Consideriamo l'operatore differenziale lineare di ordine 2m a coefficienti reali e costanti

(1) $$\mathscr{D}_{2m} = \sum_{s=0}^{2m} a_s \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m-s}\partial y^s}, \qquad a_s \in \mathbb{R},\ s = 0,1,\dots,2m,$$

con la seguente ipotesi di ellitticità:

(2) $$\sum_{s=0}^{2m} a_s \xi_1^{2m-s} \cdot \xi_2^s \neq 0$$

per ogni vettore (ξ_1,ξ_2) di $\mathbb{R}^2$ tale che $\xi_1^2 + \xi_2^2 \neq 0$.

Dalla (2) consegue che $a_0 \neq 0$ e $a_{2m} \neq 0$.

Per $\xi_2 \neq 0$, dividendo per ξ_2^{2m} e ponendo $\frac{\xi_1}{\xi_2} = w$, la condizione (2) diventa :

(3) $$\sum_{s=0}^{2m} a_s w^{2m-s} \neq 0, \text{ per ogni } w \text{ reale.}$$

Questo implica che gli zeri del polinomio a I° membro della (3) sono tutti complessi e a due a due coniugati, essendo gli a_s reali. Se indichiamo tali zeri con $\alpha_h \pm i\beta_h (\beta_h \neq 0)$, $h=1,2,..,m$, il I° membro della (2) si può scrivere

(4) $$a_0 \prod_{h=1}^{m} [\xi_1 - (\alpha_h + i\beta_h)\xi_2][\xi_1 - (\alpha_h - i\beta_h)\xi_2].$$

Per analogia con la (4), l'operatore (1) si può rappresentare nel seguente modo

(5) $$\mathscr{D}_{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) = a_0 \prod_{h=1}^{m} \left[\frac{\partial}{\partial x} - (\alpha_h + i\beta_h)\frac{\partial}{\partial y}\right]\left[\frac{\partial}{\partial x} - (\alpha_h - i\beta_h)\frac{\partial}{\partial y}\right].$$

Se poniamo

(6) $$L_h = \frac{\partial}{\partial x} - (\alpha_h + i\beta_h)\frac{\partial}{\partial y} ,$$

indicato con L_h^* l'operatore formalmente aggiunto di L_h ,si ha

(7) $$L_h^* = -\frac{\partial}{\partial x} + (\alpha_h - i\beta_h)\frac{\partial}{\partial y} = -\left[\frac{\partial}{\partial x} - (\alpha_h - i\beta_h)\frac{\partial}{\partial y}\right] .$$

Pertanto si può scrivere

$$\mathcal{D}_{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = (-1)^m a_\circ \prod_{h=1}^{m} L_h L_h^* ,$$

oppure,per la permutabilità degli L_h e L_h^*,

$$\mathcal{D}_{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = (-1)^m a_\circ \prod_{h=1}^{m} L_h \cdot \prod_{h=1}^{m} L_h^* .$$

Infine, posto $E = \prod_{h=1}^{m} L_h$, e osservato che,detto E^* l'aggiunto formale di E, si ha $E^* = \left(\prod_{h=1}^{m} L_h\right)^* = \prod_{h=1}^{m} L_h^*$,

si può scrivere

(8) $$\mathcal{D}_{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = (-1)^m a_\circ EE^*$$

Sia A un dominio di R^2 (insieme aperto) limitato e propriamente regolare. Sia f una funzione di $\mathcal{L}^2(A)$.

Sia $\mathcal{U}(A)$ la classe delle funzioni u appartenenti a $H_m(A) \cap H_{2m}(A_\circ)$ per ogni dominio $A_\circ$ tale che $\bar{A}_\circ \subset A$. (1)

Consideriamo il seguente problema di valori al contorno :

(9) $$\mathcal{D}_{2m}\, u = f \quad \text{in } A ,$$

(10) $$D^s u = 0 \qquad \text{su } \partial A, \text{ per } \quad 0 \leq |s| \leq m-1.$$

---

(1) Per le notazioni usate si fa riferimento a [1]

Tenendo presente il significato dell'operatore $\mathcal{D}_{2m}$ e pensando conglobata la costante $(-1)^m a_0^{-1}$ nel dato f, il problema (9), (10) si può scrivere

$$EE^* u = f \qquad \text{in } A, \tag{11}$$

$$D^s u = 0 \qquad \text{su } \partial A, \quad \text{per } 0 \leq |s| \leq m-1. \tag{12}$$

Così formulato il problema è di tipo biarmonico generalizzato.[2]

Dimostreremo che esistono gli operatori T e T^* soluzione fondamentale rispettivamente di E e E^*. Ciò assicura [2'] l'esistenza e l'unicità della soluzione u del problema (11), (12) nella classe $\mathcal{U}(A)$, per ogni f di $\mathcal{L}^2(A)$.

Daremo, inoltre, una costruzione esplicita dell'operatore G di Green del nostro problema, per mezzo di T, T^* e di un operatore proiezione.

Procederemo nel seguente modo :

I)-mediante un opportuno cambiamento di variabili, trasformeremo gli operatori L_h e L_h^* dati da (6), (7), rispettivamente, negli operatori

$$L = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} \tag{13}$$

$$L^* = -\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}, \tag{14}$$

dei quali, come è noto, sono operatori soluzioni fondamentali rispettivamente

$$Tf = \frac{1}{2\pi}\iint_A \frac{f(\zeta)}{\bar{z} - \bar{\zeta}}\, d\xi d\eta \quad \text{e} \quad T^* f = \frac{1}{2\pi}\iint_A \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta\,,$$

dove $\zeta = \xi + i\eta$ e $z = x + iy$.

Ciò permette non solo di affermare che gli operatori L_h e L_h^* hanno soluzioni fondamentali, ma anche di darne una forma esplicita;

---

(2) Vedi [2]

(2') cfr. [2] pp. 38-40.

II)- successivamente proveremo che, detti T_h e T_h^* gli operatori soluzione fondamentale di L_h e L_h^*, e posto $T = T_m T_{m-1} \dots T_2 T_1$ e $T^* = T_1^* T_2^* \dots T_m^*$, gli operatori T e T^* sono rispettivamente soluzione fondamentale di L e L^*.

Ciò premesso, considerato l'operatore $L_h = \frac{\partial}{\partial x} - (\alpha_h + i\beta_h)\frac{\partial}{\partial y}$ $(\beta_h \neq 0)$, determiniamo le costanti reali $\gamma_{ij}^{(h)}$ $(i,j = 1,2 \; ; \; h = 1,2,\dots,m)$ in modo tale che, mediante la trasformazione

$$(15) \qquad \begin{cases} X = \gamma_{11}^{(h)} x + \gamma_{12}^{(h)} y \\ \\ Y = \gamma_{21}^{(h)} x + \gamma_{22}^{(h)} y \end{cases}$$

l'operatore L_h diventi $\frac{\partial}{\partial X} - i\frac{\partial}{\partial Y}$.

Si ha :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X}\gamma_{11}^{(h)} + \frac{\partial u}{\partial Y}\gamma_{21}^{(h)} \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X}\gamma_{12}^{(h)} + \frac{\partial u}{\partial Y}\gamma_{22}^{(h)} . \end{cases}$$

Pertanto l'operatore L_h, nelle variabili X e Y, diventa

$$\frac{\partial}{\partial X}\gamma_{11}^{(h)} + \frac{\partial}{\partial Y}\gamma_{21}^{(h)} - (\alpha_h + i\beta_h)\left(\frac{\partial}{\partial X}\gamma_{12}^{(h)} + \frac{\partial}{\partial Y}\gamma_{22}^{(h)}\right).$$

Perchè esso sia uguale a $\frac{\partial}{\partial X} - i\frac{\partial}{\partial Y}$ dev'essere

$$\begin{cases} \gamma_{11}^{(h)} - \alpha_h \gamma_{12}^{(h)} - i\beta_h \gamma_{12}^{(h)} = 1 \\ \\ \gamma_{21}^{(h)} - \alpha_h \gamma_{22}^{(h)} - i\beta_h \gamma_{22}^{(h)} = -i , \end{cases}$$

da cui risulta : $\gamma_{11}^{(h)} = 1$; $\gamma_{12}^{(h)} = 0$; $\gamma_{21}^{(h)} = \frac{\alpha_h}{\beta_h}$; $\gamma_{22}^{(h)} = \frac{1}{\beta_h}$.

Pertanto la trasformazione richiesta è :

$$(16)\qquad \begin{cases} X = x \\ Y = \dfrac{\alpha_h}{\beta_h}x + \dfrac{1}{\beta_h}y \end{cases}, \text{ da cui } \qquad (17)\qquad \begin{cases} x = X \\ y = -\alpha_h X + \beta_h Y . \end{cases}$$

Per quanto notato precedentemente,per l'operatore $\frac{\partial}{\partial X} - i\frac{\partial}{\partial Y}$ esiste una soluzione fondamentale data da

$$(18)\qquad \frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega} \frac{F(W)}{\bar{Z} - \bar{W}} dUdV,$$

dove :

$Z = X + iY$; $W = U + iV$;

Ω è il trasformato del dominio A mediante le (17) ;

$F(z) = F(X,Y)$ è la funzione composta mediante la f e le (17).

Tornando, tramite, le (16) ,alle variabili $z = x + iy$ e $\zeta = \xi + i\eta$, si ottiene,per la soluzione fondamentale $T_h f$ di $L_h u = f$, la seguente rappresentazione:

$$(19)\qquad T_h f = \frac{1}{2\pi}\iint_A \frac{f(\zeta)}{x - i\frac{\alpha_h}{\beta_h}x - i\frac{y}{\beta_h} - \xi + i\frac{\alpha_h}{\beta_h}\xi + i\frac{\eta}{\beta_h}} \left|\frac{\partial(U,V)}{\partial(\xi,\eta)}\right| d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi\beta_h}\iint_A \frac{f(\zeta)}{\left(1 - i\frac{\alpha_h}{\beta_h}\right)x - \frac{i}{\beta_h}y - \left(1 - i\frac{\alpha_h}{\beta_h}\right)\xi + \frac{i}{\beta_h}\eta} d\xi d\eta .$$

Procedendo in modo analogo si ha :

$$(20)\qquad T_h^{*}f = \frac{1}{2\pi\beta_h}\iint_A \frac{f(\zeta)}{\left(1 + i\frac{\alpha_h}{\beta_h}\right)\xi + \frac{i}{\beta_h}\eta - \left(1 + i\frac{\alpha_h}{\beta_h}\right)x - i\frac{y}{\beta_h}} d\xi d\eta$$

La (19)e la (20) forniscono la forma esplicita degli operatori soluzione fondamentale di L_h e L_h^* .

Per dimostrare la II^parte osserviamo che, essendo T_h operatore soluzione fondamentale di L_h, si ha

$$L_h T_h = I \qquad \text{per } h = 1,2,\dots\dots,m$$

dove I é l'operatore identico.

Pertanto, applicando m volte la proprietà associativa, risulta

$$\left(L_1 L_2 \dots\dots L_{m-1} L_m\right)\left(T_m T_{m-1} \dots\dots\dots T_2 T_1\right) f = \left(L_1 \dots L_{m-1}\right)\left(L_m T_m\right)\left(T_{m-1} \dots T_1\right) f =$$

$$= \dots\dots\dots = L_1\left(L_2 T_2\right) T_1 f = L_1 T_1 f = f \ .$$

Resta così provato che $T = T_m T_{m-1} \dots T_2 T_1$ è operatore soluzione fondamentale di $E = L_1 L_2 \dots L_{m-1} L_m$.

Analogamente $T^* = T_m^* T_{m-1}^* \dots T_2^* T_1^*$ è operatore soluzione fondamentale di $E^* = L_1^* L_2^* \dots L_{m-1}^* L_m^*$.

Per determinare la forma esplicita di T e T^*, poniamo

$$(21) \qquad K_h(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi\left[(\beta_h - i\alpha_h)x - iy - (\beta_h - i\alpha_h)\xi + i\eta\right]} ,$$

$$(22) \qquad K_h^*(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi\left[(\beta_h + i\alpha_h)\xi + i\eta - (\beta_h + i\alpha_h)x - iy\right]} ,$$

per h = 1,2,...m .

Allora le (19) e (20) prendono la seguente forma :

$$(23) \qquad T_h f = \iint_A K_h(z,\zeta) f(\zeta)\, d\xi\, d\eta \ ,$$

$$(24) \qquad T_h^* f = \iint_A K_h^*(z,\zeta) f(\zeta)\, d\xi\, d\eta \ .$$

Si ha pertanto

$$T_2T_1f = T_2\iint_A K_1(z,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta = \iint_A K_2(z,\zeta_1)d\xi_1 d\eta_1\iint_A K_1(\zeta_1,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta =$$

$$= \iint_A f(\zeta)d\xi d\eta\iint_A K_2(z,\zeta_1)K_1(\zeta_1,\zeta)d\xi_1 d\eta_1 = \iint_A K^{(2)}(z,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta,$$

dove si è posto

$$K^{(2)}(z,\zeta) = \iint_A K_2(z,\zeta_1)K_1(\zeta_1,\zeta)d\xi_1 d\eta_1 \quad ;\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1 .$$

Analogamente si ha :

$$T_3T_2T_1f = T_3\iint_A K^{(2)}(z,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta = \iint_A K_3(z,\zeta_1)d\xi_1 d\eta_1\iint_A K^{(2)}(\zeta_1,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta =$$

$$= \iint_A f(\zeta)d\xi d\eta\iint_A K_3(z,\zeta_1)K^{(2)}(\zeta_1,\zeta)d\xi_1 d\eta_1 =$$

$$= \iint_A f(\zeta)d\xi d\eta\iint_A K_3(z,\zeta_1)d\xi_1 d\eta_1\iint_A K_2(\zeta_1,\zeta_2)K_1(\zeta_2,\zeta)d\xi_2 d\eta_2 =$$

$$= \iint_A f(\zeta)d\xi d\eta\iint_A d\xi_1 d\eta_1\iint_A K_3(z,\zeta_1)K_2(\zeta_1,\zeta_2)K_1(\zeta_2,\zeta)d\xi_2 d\eta_2 = \iint_A K^{(3)}(z,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta,$$

dove si è posto

$$K^{(3)}(z,\zeta) = \iint_A d\xi_1 d\eta_1\iint_A K_3(z,\zeta_1)K_2(\zeta_1,\zeta_2)K_1(\zeta_2,\zeta)d\xi_2 d\eta_2 \quad \text{con } \zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2 .$$

In generale, per $T = T_m T_{m-1}\cdots\cdots T_2T_1$, si avrà

$$(25) \qquad Tf = \iint_A K^{(m)}(z,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta ,$$

dove si è posto

$$(26) \qquad K^{(m)}(z,\zeta) = \iint_A d\xi_1 d\eta_1\iint_A d\xi_2 d\eta_2\cdots\iint_A d\xi_{m-2}d\eta_{m-2}\iint_A K_m(z,\zeta_1)\cdots K_1(\zeta_{m-1},\zeta)d\xi_{m-1}d\eta_{m-1}$$

con $\zeta_h = \xi_h + i\eta_h$, $h = 1,2,\ldots,m-1.$

Analogamente si ha

$$(27)\qquad T^{*}f = \iint_A K^{(m)*}(z,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta, \text{dove si è posto}$$

$$(28)\quad K^{(m)*}(z,\zeta)=\iint_A d\xi_1 d\eta_1 \iint_A d\xi_2 d\eta_2 \dots \iint_A d\xi_{m-2} d\eta_{m-2} \iint_A K_m^{*}(z,\zeta_1)\dots K_1^{*}(\zeta_{m-1},\zeta)d\xi_{m-1}d\eta_{m-1}.$$

Tornando al nostro problema (11),(12), in virtù dei risultati di [2] esiste una ed una soluzione u appartenente allo spazio $\mathcal{U}(A)$. Essa è data da

$$(29)\qquad u = Gf ,$$

dove

$$(30)\qquad G = TT^{*} - TPT^{*}$$

essendo P il proiettore ortogonale di $\mathcal{L}^2(A)$ sul sottospazio $\Omega(A)$ di $\mathcal{L}^2(A)$ costituito dalle funzioni di $C^{\omega}(A)$ soluzioni della equazione omogenea

$$(31)\qquad E^{*}u = 0 \text{ in } A .$$

TEOREMI DI COMPLETEZZA PER LO SPAZIO $\Omega(A)$.

Facciamo vedere che, fissato un opportuno dominio $B \supset \bar{A}$, comunque si scelga $w \in H_m(A)$ soluzione di $E^{*}w = 0$ in A e comunque si scelga $\varepsilon > 0$, esiste $u \in H_m(B)$, soluzione di $E^{*}u = 0$ in B, tale che $||w-u||_A < \varepsilon$.(3)

---

(3) Ora e nel seguito la norma ed il prodotto scalare indicati sono quelli usuali dello spazio $\mathcal{L}^2(A)$.