

Il problema del rimbalzo unidimensionale e sue approssimazioni non convesse^(*)

Michele CARRIERO

Eduardo PASCALI^(**)

Summary.- *It is shown an approximation theorem via non convex penalized problems for the one dimensional bounce problem.*

Then non uniqueness phenomenon and sufficient conditions for uniqueness are exhibited.

Introduzione.- Recentemente è stato proposto lo studio della G-convergenza per i problemi di rimbalzo.

In questa nota, come primo avvio a tale studio, si dimostra un teorema di approssimazione tramite penalizzazioni non convesse per il problema del rimbalzo in una dimensione.

Si illustra poi il fenomeno di non unicità e si danno condizioni sufficienti per l'unicità della soluzione.

Desideriamo ringraziare il Prof. E. De Giorgi per averci proposto questa ricerca e per le utili discussioni sull'argomento.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del CNR-Gnafa

(**) Indirizzo degli autori: Istituto di Matematica, Via Arnesano

0. Il problema del rimbalzo unidimensionale.

Sia $\bar{\Omega} = [0, T]$, $f \in L^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$.

Definizione.

Diremo che u , lipschitziana in $\bar{\Omega}$, è soluzione del pdr (problema del rimbalzo) se soddisfa le seguenti condizioni:

- (i) $u \leq 0$ in $\bar{\Omega}$;
- (ii) $\int_{\bar{\Omega}} [\ddot{u}(t) - f(t)] \phi(t) dt \leq 0$ per ogni $\phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega}; [0, +\infty[)$
- (iii) per $u < 0$
 $\ddot{u} - f = 0$ nel senso delle distribuzioni;
- (iv) per ogni $t \in \Omega$ esistono $\dot{u}^+(t)$ e $\dot{u}^-(t)$; esistono $\dot{u}^+(0)$, $\dot{u}^-(T)$
e si ha:

$$\frac{1}{2} [\dot{u}^\pm(t)]^2 = \frac{1}{2} [\dot{u}^\pm(0)]^2 + \int_0^t f(\eta) \dot{u}(\eta) d\eta \quad \text{per } t \in \bar{\Omega}$$

(conservazione dell'energia) .

Osservazione I - L'esistenza per ogni $t \in \Omega$ della derivata destra $\dot{u}^+(t)$ e sinistra $\dot{u}^-(t)$ segue dalla (ii), osservato che la funzione

$$w(t) = u(t) - \int_0^t \left(\int_0^\eta f(\xi) d\xi \right) d\eta \quad \text{è concava e}$$

$$F(t) = \int_0^t \left(\int_0^\eta f(\xi) d\xi \right) d\eta \quad \text{è derivabile.}$$

Diremo condizioni iniziali ammissibili per il pdr condizioni del tipo

$$u(t_0) = s \quad , \quad \dot{u}^+(t_0) = b \quad ,$$

con $0 \leq t_0 < T$, $s < 0$, $b \in \mathbb{R}$ oppure

$$0 \leq t_0 < T, \quad s = 0, \quad b \leq 0.$$

s 1. Approssimazioni non convesse per il pdr unidimensionale e teorema di esistenza.

Sia (u_h) una successione di funzioni per cui si abbia

$$u_h \in C^1(\bar{\Omega}; R), \quad \ddot{u}_h \in L^1(\bar{\Omega}; R) \quad \text{e}$$

$$\int_{\bar{\Omega}} [\ddot{u}_h(t) + \psi_h(u_h(t))] \phi(t) dt = \int_{\bar{\Omega}} f(t) \phi(t) dt \quad \text{per ogni } \phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega}; R).$$

Su f e ψ_h (termine di penalizzazione) facciamo le seguenti ipotesi:

(1) $f \in L^1(\bar{\Omega}; R)$;

(2) $\psi_h \in C^0(R; R)$

$$\psi_h(\xi) \begin{cases} = 0 & \text{per } \xi \leq 0 \\ > 0 & \text{per } \xi > 0 \end{cases} ;$$

(3)₁ comunque si fissino ξ_1, ξ_2 (con $0 < \xi_1 < \xi_2$)

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \psi_h(\xi) = +\infty, \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2 ;$$

$$(3)_2 \quad \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0^+ \\ h \rightarrow +\infty}} \frac{\psi_h(\xi)}{\int_0^\xi \psi_h(\eta) d\eta} = +\infty. \quad (1)$$

(1) Per esempio si può prendere

$$\psi_h(\xi) = h(\xi^3 + |\xi|^3).$$

Altri esempi (comprendenti ψ_h non convesse) verranno dati alla fine di questo paragrafo.

Sussiste il seguente

Lemma 1 - Comunque si fissi una condizione iniziale (s,b) ammissibile per il pdr, ogni successione (u_h) di soluzioni dei problemi

$$(P_h) \left\{ \begin{array}{l} \int_{\bar{\Omega}} [\ddot{u}_h(t) + \psi_h(u_h(t))] \phi(t) dt = \int_{\bar{\Omega}} f(t) \phi(t) dt \quad \text{per ogni } \phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega}; R) \\ u_h(0) = s \\ \dot{u}_h^+(0) = b \end{array} \right.$$

verifica le seguenti condizioni

[A] (u_h) è equilipschitziana (quindi equicontinua) ed equilimitata;

[B] posto

$$\alpha_h(u_h(t)) = \int_0^t \psi_h(u_h(\eta)) \dot{u}_h(\eta) d\eta ,$$

esiste $c > 0$ per cui

$$0 \leq \alpha_h(u_h(t)) \leq c \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{N} \text{ e } t \in \bar{\Omega} ;$$

[C] per ogni $t \in \bar{\Omega}$ risulta

$$\max_{h \rightarrow +\infty} \lim u_h(t) \leq 0 .$$

Dimostrazione.

[A] Da (P_h) si ottiene l'identità dell'energia

$$(\dot{u}_h(t) \ddot{u}_h(t) + \dot{u}_h(t) \psi_h(u_h(t))) = \dot{u}_h(t) f(t) \quad \text{q.o. in } \bar{\Omega} ;$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{u}_h^2(t) + \dot{u}_h(t) \psi_h(u_h(t)) = \dot{u}_h(t) f(t) \quad \text{q.o. in } \bar{\Omega} \text{ e quindi)}$$

$$(4) \quad \frac{1}{2} \dot{u}_h^2(t) = \frac{1}{2} b^{2-\alpha_h}(u_h(t)) + \int_0^t \dot{u}_h(n) f(n) dn \quad \text{per } t \in \bar{\Omega}.$$

Allora

$$0 \leq \frac{1}{2} \dot{u}_h^2(t) \leq \frac{1}{2} b^{2+} \int_0^t |f(n)| |\dot{u}_h(n)| dn \leq \frac{1}{2} b^{2+} \|f\|_{L^1(\bar{\Omega}; R)} \cdot \|\dot{u}_h\|_{C^0(\bar{\Omega}; R)}$$

per ogni $t \in \bar{\Omega}$ e per ogni $h \in \mathbb{N}$.

Quindi

$$\|\dot{u}_h\|_{C^0(\bar{\Omega}; R)}^2 \leq b^{2+2} \|f\|_{L^1(\bar{\Omega}; R)} \cdot \|\dot{u}_h\|_{C^0(\bar{\Omega}; R)} \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{N}, \text{ pertanto}$$

$$(5) \quad \|\dot{u}_h\|_{C^0(\bar{\Omega}; R)} \leq \text{costante (indipendente da } h).$$

Da (5) segue [A].

[B] Segue da (4) e (5), tenuto conto dell'ipotesi su f .

[C] Supponiamo che per \bar{t} e $\bar{\Omega}$ si abbia

$$\max_{h \rightarrow +\infty} \lim u_h(\bar{t}) > \sigma > 0;$$

ne segue che per una opportuna estratta di $(u_h(\bar{t}))$, $(u_{h(k)}(\bar{t}))$, riesce

$$u_{h(k)}(\bar{t}) > \sigma > 0.$$

Allora

$$\int_{\sigma/2}^{\sigma} \psi_{h(k)}(\xi) d\xi \leq \int_s^{u_{h(k)}(\bar{t})} \psi_{h(k)}(\xi) d\xi = \alpha_{h(k)}(u_{h(k)}(\bar{t})) \leq c,$$

contro l'ipotesi (3)₁. ■

Teorema 1 - Se (u_h) (con u_h soluzione del problema (P_h)) converge
uniformemente in $\bar{\Omega}$ ad una funzione u , allora u è solu-
zione del pdr.

La dimostrazione si articola in diversi punti. Intanto u è lipschitziana in $\bar{\Omega}$ (per [A]) ed è non positiva (per [C]).

Proviamo (ii).

Sia $\phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega}; [0, +\infty[)$; per ogni $h \in \mathbb{N}$ si ha

$$\int_{\bar{\Omega}} [\ddot{u}_h(t) - f(t)] \phi(t) dt = - \int_{\bar{\Omega}} \psi_h(u_h(t)) \phi(t) dt \leq 0,$$

quindi

$$\int_{\bar{\Omega}} u_h(t) \ddot{\phi}(t) dt - \int_{\bar{\Omega}} f(t) \phi(t) dt \leq 0 \quad ;$$

allora, per $h \rightarrow +\infty$, riesce

$$\int_{\bar{\Omega}} u(t) \ddot{\phi}(t) dt - \int_{\bar{\Omega}} f(t) \phi(t) dt \leq 0, \quad \text{cioè} \quad \int_{\bar{\Omega}} [\ddot{u}(t) - f(t)] \phi(t) dt \leq 0.$$

Dimostriamo, ora, la condizione (iii).

Per $u(t) < 0$, $u_h(t)$ è non positiva definitivamente; allora, da (P_h) , $\ddot{u}_h - f = 0$ (definitivamente) nel senso delle distribuzioni e quindi, per l'ipotesi, $\ddot{u} - f = 0$ nel senso delle distribuzioni.

Osservazione II - Per $u(t) < 0$ si ha q.o.

$$\ddot{u}_h(t) = f(t) \quad \text{definitivamente,}$$

quindi la successione (\dot{u}_h) è equicontinua; poiché (\dot{u}_h) è anche equi-limitata (cfr. (5)), la successione (\dot{u}_h) ha una estratta che converge uniformemente.

E' così provata l'esistenza di \dot{u} per $u(t) < 0$ e la sua continuità. Resta da provare la conservazione dell'energia.

A tale scopo premettiamo alcune proposizioni.

[D] Esiste una opportuna estratta di (u_h) , indicata ancora con (u_h) , ed esiste una funzione non negativa, uniformemente continua, ϕ per cui, posto $\phi_h(t) = \frac{1}{2} \dot{u}_h^2(t) + \alpha_h(u_h(t))$, risulta $\lim_{h \rightarrow +\infty} \phi_h(t) = \phi(t)$ uniformemente in $\bar{\Omega}$.

Dall'identità dell'energia (4) e dalla (5), segue che $\|\phi_h\|_{C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R})} \leq \text{costante}$; inoltre da

$$\phi_h(t) = \dot{u}_h(t) \ddot{u}_h(t) + \psi_h(u_h(t)) \dot{u}_h(t) = f(t) \dot{u}_h(t)$$

segue che (ϕ_h) è equicontinua.

La tesi segue dal teorema di Ascoli-Arzelà.

Osserviamo che per $u(t) < 0$ risulta

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \dot{u}^2(t).$$

[E] Sia $\tau \in \Omega$ zero isolato di u , allora

$$\dot{u}^+(\tau) = -\dot{u}^-(\tau).$$

Infatti, essendo

$$\dot{u}^-(\tau) = \lim_{t \rightarrow \tau^-} \dot{u}(t) [= \lambda_1] \quad \text{e}$$

$$\dot{u}^+(\tau) = \lim_{t \rightarrow \tau^+} \dot{u}(t) [= \lambda_2], \quad \text{per } t_1 < \tau < t_2 \text{ si ha}$$

$$|\lambda_1^2 - \lambda_2^2| \leq |\lambda_1^2 - \dot{u}^2(t_1)| + |\dot{u}^2(t_1) - \dot{u}^2(t_2)| + |\dot{u}^2(t_2) - \lambda_2^2|$$

e per $t_1 \rightarrow \tau^-$ e $t_2 \rightarrow \tau^+$, dalla continuità di ϕ , si ha

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2$$

Ne segue che $|\lambda_1| = |\lambda_2|$.

E' facile riconoscere (tenuto conto del fatto che u è non positiva) che non può essere $\lambda_1 = \lambda_2$ se non per $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Osservazione III - Nelle ipotesi del teorema I, per ogni $\tau \in \Omega$ si ha
 (6) $\dot{u}^-(\tau) \geq \max_{h \rightarrow +\infty} \lim_{\tau} \dot{u}_h(\tau) \geq \min_{h \rightarrow +\infty} \lim_{\tau} \dot{u}_h(\tau) \geq \dot{u}^+(\tau)$.

Dim.

Sia $t > \tau$

da $\ddot{u}_h(t) = f(t) - \psi_h(u_h(t))$ q.o. si ha

$$\dot{u}_h(t) - \dot{u}_h(\tau) = \int_{\tau}^t f(\eta) d\eta - \int_{\tau}^t \psi_h(u_h(\eta)) d\eta \leq \int_{\tau}^t f(\eta) d\eta;$$

quindi

$$u_h(t) - u_h(\tau) \leq (t - \tau) \dot{u}_h(\tau) + \int_{\tau}^t \left(\int_{\tau}^{\eta} f(\xi) d\xi \right) d\eta.$$

Pertanto

$$u(t) - u(\tau) \leq (t - \tau) \min_{h \rightarrow +\infty} \lim_{\tau} \dot{u}_h(\tau) + \int_{\tau}^t \left(\int_{\tau}^{\eta} f(\xi) d\xi \right) d\eta$$

da cui

$$\frac{u(t) - u(\tau)}{t - \tau} \leq \min_{h \rightarrow +\infty} \lim_{\tau} \dot{u}_h(\tau) + \frac{1}{t - \tau} \int_{\tau}^t \left(\int_{\tau}^{\eta} f(\xi) d\xi \right) d\eta;$$

per $t \rightarrow \tau^+$ si ha

$$(7) \quad \dot{u}^+(\tau) \leq \min_{h \rightarrow +\infty} \lim_{\tau} \dot{u}_h(\tau).$$

Sia ora $t < \tau$; con procedimento analogo al precedente si ottiene

$$(8) \quad \dot{u}^-(\tau) \geq \max_{h \rightarrow +\infty} \lim_{\tau} \dot{u}_h(\tau)$$

Da (7) e (8) segue la (6).

[F] Se τ è uno zero interno agli zeri di u , risulta $\dot{u}(\tau) = \ddot{u}(\tau) = 0$
e $\lim_{h \rightarrow +\infty} \dot{u}_h(\tau) = \dot{u}(\tau)$.

(cfr. osservazione III).

[G] Se $u(\tau) = 0$ ed esiste un intorno I di τ per cui:

$$u(t) < 0 \quad \text{per } t < \tau \quad (\text{per } t > \tau), \text{ teI}$$

$$u(t) = 0 \quad \text{per } t \geq \tau \quad (\text{per } t \leq \tau), \text{ teI},$$

allora $\dot{u}(\tau) = 0$

Dim. Intanto nelle ipotesi di [G] è $\phi(\tau) = 0$.

Se ciò non fosse vero, sarebbe in un opportuno intorno $I^\circ(\underline{c} I)$
 $\phi(t) > \sigma > 0$. Detto $I_+^\circ = \{t \in I^\circ \mid t > \tau\}$, si avrebbe $u(t) = \dot{u}(t) = 0$
 ed anche, per l'osservazione III, $\lim_{h \rightarrow +\infty} \dot{u}_h(t) = 0$ in I_+° .

Allora per ogni $t \in I_+^\circ$, risulta $\alpha_h(u_h(t)) > \sigma$ definitivamente e, per
 l'ipotesi (3)₂, $\lim_{h \rightarrow +\infty} \psi_h(u_h(t)) = +\infty$.

Inoltre è facile provare che esiste una costante $c^\circ > 0$ (indipenden
 te da h) per cui

$$0 \leq \int_{t_1}^{t_2} \psi_h(u_h(\eta)) d\eta \leq c^\circ \quad \text{per ogni } t_1, t_2 \in \bar{\Omega}.$$

Sia, ora, m il più piccolo intero positivo maggiore di $\frac{2c^\circ}{t_2 - t_1}$,
 essendo $[t_1, t_2] \subset I_+^\circ$.

Consideriamo la successione di funzioni, misurabili e limitate,

$$\{\psi_h(u_h(t))\}^m = \begin{cases} \psi_h(u_h(t)) & \text{se } \psi_h(u_h(t)) \leq m \\ m & \text{se } \psi_h(u_h(t)) > m \end{cases} ;$$

tale successione converge puntualmente alla funzione costante m .

Riesce inoltre
$$\int_{t_1}^{t_2} \{\psi_h(u_h(t))\}^m dt \leq \int_{t_1}^{t_2} \psi_h(u_h(t)) dt \leq c^0 \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{N}.$$

Per il Lemma di Fatou si ha $m(t_2 - t_1) \leq c^0$; quindi un assurdo.

Ora, da $\phi(\tau) = 0$ segue che $\lim_{t \rightarrow \tau^-} \dot{u}^2(t) = 0$ e perciò $\lim_{t \rightarrow \tau^-} \dot{u}(t) = 0$

Ne deduciamo così l'esistenza di $\dot{u}^-(\tau) = 0 = \dot{u}^+(\tau)$.

Osserviamo esplicitamente che è anche $\phi(t) = 0$ per $t \in I$, $t > \tau$.

[H] Se $u(\tau) = 0$ e τ è d'accumulazione di zeri di u , allora $\dot{u}(\tau) = 0$.

In questo caso esiste una successione di punti (ξ_h) per cui

$$u(\xi_h) < 0, \quad \dot{u}(\xi_h) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \xi_h = \tau.$$

Ne segue che
$$\lim_{t \rightarrow \tau} \phi(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow \tau} [\dot{u}^-(t)]^2 = \lim_{t \rightarrow \tau} [\dot{u}^+(t)]^2.$$

Osservazione IV.

Da quanto provato in [D]-[H] segue che:

$$\phi(t) = \frac{1}{2} [\dot{u}^\pm(t)]^2 \quad \text{in} \quad \bar{\Omega},$$

e

$\lim_{h \rightarrow +\infty} \dot{u}_h = \dot{u}$ q.o. in $\bar{\Omega}$ ((\dot{u}_h) non convergendo, eventualmente,

negli zeri isolati di u).

Dall'osservazione precedente segue la condizione (iv). Infatti, per il Teorema di Lebesgue, dalla (4) (passando al limite, per $h \rightarrow +\infty$, per una opportuna estratta, cfr. [D]) si ottiene

$$\frac{1}{2} [\dot{u}^\pm(t)]^2 = \frac{1}{2} b^2 + \int_0^t f(\eta) \dot{u}(\eta) d\eta \quad \text{per } t \in \bar{\Omega}.$$

Da quanto provato segue il teorema 1. ■

Osservazione V -

Da quanto dimostrato risulta che se sopprimiamo l'ipotesi $(3)_2$, la (iv) può essere formulata solo in questi termini:

"esiste una funzione $\phi(t) \geq 0$, uniformemente continua, per cui

$$\frac{1}{2} b^2 + \int_0^t f(\eta) \dot{u}(\eta) d\eta = \phi(t) \quad \text{con}$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \dot{u}^2(t) \quad \text{per } u(t) < 0."$$

Corollario.

Nelle ipotesi poste, per ogni dato iniziale (s,b) ammissibile per il pdr esiste almeno una soluzione del pdr in $\bar{\Omega}$ con dati iniziali (s,b) ; essa è limite uniforme in $\bar{\Omega}$ di una successione (u_h) di soluzioni del problema (P_h) .

Dim.

Per la [A] del Lemma 1, fissata una qualsiasi successione (u_h) (di soluzione di (P_h)) esiste una estratta uniformemente convergente in $\bar{\Omega}$ ad una funzione u , soluzione del pdr in $\bar{\Omega}$ (per il Teorema 1). ■

Osservazione VI - Si riconosce facilmente che l'ipotesi $(3)_2$ può essere sostituita dalla seguente

$(3)_2$, Esiste $\theta_h(n)$, crescente in n , tale che

$$\theta_h(\alpha_h(\xi)) \leq \psi_h(\xi) \quad \text{e per } n > 0 \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \theta_h(n) = +\infty.$$

Diamo alcuni esempi per la scelta dei termini di penalizzazione ψ_h verificanti $(3)_1$ e $(3)_2$.

1) Sia, per ogni $h \in \mathbb{N}$,

$$\psi_h(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{per } \xi \leq 0 \\ h \left(\sum_{i=1}^n a_i \xi^i \right) & \text{per } \xi > 0 \end{cases}$$

con $a_i > 0$, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$.

2) Sia, per ogni $h \in \mathbb{N}$,

$$\psi_h(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi \leq 0 \\ h \xi^{1/2} & 0 < \xi < 1 \\ h \xi & 1 \leq \xi \end{cases}.$$

Illustriamo, infine, un caso per cui si verifica $(3)_1$ e $(3)_2$.

3) Sia $v \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ con $v(\xi) = 0$ per $\xi \leq 0$.

Supponiamo che $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} v(\xi) = +\infty$ e $v(\xi) \leq \dot{v}(\xi)$ per ogni ξ .

Allora $\psi_h(\xi) = h\dot{v}(h\xi)$ verifica $(3)_1$ e la $(3)_2$, con $\theta_h(n) = hn$.

§ 2. Ulteriori proprietà delle soluzioni del pdr.

Nella ipotesi $f \in C^0(\bar{\Omega}; R)$ per le soluzioni del pdr di cui al teorema 1, sussistono i seguenti fatti:

[I] Se per $\tau \in \Omega$ si ha $u(\tau) = \dot{u}(\tau) = 0$ ed $f(\tau) < 0$, allora τ è uno zero isolato di u ed inoltre $\ddot{u}(\tau) = f(\tau)$.

Dim.

Per la continuità di f e l'ipotesi $f(\tau) < 0$ si ha che esistono $\eta < 0$, $\delta > 0$ tali che per ogni $h \in N$ e $t \in]\tau - \delta, \tau + \delta[$ si ha $\ddot{u}_h(t) \leq \ddot{u}_h(t) + \psi_h(u_h(t)) = f(t) < \eta < 0$; in definitiva, per $h \in N$ e $t \in]\tau, \tau + \delta[$, $\ddot{u}_h(t) < \eta < 0$. Allora per $t \in]\tau, \tau + \delta[$, risulta

$$\dot{u}_h(t) - \dot{u}_h(\tau) < \eta (t - \tau) \quad \text{e quindi}$$

$$(9) \quad u_h(t) - u_h(\tau) - (t - \tau)\dot{u}_h(\tau) < \eta \frac{(t - \tau)^2}{2} .$$

Essendo $\dot{u}(\tau) = 0$, è anche $\lim_{h \rightarrow +\infty} \dot{u}_h(\tau) = 0$; pertanto da (9), per $h \rightarrow +\infty$, si ottiene

$$(10) \quad u(t) \leq \eta \frac{(t - \tau)^2}{2} < 0 \quad \text{per} \quad t \in]\tau, \tau + \delta[.$$

Analogamente si ha

$$(11) \quad u(t) \leq \eta \frac{(t - \tau)^2}{2} < 0 \quad \text{per} \quad t \in]\tau - \delta, \tau[.$$

Da (10) e (11) segue la tesi, tenendo anche conto della continuità di f .

[L] Sia $\tau \in \Omega$ tale che $u(\tau) = \dot{u}(\tau) = 0$;

(j) Se $f(\tau) > 0$ allora τ è zero interno agli zeri di u .

(jj) Se $f(\tau) = 0$ τ può non essere zero isolato.

In ogni caso risulta $\ddot{u}(\tau) = 0$

Dim.

(j) Non può esistere un intorno τ in cui $u(t) \neq 0$; in questo caso, si otterrebbe, per un opportuno intorno di τ , $u(t) > 0$.

In base a ciò, per provare quanto asserito, basta riconoscere che τ non può essere uno zero di accumulazione per zeri isolati di u . Se, allora, τ fosse di accumulazione per zeri isolati di u , esisterebbe una successione (ξ_h) con $\dot{u}(\xi_h) = 0$ e $\lim_{h \rightarrow +\infty} \xi_h = \tau$; siccome in un opportuno intorno di τ è $\ddot{u}(t) = f(t)$, ne segue che $f(\tau) = \ddot{u}(\tau) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{\dot{u}(\xi_h) - \dot{u}(\tau)}{\xi_h - \tau} = 0$.

Pertanto τ è zero interno agli zeri di u .

(jj) E' sufficiente provare che sono vere le seguenti asserzioni:

- Se τ è minimo relativo per f , allora τ non è zero isolato per u .

= Se τ è massimo relativo proprio per f , allora τ è zero isolato per u .

- Se lo fosse in un opportuno intorno J di τ , si avrebbe

$\ddot{u}(t) = f(t) \geq 0$; integrando si ottiene $u(t) \geq 0$ in J .

= Per l'ipotesi su f , esiste un intorno J di τ , per cui

(12) $f(t) < 0$ per $t \in J \setminus \{\tau\}$.

Se esistesse un intorno $J_1 \subset J$ in cui $u(t) = 0$, si otterrebbe, per [I], che tali punti sono zeri isolati di u . Ne segue che per provare l'asserzione basta provare che τ non è punto di accumulazione per zeri

isolati. Se lo fosse, dovendo essere $\ddot{u}(t) = f(t)$ in un opportuno intorno di τ , si otterrebbe $f(t) \geq 0$ per qualche punto in J .

Si riconosce che, comunque, è $\ddot{u}(\tau) = 0$. ■

§ 3. Problema dell'unicità.

Esempio di non unicità.

Diamo un esempio di non unicità per il pdr unidimensionale con f di classe $C^{\infty(2)}$.

Per la costruzione è utile la seguente considerazione di facile verifica.

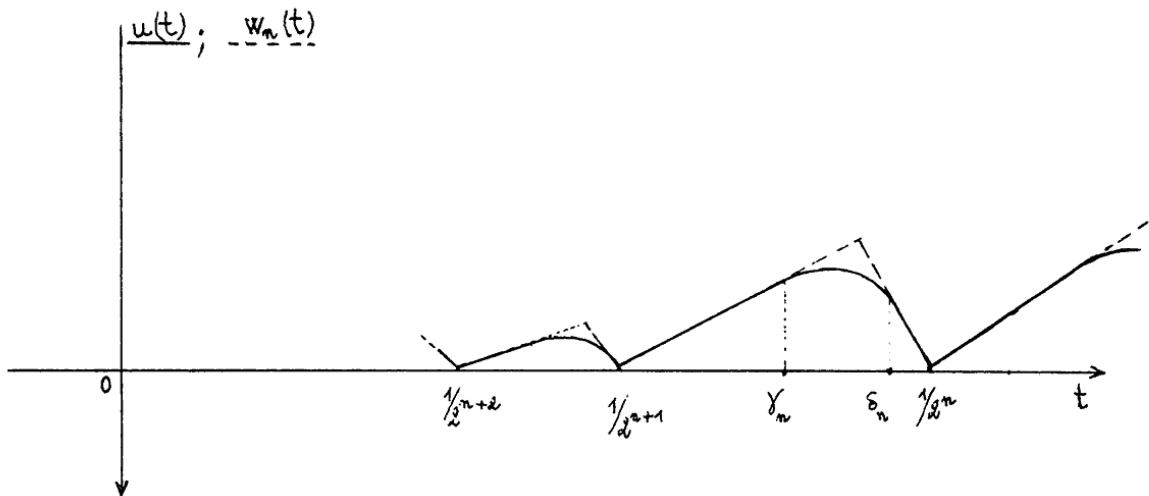
Sia $h \in C_0^{\infty}(R; [0, +\infty[)$, soddisfacente le condizioni

$$\int_R h(t) dt = 1 \quad \text{e} \quad \int_R t \cdot h(t) dt = 0, \quad \text{allora posto}$$

$$(h*v)(t) = \int_R v(t-y)h(y)dy, \quad \text{si ha}$$

- (a) $h*v$ è convessa se v è convessa,
- (b) $h*v = v$ se $v(t) = a t + b$.

Consideriamo ora



(2) Il fenomeno di non unicità ci è stato segnalato (oralmente) dal prof. L. Amerio.

$$W_n(t) = \max\{2^{-(n+1)^2} (2^{-(n+1)} - t); 2^{-n^2} (t - 2^{-n})\} \quad \text{per } 2^{-(n+1)} \leq t \leq 2^{-n}.$$

Sia $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}; [0, +\infty[)$ con $h(t) = 0$ per $|t| \geq 1$, $\int_{-1}^1 h(t) dt = 1$
 e $\int_{-1}^1 t \cdot h(t) dt = 0$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $h_n(t) = \alpha_n h(\beta_n t)$ dove è

$$0 < \beta_n \leq 5^{-1} \cdot 2^{-(n+1)} \cdot (1 + 2^{2n+1})^{-1} \quad \text{ed } \alpha_n \text{ tale che } \int_{\mathbb{R}} h_n(t) dt = 1.$$

Posto $u(t) = (h_n * W_n)(t)$ per $2^{-(n+1)} \leq t \leq 2^{-n}$, risulta $u(t) \leq 0$.

Inoltre esistono (γ_n) , (δ_n) con $2^{-(n+1)} < \gamma_n < \delta_n < 2^{-n}$

per cui $2^{-(n+1)} \leq t \leq \gamma_n$ e $\text{yesupp } h_n : W_n(t-y) = a_n(t-y) + b_n$,

$$\delta_n \leq t \leq 2^{-n} \quad \text{e} \quad \text{yesupp } h_n : W_n(t-y) = a'_n(t-y) + b'_n.$$

Ne segue, cfr. (b),

$$u(t) = W_n(t) \quad \text{per } 2^{-(n+1)} \leq t \leq \gamma_n \quad \text{o} \quad \delta_n \leq t \leq 2^{-n}.$$

Inoltre per la (a) $\ddot{u}(t) \geq 0$. E' altresì evidente che $u(0) = \dot{u}^+(0) = 0$.

Posto, in $[0, 1]$, $f(t) = \ddot{u}(t)$, f risulta traccia di una funzione di classe C^∞ . Consideriamo il pdr in $\bar{\Omega} = [0, 1]$ col dato f e condizione iniziale ammissibile $(0, 0)$ nello zero.

E' evidente che la funzione $u(t)$ precedentemente costruita è soluzione di questo pdr con le condizioni iniziali assegnate. E' facile altresì provare che la funzione identicamente nulla è anche soluzione dello stesso pdr.

§ 4. Alcune condizioni sufficienti per l'unicità della soluzione del pdr.

Sussiste il seguente

Teorema 2. Se f è costante a tratti in $\bar{\Omega}$, allora il pdr ammette una unica soluzione in $\bar{\Omega}$ verificante un assegnato dato iniziale ammissibile (s,b) .

Dim.

E' sufficiente provare il teorema per $f(t) = c$ in $\bar{\Omega}$. Per $c = 0$ l'unicità è ovvia; sia allora $c \neq 0$. Se u è soluzione del pdr verificante le condizioni $u(0) = s$, $\dot{u}^+(0) = b$, si ha (dalla (iv))

$$(13) \quad \frac{1}{2} [\dot{u}^\pm(t)]^2 = \frac{1}{2} b^2 - s c + c u(t) \quad \text{per } t \in \bar{\Omega}.$$

Da (13) ricaviamo, per $u(t) = 0$,

$$(14) \quad [u^\pm(t)]^2 = b^2 - 2 s c .$$

La tesi consegue, allora, in virtù di noti teoremi di unicità locale, dalle seguenti osservazioni.

1. Se è $b^2 - 2 s c > 0$, tutti gli eventuali zeri di u sono isolati; inoltre se τ_1 e τ_2 sono due zeri consecutivi ($\tau_2 > \tau_1$) si ha:

$$(15) \quad c(\tau_2 - \tau_1) = 2\sqrt{b^2 - 2 s c};$$

da cui

$$(16) \quad \tau_2 - \tau_1 = \frac{2}{c} \sqrt{b^2 - 2 s c} .$$

Da (15) segue che (c) per $c < 0$ u ammette al più uno zero, (d) per $c > 0$ gli zeri consecutivi di u sono equidistanti (e quindi sono in numero finito).

2. Se è $b^2 - 2sc = 0$ si ha

(e) $c > 0$: $u(t) \geq 0$ e quindi $u(t) = 0$ (per (13));

(f) $c < 0$: u ammette al più uno zero.

Per provare che (f) è vera, basta tenere conto che si ha:

u ha solo zeri isolati e non può avere più di uno zero isolato;

che u non possa avere più di uno zero isolato segue da (15); che abbia solo zeri isolati segue dal fatto che negli zeri τ di u è $\dot{u}(\tau) = 0$ ed $f(\tau) < 0$. Evidentemente u non ha zeri se $b^2 - 2sc < 0$. ■

La dimostrazione del teorema 2 suggerisce il seguente risultato.

Teorema 3. Se u_1 ed u_2 hanno entrambe un numero finito di zeri e sono soluzioni in $\bar{\Omega}$ del pdr con dato $f \in C^0(\bar{\Omega}; R)$ e stesse condizioni iniziali ammissibili (s, b) , allora coincidono in $\bar{\Omega}$.

Dim.

Basta tenere conto del fatto che per i problemi di Cauchy del tipo

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t) \\ u(0) = s \\ \dot{u}^+(0) = b \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t) \\ u(\tau) = 0 \\ \dot{u}(\tau) = -\dot{u}^-(\tau) \end{cases}$$

c'è unicità locale. ■ Sussiste inoltre il seguente

Teorema 4.

Se u è soluzione del pdr in $\bar{\Omega}$ con $f \in C^0(\bar{\Omega}; R)$ e verifica la condizione

"esiste $p > 0$ tale che $[u^\pm(\tau)]^2 \geq p$, per $u(\tau) = 0$,"

allora u è l'unica soluzione del pdr.

Dim.

La condizione posta assicura che gli eventuali zeri di u sono isolati. Inoltre, per $f > 0$,⁽³⁾ considerando due zeri isolati consecutivi τ_1, τ_2 , si ha

$$\begin{aligned} \ddot{u}(\xi)(\tau_2 - \tau_1) &= f(\xi)(\tau_2 - \tau_1) = \dot{u}^-(\tau_2) - \dot{u}^+(\tau_1) = \\ &= |\dot{u}^-(\tau_2)| + |\dot{u}^+(\tau_1)| \geq 2\sqrt{p} > 0. \end{aligned}$$

Da ciò

$$(17) \quad \tau_2 - \tau_1 \geq \frac{2\sqrt{p}}{f(\xi)} \geq \frac{2\sqrt{p}}{M}$$

dove $M = \max_{x \in \bar{\Omega}} f(x)$.

La (17) assicura che siamo nelle ipotesi del teorema 3. ■

Concludiamo col

Teorema 5. Sia $f \in C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ con $\dot{f} \in L^1(\bar{\Omega}; [0, +\infty[);$

(g) Se $f(0) > 0$, per ogni condizione iniziale ammissibile $(s, b) \neq (0, 0)$, esiste una unica soluzione del pdr in $\bar{\Omega}$.

(h) Per ogni condizione iniziale ammissibile (s, b) verificante la disuguaglianza $b^2 - 2sf(0) > 0$ il pdr ammette una unica soluzione in $\bar{\Omega}$.

Dim.

Dalla conservazione dell'energia segue

$$(18) \quad \frac{1}{2} [\dot{u}^\pm(\tau)]^2 \geq \frac{1}{2} b^2 - s f(0). \quad \text{per } u(\tau) = 0.$$

(g) Dalla (18) segue l'unicità in virtù del Teorema 4.

⁽³⁾ Osserviamo esplicitamente che se $f \leq 0$, c'è unicità per la soluzione del pdr, essendoci al più uno zero per u .

(h) Intanto è $(s,b) \neq (0,0)$.

Se $f(0) > 0$ si ricade nel caso (g); se $f(0) < 0$, si ha che per $f(t) \leq 0$ u ha al più uno zero e per $f(t) > 0$ valgono le considerazioni di (g) . ■

Per il Teorema 5 si può prendere ad esempio

$$f(t) = a t \pm 1 \quad \text{con } a \geq 0, t \in [0, T] , \quad \text{oppure}$$
$$f(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i \quad a_i \geq 0 (i=0,1,\dots,n), t \in [0, T] .$$

B I B L I O G R A F I A

- [1] E. DE GIORGI *Γ -convergenza e G -convergenza,*
BUMI (5) 14-A(1977),213-220 .
- [2] E. DE GIORGI *Convergence problems for functionals
and operators, Proceedings of the In
ternational meeting on Recent Methods
in non linear analysis; Roma may 8/12-1978
(Edts.E.De Giorgi; E.Magenes; U. Mosco);*
- [3] M.SCHATZMAN *Sur une classe de problèmes hyperboliques
non linéaires, C.R. Acad.Sc.Paris, t.277
(8 octobre 1973) Série A,pp.671-674.*
- [4] M.SCHATZMAN *Le système différentiel $(d^2u/dt^2) + \partial\Phi(u) \ni f$
avec conditions initiales, C.R. Acad.Sc.
Paris t. 284 (14 mars 1977) Série A,
pp. 603-606.*
- [5] A.SIGNORINI *Meccanica Razionale, vol. II,cap.XVII,n.14.*
- [6] S. SPAGNOLO *Problemi di G -convergenza,relazione per
il convegno GNAFA 1976.*

Accettato per la pubblicazione su
proposta del Prof. E. DE GIORGI