$,risulta $\psi(z) = -\frac{1}{2\pi} L^*_z\phi(z)$.

E poiché $\phi(z)$ appartiene ad $H_2(B)$, (cfr. [3]) , la funzione $\psi(z)$ appartiene ad $H_1(B)$. Inoltre $L_z\psi = -\frac{1}{2\pi} L_z L^*_z\phi = \frac{1}{2\pi}\Delta_2\phi = w$ (formula di Poisson). Infine ψ ,come funzione di $H_1(B)$,attraversa con continuità ∂A(secondo le funzioni di H_1). Quindi $\psi_{|\partial A} = 0$.

Il lemma è così dimostrato.

In virtù delle (16) e (17),tale lemma continua a sussistere se si sostituisce L^* con l'operatore L o con uno degli operatori L^*_h o L_h.

Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA I

Siano L^*_1 e L^*_2 due degli operatori del nostro problema.

Sia $w \in C^{\omega}(A)\cap \mathcal{L}^2(A)$ tale che $L^*_1 L^*_2 w = 0$ in A.

Sia B un dominio soddisfacente la 2) del lemma precedente.

Sussiste la seguente implicazione :

$$\left\{(w,u)_A = 0 \ \forall u \in C^{\omega}(B) \text{ tale che } L^*_1 L^*_2 u = 0 \text{ in } B\right\} \Rightarrow \left\{w = 0 \text{ in } A\right\}$$

Dimostrazione.

Sia $h \in C^{\omega}(B)$ e tale che $L^*_2 h = 0$ in B. Per l'ipotesi ammessa sarà $(w,h)_A = 0$. Per il lemma II esisterà $\sigma \in H_1(A)$ tale che $L_2\sigma = w$ in A, $\sigma_{|\partial A}=0$.

Sarà,allora, sempre per l'ipotesi ammessa,

$$(*) \qquad (L_2\sigma ,u)_A = 0$$

dove u soddisfa le condizioni dell'enunciato. Dalla (*) segue $(\sigma,L^*_2 u)_A = 0$ e,ponendo

$$(**) \qquad v = L^*_2 u \quad ,$$

si trae

$$(***) \qquad (\sigma,v)_A = 0 \ .$$

La (***) sussiste per ogni $v \in C^{\omega}(B)$, tale che $L_1^* v = 0$ in B.

Infatti, data una tale v, esiste sempre una u verificante le condizioni dell'enunciato, tale che sussista la (**). Esisterà, allora, $\rho \in H_1(A)$ tale che $L_1 \rho = \sigma$ in A, $\rho_{|\partial A} = 0$.

Pertanto si avrà $w = L_2 \sigma = L_2 L_1 \rho$. Inoltre, essendo $\sigma \in H_1(A)$, si avrà $\rho \in H_2(A)$. Riesce quindi, $\rho_{|\partial A} = 0$, $L_1 \rho_{|\partial A} = 0$, $L_2^* L_1^* L_2 L_1 \rho = 0$ in A, cioé

$\Delta_2 \rho = 0$ in A, $\rho \in H_2(A) \cap H_4(A_\circ)$ per ogni $A_\circ$ tale che $\bar{A}_\circ \subset A$.

Ne viene (cfr. [2], p. 39) $\rho \equiv 0$ in A e, quindi, $w \equiv 0$

LEMMA III

Sia $u \in H_{n+1}(A)$ con $n \geqslant 1$.

Sussiste la seguente implicazione :

$$\left(u|_{\partial A} = 0 \text{ e } D^s L^* u|_{\partial A} = 0, 0 \leqslant |s| \leqslant n-1 \right) \Rightarrow \left(D^s u|_{\partial A} = 0 \;,\; 0 \leqslant |s| \leqslant n \right)$$

Dimostrazione per induzione.

Il lemma è vero per $n = 1$ (lemma I) .

Facciamo vedere che, se è vera l'implicazione (ipotesi induttiva)

$$\left(u|_{\partial A} = 0 \text{ e } D^s L^* u|_{\partial A} = 0,\; 0 \leqslant |s| \leqslant n-2 \right) \Rightarrow \left(D^s u|_{\partial A} = 0 \;,\; 0 \leqslant |s| \leqslant n-1 \right),$$

allora è anche vero che :

$$\left(u|_{\partial A} = 0 \text{ e } D^s L^* u|_{\partial A} = 0,\; 0 \leqslant |s| \leqslant n-1 \right) \Rightarrow \left(D^s u|_{\partial A} = 0 \;,\; 0 \leqslant |s| \leqslant n \right)$$

E' evidente che :

$$\left\{\begin{array}{l} u|_{\partial A}=0 \text{ e } D^sL^*u|_{\partial A}=0, \\ \text{per } 0\leq |s|\leq n-1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{j)}\quad u|_{\partial A}=0 \text{ e } D^sL^*u|_{\partial A}=0,\ 0\leq |s|\leq n-2 \\ \text{jj)}\quad \left.\dfrac{\partial^{n-1}L^*u}{\partial x^h\partial y^{n-1-h}}\right|_{\partial A}=0,\ 0\leq h\leq n-1 \end{array}\right\}$$

Dalla j),per l'ipotesi induttiva,consegue che $D^su|_{\partial A}=0,\ 0\leq |s|\leq n-1$.
D'altra parte la jj),scambiando l'ordine di derivazione,diviene :

$$\frac{\partial^{n-1}L^*u}{\partial x^h\partial y^{n-1-h}}=L^*\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^h\partial y^{n-1-h}}=0$$

su ∂A, $0\leq h\leq n-1$.

In virtù dell'ipotesi induttiva,si ha

$$\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^h\partial y^{n-1-h}}=0 \quad \text{su } \partial A \quad \text{per } 0\leq h\leq n-1.$$

Posto $u^{(n-1,h)}=\dfrac{\partial^{n-1}u}{\partial x^h\partial y^{n-1-h}}$, risulta $u^{(n-1,h)}\in H_2(A)$, e quindi, per il lemma I, si ha $Du^{(n-1,h)}=0$ su ∂A, ossia :

$$\text{(o)}\quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^h\partial y^{n-1-h}}=\frac{\partial^n u}{\partial x^{h+1}\partial y^{n-1-h}}=0$$

su ∂A, per $0\leq h\leq n-1$.

$$\text{(oo)}\quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^h\partial y^{n-1-h}}=\frac{\partial^n u}{\partial x^{h}\partial y^{n-h}}=0$$

Le (o),(oo) si possono scrivere : $\left.\dfrac{\partial^n u}{\partial x^h\partial y^{n-h}}\right|_{\partial A}=0$, per $0\leq h\leq n$.

Il lemma è così dimostrato.

L'implicazione è ancora valida se si sostituisce L^* con L^*_h ;

in virtù delle (16).

LEMMA IV

Siano:

1) A un dominio limitato di $\mathbb{R}^2$ propriamente regolare;

2) B un dominio soddisfacente la 2) del lemma II;

3) $w \in \mathcal{L}^2(A)$.

Sussiste la seguente implicazione :

$$\left\{(w,u)_A = 0,\ \forall u \in C^\omega(B) \text{ tale che } E^* u = 0 \text{ in } B\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists\, \sigma \in H_m(A) \text{ tale che :} \\ E\,\sigma = w \text{ in } A \text{ e } D^s\sigma|_{\partial A} = 0 \\ \text{per } 0 \le |s| \le m-1 \end{array}\right\}$$

Dimostrazione.

Per ogni $z \in \complement\bar{B}$, poniamo $u(\zeta) = K^{(m)^*}(z,\zeta) =$

$$= \iint_B d\xi_1 d\eta_1 \iint_B d\xi_2 d\eta_2 \ldots \iint_B d\xi_{m-2} d\eta_{m-2} \iint_B K_m^* (z,\zeta_1)\ldots K_1^* (\zeta_{m-1},\zeta) d\xi_{m-1} d\eta_{m-1}.$$

Risulta $u(\zeta) \in C^\omega(B)$. Pertanto, per l'ipotesi si ha :

$$\iint_A w(\zeta)\left(\overline{K^{(m)^*}(z,\zeta)}\right) d\xi d\eta = 0 \text{ , ossia } \iint_A K^{(m)}(z,\zeta) w(\zeta) d\xi d\eta = 0 .$$

Quest'ultima uguaglianza sussiste anche per ogni $z \in \complement\bar{A}$

Pertanto, posto $\sigma(z) = \iint_A K^{(m)}(z,\zeta)w(\zeta)d\xi d\eta$, risulta :

$\sigma \in H_m(B)$; $E\sigma = w$ in A ; $D^s\sigma|_{\partial A} = 0$ per $0 \le |s| \le m-1$ (poichè σ e le sue derivate, fino a quelle di ordine $m-1$, attraversano con continuità ∂A nel senso delle funzioni di H_m).

TEOREMA II

Sia $m \geq 2$. A e B soddisfino le ipotesi del lemma IV e sia $w \in C^{\omega}(A) \cap \mathcal{L}^2(A)$ tale che:

1) $E^{*}w = 0$ in A.

Sussiste la seguente implicazione:

$$\left((w,u)_A = 0,\ \forall\, u \in C^{\omega}(B) \text{ tale che } E^{*}u = 0 \text{ in } B \right) \Longrightarrow \left(w = 0 \text{ in } A \right)$$

Dimostrazione.

Sia $h \in C^{\omega}(B)$ tale che $L_2^{*} L_3^{*} \ldots L_m^{*} h = 0$ in B. Per l'ipotesi assunta riesce $(w,h)_A = 0$. In virtù del Lemma IV esiste $\sigma \in H_{m-1}(A)$ tale che $L_2 \ldots L_m \sigma = w$ in A, $D^s \sigma_{|\partial A} = 0$ per $0 \leq |s| \leq m - 2$. Sempre per l'ipotesi ammessa riesce, pertanto,

$$\text{(o)} \qquad (L_2 \ldots L_m \sigma, u)_A = 0,$$

dove u soddisfa le condizioni dell'enunciato.

Dalla (o) segue $(\sigma, L_2^{*} \ldots L_m^{*} u)_A = 0$ e, ponendo

$$\text{(oo)} \qquad v = L_2^{*} \ldots L_m^{*} u,$$

si deduce

$$\text{(ooo)} \quad (\sigma, v)_A = 0.$$

La (ooo) sussiste per ogni $v \in C^{\omega}(B)$ tale che $L_1^{*} v = 0$ in B. Infatti assegnata una tale v, esiste sempre una u verificante le condizioni dell'enunciato, tale che sussista la (oo). Per il lemma II esiste, pertanto, $\rho \in H_1(A)$, tale che $L_1 \rho = \sigma$ in A, $\rho_{|\partial A} = 0$. Si ha, pertanto, $w = L_2 \ldots L_m \sigma = L_1 \ldots L_m \rho$.

Inoltre, essendo $\sigma \in H_{m-1}(A)$, si ha $\rho \in H_m(A)$ come facilmente si dimostra usando il teorema di Lichtenstein-Friedrichs ed il fatto che $D^s\sigma_{|\partial A} = 0$ per $0 < \leq |s| \leq m-2$. Riesce, quindi, $\rho_{|\partial A} = 0$, $D^s L_1 \rho_{|\partial A} = 0$ per $0 \leq |s| \leq m-2$; in virtù del Lemma III, si ha, allora, $D^s\rho_{|\partial A} = 0$ per $0 \leq |s| \leq m-1$. Inoltre $L_m^* \ldots L_1^* L_m \ldots L_1 \rho = 0$ in $A, \rho \in H_m(A) \cap H_{2m}(A_o)$ per ogni A_o tale che $\bar{A}_o \subset A$. Se ne deduce, pertanto, (cfr. [2], pag. 39) $\rho \equiv 0$ in A e, quindi, $w \equiv 0$.

Dal teorema II consegue la determinazione di un sistema completo nel sottospazio $\Omega(A)$; le funzioni di tale sistema si ottengono considerando in B le soluzioni della equazione omogenea associata alll'operatore E^*; B soddisfa la 2) del Lemma II.

Supponiamo ora che A e B siano semplicemente connessi.

In virtù di teoremi di rappresentazione dovuti a T. Boggio le soluzioni in B di $E^*u = 0$ si possono rappresentare mediante le soluzioni, in B, di $L_i^* u = 0$ (i=1,2..,

Riportiamo qui di seguito, con riferimento agli operatori differenziali del nostro problema, due teoremi di rappresentazione di T. Boggio: [4]

1°) - Se $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2$, con $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ primi fra loro, allora ogni funzione U di $C^\omega(B)$ che soddisfa l'equazione $\mathcal{D}\, U = 0$ può rappresentarsi con la formula $U = U' + U''$, dove U' e U'' sono funzioni che soddisfano le equazioni $\mathcal{D}_1 U' = 0$ e $\mathcal{D}_2 U'' = 0$.

2°) - Ogni funzione U di $C^\omega(B)$ soddisfacente $\mathcal{D}^{p+1} U = 0$ può sempre rappresentarsi mediante $p+1$ funzioni $U_1, U_2, \ldots U_{p+1}$ che verificano l'equazione $\mathcal{D}\, U = 0$, per mezzo della formula $U = x^p U_1 + x^{p-1} U_2 + \ldots + x U_p + U_{p+1}$.

Applicando il Teorema 1°) al caso dei nostri operatori, se $E^* = L_1^* \ldots L_m^*$ con

$L_h^* \neq L_j^*$ per $h \neq j$, risulta

$$\omega = \sum_{h=1}^{m} u^{(h)},$$

dove ω è una generica soluzione in B di $E^*\omega = 0$ e le $u^{(h)}$ sono soluzioni in B delle equazioni omogenee associate agli operatori L_h^*, per $h = 1,2,...m$.

Più in generale, per i teoremi 1°) e 2°), se $E^* = L_1^{*s_1} \ldots L_p^{*s_p}$, con $s_i \in N$ e $s_1+s_2+\ldots+s_p = m$, per ω tale che $E^*\omega = 0$ in B, si ha

$$\omega = \sum_{h=1}^{p} (x^{s_h-1} u_{h,1} + x^{s_h-2} u_{h,2} + \ldots + x u_{h,s_h-1} + u_{h,s_h}) \tag{38}$$

con le $u_{h,j}$ $(1 \leq j \leq s_h)$ soluzioni della equazione omogenea associata all'operatore L_h^* in B.

Sia ω una soluzione in B dell'equazione $E^*\omega = 0$. Per essa sussiste la (38). D'altra parte, in ogni compatto contenuto in B (e, in particolare, in $\bar{A}$), per classici risultati si ha:

$$u_{h,j} = \lim_{n\to\infty} P_{h,j}^{(n)} , \tag{38'}$$

essendo $P_{h,j}^{(n)}$ un polinomio nella variabile complessa $x+i(\frac{\alpha_h}{\beta_h} x + \frac{1}{\beta_h} y)$.

Ne viene che la successione di funzioni

$$\{[x+i(\frac{\alpha_h}{\beta_h} x + \frac{1}{\beta_h} y)]^n\} \qquad (h = 1,\ldots,p;\ n = 0,1,2,\ldots)$$

costituisce, per la (38') e per il Teorema II, un sistema completo in $\Omega(A)$. Ordinando in una successione ad un solo indice quella testé indicata, si ottiene la successione $\{\omega_k\}$ $(k =1,2,\ldots)$.

Ciò premesso, ritornando al problema di determinare la forma esplicita dell'operatore G dato dalla (30), si ha

$$TT^*f = \iint_A K^{(m)}(z,\zeta_1)d\xi_1 d\eta_1 \iint_A K^{(m)*}(\zeta_1,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta =$$

$$= \iint_A f(\zeta)d\xi d\eta \iint_A K^{(m)}(z,\zeta_1)K^{(m)*}(\zeta_1,\zeta)d\xi_1 d\eta_1 .$$

Pertanto

$$\text{(39)} \qquad TT^{*} = \iint_{A} K^{(m)}(z,\zeta_1)K^{(m)*}(\zeta_1,\zeta)d\xi_1 d\eta_1 ,$$

con $K^{(m)}$ e $K^{(m)*}$ dati rispettivamente dalla (26) e (28) .

Tenendo presente il significato del proiettore P che figura nella (30), risulta

$$PT^{*}f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \omega_k \ , \ \text{con} \qquad a_k = (T^{*}f,\omega_k)_A =$$

$$= \iint_A \left(\iint_A K^{(m)*}(\zeta_1,\zeta) f(\zeta) d\xi d\eta \right) \bar{\omega}_k(\zeta_1) d\xi_1 d\eta_1 =$$

$$= \iint_A \left(\iint_A K^{(m)*}(\zeta_1,\zeta) \bar{\omega}_k(\zeta_1) d\xi_1 d\eta_1 \right) f(\zeta) d\xi d\eta \ .$$

Pertanto

$$PT^{*} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\iint_A K^{(m)*}(\zeta_1,\zeta) \bar{\omega}_k(\zeta_1) d\xi_1 d\eta_1 \right) \omega_k(z) \ , \qquad \text{da cui}$$

$$\text{(4o)} \quad TPT^{*} = \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A K^{(m)}(z,\zeta_1) \left(\iint_A K^{(m)*}(\zeta_2,\zeta)\omega_k(\zeta_2) d\xi_2 d\eta_2 \right) \omega_k(\zeta_1) d\xi_1 d\eta_1 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A K^{(m)}(z,\zeta_1)\omega_k(\zeta_1) d\xi_1 d\eta_1 \iint_A K^{(m)*}(\zeta_1,\zeta)\bar{\omega}_k(\zeta_1) d\xi_1 \ d \ _1 \ .$$

Infine, per le (39), (40), l'operatore di Green ha la seguente forma :

$$\text{(41)} \quad G = TT^{*} - TPT^{*} = \iint_A K^{(m)}(z,\zeta_1)K^{(m)*}(\zeta_1,\zeta) d\xi_1 d\eta_1 -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A K^{(m)}(z,\zeta_1)\omega_k(\zeta_1) d\xi_1 d\eta_1 \iint_A K^{(m)*}(\zeta_1,\zeta)\bar{\omega}_k(\zeta_1) d\xi_1 d\eta_1 \ .$$

Tale rappresentazione dell'operatore G può essere impiegata per il calcolo degli autovalori del seguente problema:

$$(1') \quad EE^{*} v - \lambda v = 0 \qquad v \in \mathcal{U}(A)$$

$$(2') \quad D^{s} v = 0 \qquad \text{su } \partial A \text{ , per } 0 \leq |s| \leq m-1$$

secondo la teoria esposta in [5] (cfr. pp. 69-71).