Introduzione

E' relativamente facile convincere un matematico attivo od un insegnante di matematica della scuola secondaria che i metodi di insegnamento sono in genere diversi. Più difficile convincerli che non necessariamente l'ultimo modello offerto sul mercato è il migliore, ma in ogni caso la varietà delle posizioni circa la didattica delle matematiche è tale che difficilmente può essere contestata. Se ci fissiamo sulla proposta di iniziare il processo di apprendimento delle matematiche dalla teoria degli insiemi procedendo per aggiunzioni successive di strutture algebriche, topologiche, d'ordine. lungo uno schema formalistico-deduttivo dobbiamo notare come essa nel panorama internazionale abbia avuto delle realizzazioni diverse o nessuna realizzazione a seconda del particolare contesto sociale, politico e culturale accolta nella riforma Faure in Francia, tradotta nella New Math in USA, solo accennata per il momento in URSS. A chi contrabbanda l'"insiemistica" come unico modello moderno e progressista dell'insegnamento delle matematiche si possono indicare i criteri ed i testi che lo smentiscono il manifesto del 65 contro la New Math, le obiezioni di Griffiths, la posizione di R Thom ecc. Questo aspetto è già stato discusso dall'autore (1) in altro lavoro e là si rimanda per la bibliografia, qui ci si limita a ricordare i libri di Stella Baruk e di Morris Kline (2)

Un problema era stato lasciato incompleto in quel lavoro, problema di particolare rilevanza nella situazione italiana in cui - e per fortuna - riforme del tipo di quella Faure non si sono viste. E' uno di questi casi in cui l'arretratezza, la disfunzione burocratica ed i contrasti politici potrebbero tradursi in vantaggi perché - alla luce delle critiche all'insiemistica - si può ancora scegliere tra alternative possibili.

Quale è dunque la natura di questa scelta? Riguarda solo le tecniche di-

---

(1) Tonietti 1977.

(2) Baruk 1973 e 1977; Kline 1973 e 1977

dattiche di trasmissione delle conoscenze matematiche o c'è qualche cosa di più? In effetti se fosse vero come hanno scritto una volta i Bourbakisti che esiste "La matematica" ma non esistono "Le matematiche"[3] a questo si ridurrebbero le alternative e le critiche all'"insiemistica" diventerebbero limitate e molto fragili. Quindi anche le critiche dell'attuale assetto delle matematiche che cominciano dal piede della didattica debbono necessariamente passare ad occuparsi del piede della ricerca, pena l'immobilismo e la caduta. In definitiva risulta inefficace ogni critica riguardante gli attuali criteri di insegnamento della matematica se essa non si lega alla possibilità di trasformare dalle radici le attuali matematiche(e viceversa[4]).

Scopo del presente lavoro è proprio quello di mostrare che le alternative riguardano soprattutto le immagini delle matematiche, i loro criteri di valore e di rilevanza, le pratiche della ricerca, i prodotti di tali pratiche. E' innegabilmente vero che lo schema algebrico-formalista risulta quello dominante (ma spesso con correzioni di natura pragmatica), tuttavia si possono individuare incompatibili con esso e ad esso dichiaratamente antagonisti altri punti di vista. Ci interessa allora illustrare analiticamente, accanto al simbolo esasperato (e per questo spesso irrealistico) dello schema algebrico-formalista, cioè il bourbakismo, posizioni così profondamente diverse che nella giustapposizione delle citazioni parlano quasi da sole del loro dissenso.

Vedremo come questo dissenso non è limitabile alla sfera in cui è ammesso anche secondo gli statuti epistemologici tacitamente creduti dalla comunità dei matematici, cioè la filosofia, i fondamenti della matematica. Esso investe il corpo delle matematiche nel suo complesso arrivando in qualche caso addirittura a negare la validità di certi teoremi, a negare certi criteri di rigore, a negare il modello assiomatico-deduttivo. Essendo questo

(3) Bourbaki 1948 p. 35

(4) Boiti ed al. 1979, Baracca et al. 1979

ultimo modello particolarmente legato oggi alla valorizzazione dei metodi algebrici sarà inevitabile che le critiche si caricheranno di valenze legate a particolari settori, soprattutto la geometria e certi settori dell'analisi. Però anche in questo caso non sarà sempre possibile ridurre il contrasto al litigio tra settori specialistici perché è in genere presente la tendenza a offrire una propria personale concezione generale riguardo l'unità della matematica, la storia, ed il rapporto con le scienze della natura.

Chiameremo tutto questo ideologia dei matematici per sottolineare a) la distinzione dalla filosofia b) l'inscindibile relazione con le pratiche ed i prodotti matematici c) la germinazione all'interno della comunità dei matematici. Useremo invece il termine filosofia per indicare quel corpo di idee che, prodotto dai filosofi di professione, occupa un settore ben preciso all'interno della divisione accademica del lavoro. In questo senso distinguiamo l'ideologia delle matematiche dalla filosofia della matematica, ma va da se che non ne vogliamo negare le influenze reciproche, specie circa la questione dei fondamenti.

Il termine ideologia si è caricato di molti significati diversi, da quello di Marx - la falsa coscienza - a quello dei sociologi della conoscenza come Mannheim. Non interessa in questa sede approdondire e catalogare le distinzioni anche perché è stato fatto esaurientemente da Rossi-Landi(5). Ci limiteremo a parafrasare una definizione di Adam Schaff (6) adattandola al nostro caso:

> Con ideologia intendo indicare quelle convinzioni espresse o sottaciute preanalitiche o formalizzate accuratamente, ma in ogni caso fondate su un sistema di valori, che i matematici (come tutti) hanno quanto ai fini della loro ricerca ed alle regole da rispettare per farne. Sono queste convinzioni che determinano gli atteggiamenti dei matematici, cioè come si comportano di fronte ai teoremi, ai problemi, alla didat-

---

(5) Rossi-Landi 1978

(6) Schaff 1977 p. 147

tica, alle istituzioni, agli altri ricercatori, all'opinione pubblica. Viceversa il loro comportamento effettivo sarebbe inspiegabile senza tali elementi.

Non ci si deve aspettare però in questo lavoro un'analisi esauriente dell'ideologia dei matematici contemporanei. Forse essa è di fatto irrealizzabile, come ogni pretesa di ricucire una unità reale della ricerca scientifica che non ne sia anche una drastica trasformazione e "semplificazione", tuttavia si possono facilmente identificare alcune evidenti lacune: la posizione di Thom, quella di Lawvere, comunità matematiche particolari come la Russo-sovietica e quella cinese. Il caso Thom è stato trattato a parte(7) perché a mio avviso il suo dissenso è quello che apre potenzialmente più prospettive di trasformazioni reali e radicali insieme. Si pensa di trattare gli altri frammenti successivamente, se sarà possibile superare gli innumerevoli ostacoli frapposti ad analisi di questo tipo. Ad esempio lo è la lingua nel caso dei matematici cinesi, se non ci si vuole limitare ai materiali di seconda mano di fonte statunitense. Esso è aggravato e reso quasi inseparabile dalla quasi impossibilità di trovare i fondi per fare le traduzioni, stante l'attuale natura delle istituzioni di ricerca e la pura gestione di potere attuata da chi, controllandole, impedisce un reale pluralismo culturale. Di fatto la corporazione dei matematici e dei ricercatori scientifici in genere non ama affatto le analisi del tipo qui proposte - quasi si vergognasse di acquisire una conoscenza approfondita di ciò che essa è veramente - e quando non le ostacola con <u>tutti</u> i mezzi, come corrispondere quasi alla norma, certo non le incoraggia e le aiuta (8).

In ogni caso anche il presente lavoro come il precedente (1) fa parte di un progetto più vasto che cerca di ricostruire e capire gli aspetti didattici, ideologici e storici delle matematiche contemporanee, a questo mira e solo in ciò troverà piena realizzazione e giustificazione. Infatti si comin

---

(7) Tonietti 1979

(8) Donini & Tonietti 1977

cia a cancellare un luogo comune creduto dall'uomo della strada e propagandato troppo spesso dai filosofi e dai divulgatori. Essi si ostinano a farci credere che la matematica sia una, riducendola ad una sola logica, quando al contrario si danno controversie reali, non riducibili a quella eterna tra verità ed errore . Alcuni matematici attivi manifestano spesso maggiore consapevolezza circa la falsa caricatura rappresentata dal detto "La matematica non è una opinione". Visto che la diffusione di tale luogo comune è dovuta alla manipolazione capitalistica dei mezzi di comunicazione di massa ed alla particolare ideologia con cui le scienze vengono insegnate nelle scuole, non sarebbe negativo riuscire a fare anche solo una sorta di opera di controinformazione.

Ma ciò non può bastare, perché se si tratterà concretamente di operare sulle possibili alternative, magari per prepararne di nuove, risulta indispensabile avere la consapevolezza della loro reale genesi storica. Col risultato che l'immagine della evoluzione delle matematiche (e delle scienze), come progresso lineare fondato su se stesso e quindi autonomo dal contesto sociale e culturale, non potrà non rivelarsi falsa e fuorviante perché se si danno scelte si danno ramificazioni ed errori. E bisognerà poi spiegare perché certi rami si sono sviluppati ed altri invece si sono seccati o sono stati recisi, perché un vecchio ramo ha ripreso a germogliare. Venendo quindi a cadere la distinzione classica fondamentale tra la storia delle scienze e le altre "storie", in quanto nella prima come nelle seconde né la logica né l'esperienza garantiscono risultati univoci e soluzioni definitive, nella prima come nelle seconde sono individuabili o possibili cambiamenti rivoluzionari radicali.

La distinzione rimane soltanto al livello dei criteri di selezione, nel senso che una teoria matematica non si sceglie applicando gli stessi criteri che concorrono alla nomina di un ministro, a fissare il valore di un qua dro, a determinare il livello produttivo di una fabbrica e quello salariale dei produttori, ma certo viene scelta tra alternative tutte realmente possibili in conflitto.

Ora i criteri per affrontare le alternative scientifiche sono altrettanto mutevoli, con la storia ed il contesto sociale e culturale generale, delle decisioni politiche ed economiche, ma - come queste ultime - esse non sono assolutamente arbitrarie e raramente casuali. Già da altri od in altra sede sono state proposte analisi storiche che mostrano od almeno fanno ipotizzare una coerenza di fondo tra i diversi criteri di selezione ai vari livelli (9). Per la matematica si può cominciare a vedere la parte storica del lavoro citato nella nota 7.

(9) Forman 1971 e 1974; Tonietti 1976 e ?; Donini 1978; Baracca & Livi & Russo 1979

Il Bourbakismo.

Dall'analisi delle varie risposte date al problema del rinnovamento dell'insegnamento della matematica emergono inevitabilmente diversi modi di intendere le matematiche, alcuni maggioritari altri minoritari oggi.

- Il più completo e compatto è il punto di vista bourbakista in quanto è riuscito dagli anni '40 ad oggi a sedimentare su di sé potere accademico in Francia e prestigio scientifico nel mondo (almeno in qualche settore come la geometria algebrica). Organizzando un progetto di ricerca nei seminari bourbaki e la sistemazione assiomatica di tutta la matematica nel monumentale trattato degli Eléments de Mathématique (che non è però finito e sicuramente si avvia a rappresentare una moderna torre di babele), Nicolas Bourbaki propone l'ideologia più coerentemente legata alla didattica della matematica "moderna", cioé a quella formale ed algebrizzata. Bourbaki è il nome ironico (pare che si tratti di un generale francese noto per le sue sconfitte) scelto per rappresentare tutto un gruppo di matematici in genere francesi (tra i suoi fondatori si trovano J.Dieudonné, A. Weil, H. Cartan, C. Chevalley). L'unica regola scritta di questo sodalizio matematico è che all'età di 50 anni un membro deve andarsene, quindi presumibilmente nessuno dei fondatori ne fa più parte. Per capire i punti centrali dell'ideologia bourbakista - come delle altre come vedremo - non basta chiedersi genericamente cosa sia per loro la matematica, è più utile invece articolare tutta una serie di questioni che vanno dall'unità della matematica al rapporto con le applicazioni, dai criteri di verità al ruolo della storia, dall'organizzazione dei matematici come gruppo sociale al rapporto con gli altri gruppi intellettuali o non, da come garantire lo sviluppo di questa scienza a come si organizza in settori.

Ognuno sa che il carattere esterno delle matematiche è di presentarsi sotto l'aspetto di quella "lunga catena di ragionamenti" di cui parla Cartesio; ogni teoria matematica è un concatenarsi di proposizioni, l'una dedotta dall'altra secondo le regole di una logica che è essenzialmente quella codificata dopo Aristotele sotto il nome di "logica formale" ed opportunamente adattata agli scopi particolari dei matematici.

Ma

... il metodo assiomatico trova il suo punto d'appoggio nella convenzione che, se le matematiche non sono una catena di sillogismi che si sviluppano a caso, non sono neppure una collezione di trucchi più o meno "astuti" fatti di approcci fortuiti dove trionfa la pura abilità tecnica.

E quindi

... meno che mai la matematica si riduce ad un gioco puramente meccanico di formule isolate; più che mai l'intuizione regna sovrana sulla genesi delle scoperte; ma ella ormai dispone delle potenti leve che gli fornisce la teoria dei grandi tipi di strutture ed abbraccia con un solo sguardo i vasti domini unificati dall'assiomatica dove prima sembrava regnare solo il caos più uniforme. Nella concezione assiomatica la matematica appare in definitiva come un serbatoio di forme astratte - le strutture matematiche -[10].

Dal punto di vista filosofico l'uso generalizzato delle strutture e degli isomorfismi enfasizza uno degli aspetti principali della matematica moderna - cioé che la "natura" degli "oggetti" matematici non è importante lo sono invece le relazioni che esistono tra di essi...

La matematica è

una creazione umana non una rivelazione divina [11]

...nonostante l'introduzione dell'idea di struttura, che era tesa a chiarificare ed a separare le cose, la matematica rifiutava di separarsi in piccoli pezzi. D'altra parte, era chiaro che le vecchie divisioni in Algebra, Aritmetica, Geometria, Analisi erano invecchiate [12].

- Le strutture fondamentali su cui poggia questo nuovo edificio sono di tre tipi: quelle algebriche, quelle topologiche e quelle d'ordine.

---

(10) Bourbaki 1948,p. 37-38,43,46

(11) Dieudonné 1965 p. 548,550 citato in Fang 1970 p. 113

(12) Dieudonné 1970 pag. 139

Secondo l'originario progetto bourbakista con queste strutture si doveva essere in grado di sistemare assiomaticamente e formalmente tutta la matematica garantendone contemporaneamente l'unità, la saldezza (dopo le varie crisi dei fondamenti), la possibilità di progresso impetuoso, la grande generalità nelle applicazioni. Quello della unità è uno dei loro pensieri costanti, essi sanno perfettamente che l'aumento esponenziale dei ricercatori e la sempre maggiore specializzazione in settori rendono impossibile la vecchia unità ottocentesca fondata su una comunità ristretta, in cui tutti (almeno i maggiori) si occupano di tutto, e su un accordo implicito intorno a poche regole di fondo. L'unità bourbakista si basa sul metodo assiomatico esplicito e sulla riducibilità alle strutture.

> In una parola c'è oggi una matematica oppure ci sono alcune matematiche? ... noi crediamo che l'evoluzione interna della scienza matematica abbia, malgrado le apparenze, unificato più che mai le sue diverse parti e vi abbia creato una sorta di nucleo centrale come non c'era mai stato... E' un truismo banale il dire che questo "ragionamento deduttivo" è un principio di unità per la matematica. Il principio ordinatore sarà quello di una gerarchia di strutture, dalle più semplici alle più complesse, dal generale al particolare... si può prendere meglio conoscienza della vita interna della matematica, di quello che ne costituisce insieme l'unità e la diversità. E' solo con questa accezione della parola <<forma>>che si può dire che il metodo assiomatico è <<un formalismo>>; l'unità che esso conferisce alla matematica, non è l'armatura della logica formale,unità di uno scheletro senza vita;è la linfa che nutre un organismo in pieno sviluppo, il fecondo e flessibile strumento di ricerca al quale hanno lavorato coscientemente,dopo Gauss,tutti i grandi pensatori matematici tutti quelli che seguendo la formula di Lejeune-Dirichlet hanno teso a "sostituire le idee al calcolo".(13)

> Noi abbiamo imparato a far risalire tutta la nostra scienza ad una fonte unica, composta solamente di qualche segno e di qualche regola di impiego di questi segni, ridotto senza dubbio inespugnabile dove non potremo rinchiuderci senza pericolo di carestia, ma sul quale ci sarà sempre possibile ripiegare in caso di incertezza e di pericolo esterno (14).

---

(13) Bourbaki 1948 p. 36,37,43,45,47. Cfr. Dieudonné 1964 p. 245,247

(14) Weil 1948 p. 309, Cfr. anche p. 318.

- L'unificazione dovrebbe lavorare così.

> La ricorrenza dello stesso modello di dimostrazione in differenti situazioni suggerisce che si ha a che fare con due specializzazioni della stessa teoria generale; questo vuol dire che con una opportuna interpretazione, gli assiomi di quella teoria diventano teoremi di ciascuna delle situazioni che stiamo considerando. Ogni proprietà che si può dedurre dagli assiomi sarà allora egualmente vera per ambedue gli insiemi di oggetti e non dovrà essere dimostrata separatamente per ciascuna. I due insiemi di oggetti hanno allora la stessa "struttura"[15]

> Su questi fondamenti asserisco di poter ricostruire tutta la matematica di oggi; e se c'è qualcosa di originale nella mia procedura essa consiste solamente nel fatto che, invece di contentarmi della affermazione, comincio a dimostrarlo nella stessa maniera con cui Diogene provò l'esistenza del movimento; e la mia prova diventerà sempre più completa con crescere del trattato [Gli Eléments][16].

> All'inizio del secolo, tuttavia, un periodo di terribile confusione derivò dall'impetuoso sviluppo della matematica in diverse discipline ed anche dall'interazione individuale di diversi autori. C'erano differenti termini per lo stesso concetto e differenti concetti per lo stesso termine. Bourbaki considerava necessario di modificare e semplificare la terminologia in modo tale che la matematica si potesse presentare come un tutto ...[17].

Nei passi riportati, che abbiamo citato per esteso e senza commento perché parlano quasi da soli, risaltano le due difficoltà principali di questo programma. E' vero che tutte le matematiche sono riducibili alle strutture? Il metodo assiomatico non si è forse "bruciato" attraverso un paio di crisi dei fondamenti? Questo secondo punto pone un problema di carattere storico[18], qui basta dire che i bourbakisti prendono nettamente le distanze da ogni riduzione della matematica alla logica.

---

(15) Dieudonné 1965 cit. in Fang 1970 p. 74.

(16) Bourbaki 1949 cit.in Fang 1970 p. 58-59.

(17) Cartan 1959 p. 15 cit.in Fang 1970 p. 61.

(18) Cfr. Kline 1972; Boldrighini & Marchetti 1977.

Questo rimane il punto di vista di matematici attivi che usano la logica a loro utile, , ma che tengono a distinguersi dai logici matematici; spesso anzi danno giudizi sulla irrilevanza matematica di questi ultimi. In ciò sono aiutati dalla tendenza alla specializzazione che ormai separa i settori matematici dalla logica, con buona pace di qualche filosofo in ritardo.

> Perché è un tratto comune ai diversi tentativi di integrare l'insieme delle matematiche in un tutto coerente... che essi siano stati fatti in rapporto ad un sistema filosofico più o meno ambizioso... è all'interno della matematica che noi vogliamo restare... Codificare questo linguaggio... è una opera assai utile e che costituisce effettivamente una faccia del metodo assiomatico, quello che si può propriamente chiamare il <u>formalismo logico</u> (oppure come si dice anche la "logistica". Ma - e noi ci insistiamo - non è che <u>una faccia</u> e la meno interessante. Lo scopo essenziale dell'assiomatica è precisamente ciò che il formalismo logico da solo non ci può dare, la comprensione profonda delle matematiche(19).

> Ma se la logica è l'igiene del matematico non è lei che gli fornisce il nutrimento; il pane quotidiano di cui vive sono i grandi problemi (20).

> C'è un aura distintamente diversa... fra il modo globale di guardare alla teoria dei gruppi come si fa in algebra e, diciamo, al modo globale di considerarla come fu fatto in logica. Qui la questione era l'indimostrabilità di certe proposizioni, le dimostrazioni esplicite, la decidibilità, l'indipendenza e così via (21).

Si noti che la critica principale di Dieudonné al School Mathematics Study Group statunitense riguarda proprio il feticismo della logica.

La riduzione di <u>tutta</u> la matematica allo schema bourbakista è fallita. Vale per certi settori, ma non per tutti e sono gli stessi bourbakisti ad

---

(19) Bourbaki 1948 p. 36-37; Cfr. p. 45 ed anche Dieudonné 1964 p. 247

(20) Weil 1948 p. 309

(21) Eilenberg 1964 p. 116 <u>cit.</u>in Fang 1970 p.110; Cfr. anche p. 115.

indicarceli. A parte gli insiemi sono: l'algebra lineare e multilineare, la topologia generale,gli spazi vettoriali topologici, l'algebra omologica, l'algebra commutativa e non commutativa, i gruppi di Lie, l'analisi sulle varietà, l'analisi armonica, la teoria delle rappresentazioni, gli spazi analitici, la geometria algebrica, la teoria dei numeri algebrici. Vengono invece esclusi la teoria dei gruppi finiti, la teoria analitica dei numeri, i reticoli, i processi di somma e di approssimazione per le serie, molta topologia, l'algebra universale, l'algebra non associativa... e soprattutto tutta la matematica applicata [22]. E' vero che questa classificazione (del 1968) non pretende di dare giudizi di valore, ma solo di rappresentare l'esclusione dei settori in cui si opera ancora con quei "trucchi" artigianali che i bourbakisti non apprezzano, ciò non toglie che i settori buoni siano in genere proprio quelli di cui si sono occupati i fondatori [23]. Più recentemente ancora Dieudonné ripiegava vieppiù nella definizione di "densità bourbachista", elevata a suo dire per la geometria algebrica, la teoria dei gruppi di Lie, la teoria dei numeri, la topologia algebrica e differenziale, bassa per l'analisi armonica commutativa le algebre di von Neumann e nulla in altri casi [24]. Il programma ambizioso di riduzione di tutta la matematica è diventato un criterio di distinzione della matematica considerata importante dai bourbakisti dal resto, che è cresciuto secondo linee diverse ed a un ritmo superiore di quello praticabile dalle loro ricostruzioni.

- Tenendo presente questo destino risultano più chiari quegli elementi che questa ideologia ha sempre avuto, ma che ora risaltano in primo piano. Gli assiomi e le strutture rappresentano strumenti per lavorare la matematica, non criteri di verità.

---

(22) Dieudonné 1970 p. 141

(23) Fang 1970 p. 40-41

(24) Dieudonné 1976 p.296 cfr. anche Dieudonné 1977 p. XIV.

> Il suo [del metodo assiomatico] tratto più saliente è di realizzare una economia di pensiero considerevole. Le strutture sono degli strumenti per il matematico ... . Si potrebbe quindi dire che il metodo assiomatico non è altro che il "sistema taylor" delle matematiche (25).

Si parla di "comodità di linguaggio", di semplicità (26), le categorie del programma diventano "principale" vs "secondario", "importante", "essenziale".

- Si dice che questo programma è aperto, "non ha mai paura dei cambiamenti... non si ha nessun rispetto per la tradizione" quindi lo si considera il più adatto ad un progresso continuo (27). Il limite dei 50 anni posto ai membri serve a garantire il ricambio ed a mantenere giovane il gruppo anche perché "il talento matematico ha l'abitudine di manifestarsi da giovane" (28).

- La opposizione vero/falso è stata sostituita da quella principale/secondario e questa, che si basa ormai su categorie epistemologicamente assai ambigue, può essere sostenuta solo con criteri legati alla corporazione dei matematici. Da un programma assiomatico per la matematica si è passati alle regole sociologiche di un gruppo di matematici (29). A Lussemburgo (30) J. Dieudonné rintuzzava gli attacchi degli "altri" agitando un pesante fascicolo

---

(25) Bourbaki 1948 p.42;cfr. Dieudonné 1970 p.138,145 e Cartan 1959 cit. in Fang 1970 p. 54.

(26) Bourbaki 1948 p. 40; Weil 1948 p. 318; Dieudonné 1970 p. 145;cfr.Fang 1970 p. 134-135.

(27) Dieudonné 1970 p. 138, 139.

(28) Weil 1948 p. 317.

(29) Dieudonné 1970 p. 142-144;cfr. Fang 1970 p.111 in cui si riconosce esplicitamente che solo i matematici (meglio certi matematici) hanno diritto di parlare di matematica.

(30) Dieudonné 1976 p. 276.

del Mathematical Review e dicendo, col solito fare aggressivo ed intollerante: "La mathématique c'est ça!", 2000 pagine di testi matematici al mese. Secondo Dieudonné quindi la matematica è ciò che la corporazione dei matematici ritiene recensibile sul Mathematical Review. Come protocollo normativo non è esente da fascino.

- Il programma di ricerca di un criterio di autofondazione, che dalla fine dell'800 diventa rilevante per le matematiche, nel momento in cui si rivela impossibile da perseguire su base logica si ridefinisce su base sociologica. Ma, si noti bene, è sempre l'autofondarsi di una corporazione che si pretende separata ed autonoma dal resto della società. Questo risulta ancora più chiaro se si analizzano i luoghi che occupano la "storia" e le "applicazioni" all'interno dell'ideologia bourbakista.

L'interesse per la storia è sempre stato alto, ma è una storia separata rigidamente dal corpo assiomatico delle matematiche e ridisegnata per discipline allo scopo di mostrare l'emergere delle strutture formali. Negli "Eléments de Mathématique diversi settori si chiudono con un'appendice storica, in cui letteralmente si reinventano i fatti per farne nascere spontaneamente le strutture. In queste parti si trovano affrontate questioni più filosofiche, quei problemi che non hanno trovato posto nel testologico-formale,né negli esercizi; il matematico militante si sbottona e spesso l'ideologia ne affiora più esplicita(31). E' una storia coerente con il progetto bourbakista che quindi si può a sua volta rifare non solo tenendo presenti i fatti sottaciuti o distorti, ma seguendo altri progetti (32).

---

(31) Bourbaki 1960, ad esempio p. 21 della tr. it.. Qui sono state raccolte e pubblicate separatamente le parti storiche degli Éléments uscite fino al 1960.

(32) Israel 1977 p. 36 e seguenti.

Successivamente Dieudonné ha curato un trattato storico in 2 volumi scritto da matematici e centrato, sulla matematica dal 1700 al 1900 [33].

> ... spazio di Hilbert ... numeri p-adici di Hensel ... misura di Haar ... altrettanti momenti decisivi del progresso delle matematiche, svolte dove un lampo di genio ha deciso i nuovi orientamenti d'una teoria, scoprendoci una struttura che non sembrava a priori giocarci alcun ruolo [34]
>
> La concezione che abbiamo tentanto di esporre qui sopra non si è formata di colpo e non è che il punto di arrivo di una evoluzione che si è effettuata da più di un mezzo secolo e che non è stata senza seri ostacoli tanto presso i filosofi che presso i matematici.

Perché questi ostacoli? "a causa di un puro accidente storico"[35]. Nonostante i dibattiti e gli scontri, qui battezzati "puri accidenti", c'è progresso perché si sedimenta sempre qualcosa che sta fuori dalla storia,

> può puranche capitare, nonostante che i lavori dei logici moderni lo rendano molto poco probabile, che l'esperienza ci faccia scoprire un giorno, nei modi di ragionamento usati, il germe di una contraddizione che noi oggi non cogliamo; una revisione generale sarà allora necessaria; si può essere sicuri da oggi che l'essenziale della nostra scienza non ne sarà toccato[36].

Le strutture sono state forse superate? Certo, ma

> questa nozione è stata superata fino ad ora da quella di categoria e funtore che la ingloba sotto una forma più generale e più conveniente ...: Bourbaki non pretende di voler fissare ed inchiodare giù la matematica[37].

---

(33) Dieudonné 1978.

(34) Bourbaki 1948 p. 43, sottolineature dell'autore.

(35) ibidem p. 45. Per una esposizione apologetica della filosofia della storia bourbakista, il "progresso" e concetti assimilabili si veda anche Fang 1970 p. 15, 54-55,80.

(36) Weil 1948 p. 309; sott. dell'autore.

(37) Dieudonné 1970 p. 138; sott. dell'autore.

Già, però sicuramente i bourbakisti pretendono che sia la storia sia l'avvenire della matematica si faccia puntiforme e giaccia sulla loro curva anche se ammettono di non poterne prevedere la forma futura.

Si è già riportato che la matematica applicata non è la matematica che conta per i bourbakisti, d'altra parte anche i rapporti con i logici non sono troppo buoni - per non parlare dei filosofi. Certo l'ideologia bourbakista è la meno adatta possibile per cogliere i rapporti tra le matematiche e le altre scienze, per collocarle tutte in un contesto culturalmente e socialmente coerente (se del caso) proprio perché persegue criteri di autofondazione.

> Il vero matematico sembra poco esposto alle tentazioni del potere ed alla camicia di forza del segreto di Stato. "La matematica -diceva G.H.Hardy in una celebre lezione inaugurale - è una scienza inutile? Intendo con questo che essa non può servire direttamente né allo sfruttamento dei nostri simili, né al loro sterminio"... Ci sono certamente pochi uomini nella nostra epoca così completamente liberi nel gioco delle loro attività intellettuali come i matematici (38).

> ... lo studio delle equazioni di Van der Pol e delle oscillazioni di rilassamento, uno dei rari problemi interessanti che sono stati posti ai matematici dalla fisica contemporanea; perché lo studio della natura, in altri tempi una delle principali fonti dei grandi problemi matematici, sembra, negli ultimi anni averci preso a prestito più di quanto ci abbia reso (39).

> Non intendo dire che un contatto ravvicinato con altri campi come la fisica teorica, non è benefico per tutte le parti coinvolte; ma è perfettamente chiaro che di tutti gli eclatanti progressi dei quali ho chiaccherato, neppure uno con la possibile eccezione della teoria delle distribuzioni, aveva qualcosa a che fare con le applicazioni fisiche; e persino nella teoria delle equazioni a derivate parziali,l'enfasi viene posta oggi molto più sui problemi "interni" di struttura che sulle questioni aventi un significato fisico diretto. Persino se la matematica dovesse essere separata a forza da tutti gli altri canali della ri

---

(38) Weil 1948 p. 308

(39) *ibidem* p. 317

cerca umana, ci rimarrebbe cibo per secoli per pensare ai grandi problemi che dobbiamo ancora risolvere all'interno della nostra scienza (40).

... qualsiasi scienza in cui i risultati sperimentali possano essere espressi con numeri o sistemi di numeri diventa un campo di applicazione per i risultati matematici o metodi (sebbene in fisica questa idea prenda piede solo con l'800)... essa viene spesso chiamata "matematica applicata" questo è un nome molto sfortunato perché, né per gli standard classici né per quelli moderni, in queste applicazioni si trova alcun argomento (in senso stretto) di matematica genuina, in quanto esse non hanno a che fare con gli oggetti matematici stessi... Ai tempi della matematica 'classica'... gli stessi uomini lavoravano indifferentemente come 'puri ed applicati' ... Una specializzazione e diversificazione crescente, quanto le divergenti tendenze tra matematica pura ed applicata dei tempi moderni, hanno grandemente indebolito quella tradizione e gli uomini che - come l'ultimo John von Neumann... - sono ancora capaci di fare tale doppia carriera sono ancora l'eccezione piuttosto che la regola (41).

Che ci sia un rapporto intimo tra i fenomeni sperimentali e le strutture matematiche sembra essere confermato nel modo più inaspettato dalle scoperte recenti della fisica moderna. Ma noi ne ignoriamo totalmente le ragioni profonde (ammesso che si possa invero attribuire un significato a queste parole) e le ignoreremmo può essere per sempre ... prima degli sviluppi rivoluzionari della fisica moderna si è sprecata molta energia per volere fare uscire a tutti costi le matematiche dalle verità sperimentali, precisamente dalle intuizioni spaziali immediate; ma da un lato la fisica quantistica ha mostrato che quella intuizione macroscopica del reale copriva dei fenomeni microscopici di altra natura rilevando certe aree della matematica che non erano certamente state immaginate in vista delle loro applicazioni alla scienza sperimentale. Dall'altro il metodo assiomatico ha mostrato che le 'verità' di cui si voleva fare il centro delle matematiche non erano che aspetti particolari di concetti generali. Ne viene fuori alla fin fine che questo rapporto intimo la cui armonica necessità ci veniva fatta ammirare, non appariva più che come un contatto fortuito di due discipline le cui connessioni sono molto più nascoste di quanto si potesse pensare a priori (42).

---

(40) Dieudonné 1964 p. 248

(41) Dieudonné 1965 p. 543 cit. in Fang 1970 p. 93-94

(42) Bourbaki 1948 p. 46, sott. dell'autore.

Se la matematica è "una riserva di forme astratte" e se, nonostante avessero avuto "all'origine un contenuto intuitivo ben determinato", è solo

> vuotandole volontariamente di questo contenuto che si è saputo dare loro tutta l'efficacia che portavano in partenza, e che le ha rese suscettibili di nuove interpretazioni (43),

allora il rapporto con l'altra scienza esatta, la fisica, viene reciso o, il che è quasi lo stesso, avvolto nel mistero. Non che non si diano le applicazioni delle "strutture", tuttaltro, ma queste avvengono *a posteriori* e per caso. Esse non informano la matematica, non interessano il vero matematico perché, né gli sono da stimolo, né gli permettono di organizzare la sua materia. L'uso che si sta facendo da qualche tempo del linguaggio insiemistico ed algebrico in certi settori delle scienze umane - come la linguistica, l'antropologia culturale, la letteratura, l'estetica - è un fatto fortuito. Se lo "strutturalismo" francese ontologico da Levi-Strauss a Piaget si serve delle "strutture"bourbakiste tanto meglio per loro, ma nessuna coerenza culturale o peggio sociale perché le matematiche (si legga i matematici) sono autonome.

- Dopo il liberismo dell'800 e lo sforzo di ordinamento riduzionistico centrato su Hilbert, il bourbakismo è il tentativo più completo e meglio fondato ideologicamente di organizzazione e di sviluppo della matematica secondo un piano. Che le matematiche necessitino la pianificazione è chiaro dalla metafora urbanistica adoperata.

> Come una grande città i cui sobborghi non smettono di espandersi in modo un po' caotico sul terreno circostante mentre il centro si ricostruisce periodicamente ogni volta secondo un piano più chiaro ed un ordine più maestoso abbattendo i vecchi quartieri ed i dedali di viuzze per lanciare verso la periferia dei viali sempre più diretti, più larghi più comodi (44).

---

(43) *ibidem* p. 47

(44) *ibidem* p. 45.

Questa città assomiglia a certe fortezze, riprodotte su antiche stampe, perfettamente pentagonali, o concentriche o quadrate, disegnate in astratto in base ad un principio di simmetria, senza tener conto degli abitanti, principalmente tese a distinguersi dal caos circostante che le nutre e che in caso di pericolo non sono in grado di difendere (45).

Articolazioni e critiche al programma bourbakista.

L'ideologia bourbakista è tipicamente francese, fatta com'è di razionalismo, di spirito di casta, di accentramento, non ci si può quindi aspettare che si sia affermata nel mondo matematico internazionale nella sua interezza e senza modificazioni. Rappresenta la trasformazione in un programma coerente - con tutte le scommesse, le schematizzazioni, le esasperazioni e le scelte che questo comporta - di certe linee di tendenza e di alcuni tratti caratteristici delle matematiche d'oggi. Questi consistono in un linguaggio algebrico formale scandito in ben allineati assiomi e teoremi, in uno spiccato senso della separatezza delle matematiche dalle altre scienze, in una grande ramificazione in decine e decine di settori, in una diffusa indifferenza alla propria genesi storica ed al proprio destino. Un tratto che sembra a prima vista assolutamente incompatibile con il bourbakismo è rappresentato dall'estremospecialismo. La classificazione (al 1970) della American Mathematical Society,che viene usata in molte biblioteche ed in riviste di estratti e recensioni come il Mathematical Review, comprende ben 63 sezioni principali.

---

(45) Per una esposizione più completa, ma apologetica, del programma bourbakista si rimanda a Fang. 1970. Per un ritratto ancor più oleografico, ma che in realtà ne mette in luce i tratti peggiori, non volendo vederne neppure le distanze dalla vecchia problematica logicista si veda D'Amore & Matteuzzi 1976 p. 193. La migliore critica documentata, anche se non sempre in linea con quanto qui sostenuto, è quella di Israel 1977.

- In un paese pragmatico come gli USA l'istanza dello sviluppo e del controllo si è separata da quella dell'unificazione ridotta ad una "filosofia" secondaria. Secondaria, ma presente ed infatti riaffiora esplicitamente in quei momenti - come la didattica - in cui giocoforza il matematico dovrebbe momentaneamente dimenticare il proprio specialismo. Come quella bourbakista, si tratta di una unità di metodo a posteriori, la più adatta alla proliferazione delle discipline, ma diversamente da quella si perde largamente la funzione di discriminazione rigida. Rimane invece, con tutta la sua efficacia, la possibilità di ritrovare postfactum quelle essenze che fanno di una ricerca una ricerca matematica. Metaforicamente se il bourbakismo pretende di essere il setaccio che separa la farina dalla crusca, negli USA si preferisce avere una rapida produzione di miscela di farina e crusca. Se qualcuno pretende di comprare solo farina gli si mostra un bel setaccio (sia stato adoperato o meno a seconda di quanto alto si vuole il mucchio) tanto bastando a garanzia: questo è il metodo. Come dire che il mugnaio ha più larghi margini di libertà nel secondo caso e fuor di metafora in USA i criteri sono assai più scopertamente legati alla corporazione di quanto abbiamo visto essere in Francia. Inoltre l'organizzazione, accademica e di ricerca, liberistica favorisce l'emergere di sottocorporazioni a vario titolo.Addirittura ci sono in USA due grosse associazioni nazionali l'American Mathematical Society e la Mathematical Association of America, la prima più di ricerca la seconda molto attenta alla didattica (46).

- Se in Francia l'organizzazione dei settori matematici è ontologico-piramidale (vale a dire che sulla base alle strutture la classificazione è anche verticale) negli USA è quasi esclusivamente fattuale-orizzontale. La matematica è ciò che si fa nei vari dipartimenti e le discipline stanno potenzialmente sullo stesso piano (però una distinzione sostanziale viene introdotta attraverso i minori o maggiori finanziamenti). Questo spiega perché

---

(46) La seconda è nata per scissione dalla prima negli anni della grande guerra. Si veda Young 1971 p. 980.

negli USA il bourbakismo riceva serie critiche ed il panorama ideologico sia relativamente più vario che in Francia.

- La prima pubblicazione negli USA degli Eléments è del 1966; non è un grande ritardo tenendo conto che in Francia cominciano ad uscire negli anni '40 e che c'è la guerra, ma è già significativo. Inoltre si traducono solo le parti di topologia generale. Più di dieci anni prima P.Halmos ed E. Artin (algebrista tedesco emigrato negli USA e maestro in Germania di alcuni bourbakisti) avevano recensito rispettivamente certe parti di analisi (l'integrazione) e di algebra sul Bulletin dell'American Mathematical Society.

E' estremamente significativo che le critiche maggiori vengano dal primo mentre il secondo - pur rilevando la astrattezza "impietosa", il voler mettere "i concetti geometrici sullo sfondo" e l'indifferenza alla teoria dei gruppi finiti-loda l'impostazione strutturale generale (47). Il peso determinante in questo ultimo giudizio è dato dalla tradizione algebrica tedesca della scuola hilbertiana. L'analista Halmos - allievo di von Neumann - invece non condivide né l'organizzazione del discorso, né certe scelte di teoremi, né certe notazioni terminologiche. "Il trattamento appare artificiale" a causa "della predilezione dell'autore ad usare come definens ciò che per la maggioranza dei matematici è il definendum". Si sottolinea che le scelte non sono adatte alle applicazioni (teoria ergodica e della probabilità) e non servono né come punto di partenza né come stimolo (48).

- Ciò nonostante il bourbakismo negli anni sessanta diventa popolare perché si accorda largamente con il movimento didattico della "nuova matematica"(49).

---

(47) Artin 1953 p. 474; che questo non sia proprio un complimento risulta da Artin 1957 p. 14 e seguenti della tr. it.

(48) Halmos 1953 p. 249

(49) Cfr. Kline 1973 e 1977; Tonietti 1977.

The Saturday Evening Post, ci scrive su un articolo che sfrutta il mistero del nome, ma che è significativo del clima. Il matematico F. Browder si preoccupa e scrive allo stesso giornale che, nonostante i volumi del Bourbaki siano chiari, netti, semplici nell'esposizione ed usino "l'approccio algebrico astratto alla matematica",

> essi hanno sovraenfasizzato le tendenze algebriche in matematica a spese dell'analisi e della geometria a tal punto che l'esposizione degli Elementi ignora settori maggiori (funzioni analitiche di variabile complessa, teoria delle varietà, topologia algebrica elementare [50].

- Molte critiche che il manifesto dei 65 fa alla New Math vanno intese fatte anche al bourbakismo [51]. Non tutte però, abbiamo visto Dieudonné prendere nettamente le distanze dall'illusione di fondare l'insegnamento della matematica esclusivamente sulla logica e può meravigliare trovare la firma di A. Weil in fondo all'elenco. Una ideologia ben precisa è racchiusa nelle affermazioni che

> La matematica separata dalle altre scienze perde una delle sue sorgenti più importanti di interesse e di motivazione.

> Il pensiero matematico non è proprio ragionamento deduttivo; non consiste solo di dimostrazioni formali... le argomentazioni induttive, per analogia, le basi intuitive di una congettura emergente sono modi matematici di pensare.

La storia non può stare nelle note perché spiegare un'idea significa riferire la "sua genesi" e tracciarne "la funzione storica"

> l'algebra elementare, la geometria piana e solida, la trigonometria, la geometria analitica, ed il calcolo infinitesimale sono ancora fondamentali

> i nuovi termini e concetti vanno preceduti da una preparazione sufficientemente concreta e seguiti da genuine e stimolanti applicazioni.

---

(50) cit. in Fang 1970 p. 8-9.

(51) Tonietti 1977 p. 61.

La matematica non è"un gioco con regole arbitrarie". Tale ideologia non coincide con il bourbakismo come non può piacere ai bourbakisti la commistione tra matematici puri, la IBM, la Bell Telephon, la General Electric e l'Institute for Defense Analysis (52).

- Una ideologia diversa da quella bourbakista circa la questione di come progredisce la matematica si può trovare nel topologo R.H. Bing. Secondo Dieudonné c'è il modo <u>tattico</u> che consiste nell'affrontare ogni problema singolarmente con strumenti ben noti e c'è il modo <u>strategico</u> di analizzare nella loro generalità i concetti chiarendone tutte le connessioni. Anche se si dice che il meglio sta nel mezzo, in realtà il bourbakismo si considera strategico perché il progresso avverrebbe sedimentando nello strutture generali le tecniche usate per risolvere i problemi. Un esempio a mio avviso assai significativo è la partizione che Dieudonné fa tra la topologia algebrica (le famose congetture di Poincaré, le diverse strutture differenziali sulle sfere, la teoria di Morse, i gruppi di omotopia) e l'algebra omologica in cui le precedenti tecniche si generalizzano e si algebrizzano (funtori, sequenze esatte, categorie abeliane... dovute ai bourbakisti Eilenberg, H. Cartan, Grothendieck). La prima parte della storia "non è - nonostante i suoi rimarchevoli successi - la metà secondo me più impressiva" conclude il nostro (53).

- Il modello di Bing si presenta invece decisamente tattico essendo fatto di problemi da risolvere, problemi di contenuto intuitivo che si possono quasi spiegare a tutti con esempi geometrici o di fisica.

---

(52) Ahlfors <u>et alia</u> 1962 p. 190-2.

(53) Dieudonné 1964 p. 239,243.
Ma pare che Dieudonné abbia recentemente cambiato idea assegnando alla topologia algebrica e differenziale una "densità bourbachista"maggiore che all'algebra omologica, Dieudonné 1976 p. 297.

Diventano allora fondamentali per il progresso le congetture- le intuizioni che un oggetto matematico ha una certa proprietà, ma di cui non si conosce ancora né la dimostrazione né la falsità - più che i teoremi dimostrati, che sistemano solo formalmente ed a posteriori la questione.

> E' solo raramente che problemi così difficili come questi sono risolti. Di fatto, forse, quelli sistemati da controesempi saranno altrettanti di quelli sistemati da dimostrazioni. Ho la convinzione che la maggior parte dei teoremi di topologia che sono veri lo sono a causa di qualche semplice principio geometrico che sta sotto. Se c'è un tale principio, all'inizio si può scrivere una dimostrazione terribilmente pesante e complicata, ma appena il principio soggiacente viene capito, la dimostrazione emerge chiara. Se non esiste nessun facile principio geometrico soggiacente, la cosa più probabile è che la concettura sia falsa [54].

- Così è venuta fuori un'altra contrapposizione col progetto bourbakista. Perché l'algebra formale deve avere oggi un ruolo privilegiato? Quale posto ricopre la geometria? Dalla critica del topologo Spanier emerge una concezione della matematica che si definisce non solo internamente, ma "in relazione alle altre discipline". Essa non può ridursi ad un elenco di teoremi, soprattutto l'"algebra astratta" non dovrebbe avere il ruolo preminente che ha assunto e che conduce ad ignorare i problemi reali per pensare che "la parte più significativa della matematica è lo sviluppo delle strutture astratte"[55].

- B.E.Meserve riattaccandosi a queste critiche propone esplicitamente che sia la geometria "la porta per la matematica". Egli si poggia anche sul rapporto che il geometra differenziale T.J. Willmore tenne al congresso del 1970 della Mathematical Association of England, intitolato appunto "Dove sta la geometria?:

---

(54) Bing 1967 p. 63

(55) Spanier 1970 p. 752,754

> Ciò che è importante è un modo geometrico di guardare ad una situazione matematica - geometria è essenzialmente un modo di vita. Noi abbiamo la topologia geometrica, la dinamica geometrica, la geometria algebrica e differenziale, ma non proprio 'la geometria'(56).

E' un tentativo di ritrovare una sorta particolare di unità, senza annullare i vari settori, attraverso lo "spirito" geometrico vale a dire attraverso un peculiare punto di vista nell'affrontare i problemi come è illustrato da questa citazione di Semple & Kneebone.

> Il pensiero geometrico più astratto deve conservare qualche legame, per quanto sottile, con l'intuizione spaziale, altrimenti non si potrebbe chiamare geometrico, ed è un fatto storico che... i geometri hanno in continuazione generato chi ha dato un rinnovato impulso alla matematica formale ritornando una volta di più per l'ispirazione al senso geometrico primitivo (57).

Qui l'equilibrio tra "edificio teorico" e "problemi che si presentano naturalmente" sembra pendere verso i secondi.

Come N. Bourbaki si deplora la crescente specializzazione e la mancanza di visione globale. ma diversamente da lui si ricerca la soluzione nella geometria e non nell'algebra astratta.

> Il reinserimento della geometria attraverso il riconoscimento degli usi dei suoi modi di pensiero dovrebbe essere consistente con una immagine contemporanea della matematica come soggetto unificato [perché] 1) La geometria fornisce uno o più punti di vista o modi di guardare a quasi tutte le aree della matematica. 2) Le interpretazioni geometriche continuano a fornire preveggenze che conducono sia alla comprensione intuitiva sia al progresso della maggioranza delle aree matematiche. 3) Le tecniche geometriche forniscono strumenti effettivi per risolvere problemi nella maggior parte della matematica (58).

Dall'uso dell'intuizione geometrica si passa a criticare la tendenza a sovraenfasizzare il metodo deduttivo, così tutte le valenze antibourbakiste sono chiare. Se il referente storico principale del programma bourbakista è Hilbert qui ci si richiama alle affermazioni di Poincaré. In questo contesto

(56) Meserve 1973 p. 243

(57) Ibidem p. 242

(58) Ibidem p. 249 e 246.

lo slogan "Basta con Euclide" va inteso che le vecchie regole vanno cambiate e non va trasformato in "Basta con la geometria".

- L'approccio geometrico implica quindi la critica ad altri punti del programma bourbakista come l'assiomatizzazione formalista, ma vale anche il contrario. Cioè chi - anche solo per motivi didattici - preferisce una astrazione che parta da "osservazioni e da esperimenti su materiali concreti" e si verifichi poi nelle applicazioni, dando insieme un ruolo reale alla storia, "per acquistare conoscenza accurata" e per "imparare un pensiero deduttivo dotato di significato", finisce per sostenere che "la geometria è un mezzo migliore dell'algebra" (59).
Queste critiche al bourbakismo hanno radici storiche profonde e non sono frutto del caso, specie nel loro "odore di geometria", come prova la controversia su Thom (60). In ogni caso è già evidente che la geometria classica è il settore peggio trattato dalla ristrutturazione bourbakista.

Se l'algebra è valorizzata al massimo e l'analisi appare percorsa con un certo successo dalle strutture che si intrecciano, la geometria pare destinata solo ad essere smembrata ed atomizzata perdendo vitalità. Così non esiste più il piano, ma lo spazio vettoriale di dimensione 2 con prodotto scalare; non le trasformazioni del piano, ma l'algebra delle matrici; la distanza tra punti è un invariante del gruppo delle rotazioni; una curva algebrica diventa gli zeri di un polinomio; la lunghezza di una curva è la misura di un insieme. Gli acidi bourbakisti mettendo a nudo lo scheletro delle teorie ne dissolvono molti aspetti e nel caso della geometria ne uccidono il singolare spirito unitario. Un certo tipo di unità si fa sempre a spese di qualcos'altro. Non dubito che lo scheletro serva a tener insieme certe specie viventi, ma senza la carne cosa resta della loro vita?

---

(59) Shibata 1973 p. 265-267

(60) Tonietti 1979.

- Può essere interessante notare come delle quattro o cinque grosse divisioni classiche delle matematiche, (insieme ad Analisi, Algebra, Aritmetica, Fisica Matematica) l'unica sezione rimasta esplicitamente nella classificazione per argomenti dell'America Mathematical Society sia proprio la geometria. Ma essa riguarda infatti problemi ottocenteschi: i fondamenti della geometria, le geometrie euclidee e non, la geometria dei gruppi di trasformazione. E' rimasto il nome a ricordare per contrasto che non le compete più alcuna funzione complessiva, ma solo una nostalgia storica. I fatti - piacciono o meno - oggi stanno così, si intende che possono cambiare, come sempre.

- Come sempre negli ambienti accademici, in cui la carriera scientifica si fa per cooptazione dall'alto, anche questo aspetto assume la coloratura di uno scontro tra corporazioni: i geometri contro gli algebristi.
A prima vista sembra una inoffensiva articolazione tra settori specialistici ciascuno dotato delle sue particolari idiosincrasie, ma il succitato caso Thom prova che forse potrebbe trattarsi di uno scontro tra paradigmi, nel senso di Kuhn.

A. Robinson e la Non-Standard Analysis.

Un luogo comune ben radicato nell'ideologia del matematico medio (che lo imparenta quindi con il positivismo logico volgare) è la convinzione dell'irrilevanza per il proprio lavoro delle questioni di Filosofia della Matematica. Nel programma bourbakista questo è del tutto esplicito, arrivando a prendere le distanze dalla Logica Matematica dandone anche severi giudizi di valore, ma persino nelle altre posizioni più pragmatiche e pluraliste si distingue nettamente tra problemi matematicamente interessanti e problemi filosoficamente interessanti. Ciascuna disciplina ha le sue regole, la coesistenza è pacifica se si rispetta la non ingerenza negli affari interni altrui. Nella poco sopra citata classificazione della AMS la Philosophy of Mathematics compare solo come sottosezione della sezione "Generale" e di quella dedicata alla "Logica e Fondamenti", che è largamente tecnica.

-Ma ci sono, per fortuna, sempre delle eccezioni ed il dissenso appare ben motivato e portato molto avanti. A. Robinson scrive un intero libro e fonda quasi una nuova disciplina, la "Analisi Non-Standard", onde rivendicare le idee di Leibniz sugli infinitesimi, considerati numeri che "posseggono le stesse proprietà" dei reali.

> Si mostra in questo libro che le idee di Leibniz possono essere pienamente rivendicate e che conducono ad un nuovo e fruttifero approccio per l'Analisi Classica e per molte altre branche delle matematiche. La chiave del nostro metodo viene fornita dall'analisi accurata della relazione tra linguaggi matematici e strutture matematiche che sta alla radice della teoria odierna dei modelli (61).

A partire da quest'ultima, che costituisce un particolare settore della Logica Matematica, si rifà quindi l'Analisi attraverso la reinvenzione dei numeri reali. Questi ultimi diventano qui un campo ordinato non archimedeo, come si può intuire perché comprendono ora anche numeri infinitamente piccoli e infinitamente grandi. Dato un "infinitesimale" ed un numero "standard" non esiste nessun multiplo intero del primo che supera il secondo, lo stesso vale se si prende un numero "standard" ed un "infinito". Reso così preciso e ben fondato il concetto di infinitesimo (che la solita concezione del progresso storico pretenderebbe, sbagliando come si vede, di considerare insostenibile solo perché Cauchy e Weierstrass avevano scelto un'altra strada) si dà un nuovo concetto di limite, di derivata, di integrale, ritrovando teoremi di analisi reale e di analisi complessa. Si arriva alle distribuzioni, agli operatori degli spazi di Hilbert, ai gruppi di Lie, si danno applicazioni in idrodinamica ed in teoria dell'elasticità. Si suggerisce che l'eterno problema delle divergenze nella moderna Fisica Teorica potrebbe essere trattato con l'Analisi Non-Standard.

- Robinson pensa, non solo non si perda nulla con la sua teoria Non-Standard, ma anche che si guadagni qualche cosa.

---

(61) Robinson 1966 p. 2

E' naturale chiedersi se un metodo non standard (... cioè un metodo dell'Analisi Non-Standard) può essere rimpiazzato sempre da una dimostrazione matematica standard. Questa domanda presume che i metodi della Logica Matematica siano distinti dalle matematiche ordinarie,e noi possiamo esser d'accordo, per i nostri scopi presenti, che la distinzione sia significativa in pratica. La risposta alla domanda è allora che il metodo delle ultrapotenze fornisce un mezzo pronto a tradurre una dimostrazione non standard in una standard in ciascun caso particolare. Tuttavia facendo così si può complicare la dimostrazione considerevolmente in modo tale che spesso la procedura che ne risulta sarà meno desiderabile dal punto di vista euristico.Nello stesso tempo può ben esistere una dimostrazione matematica ottenibile indipendentemente ... crediamo di aver mostrato che ... i metodi non-standard possano aggiungere qualcosa di effettivo ai metodi standard sia nel gettare nuova luce su vecchie teorie sia per trovare nuovi risultati(62).

- Questo modo di Robinson di rifare l'analisi classica è significativamente diverso dal modo bourbakista di algebrizzarla ed assiomatizzarla. N. Bourbaki vuole riorganizzare l'analisi pretendendo di mostrarne lo scheletro, ma per lui i problemi classici risolti sono risolti e cambiarne il linguaggio non ne cambia affatto i risultati che sono quelli che contano. Per Robinson un teorema non è costituito solo dal risultato perché la struttura logica e filosofica di una teoria ne è parte integrante. Riesumare uno scontro, gettare nuova luce su una vecchia questione, come è quella dei fondamenti del calcolo infinitesimale, è significativo sia per il matematico sia per lo storico. Contrariamente al Bourbaki, per il quale il problema dei fondamenti è chiuso ed irrilevante rispetto alle teorie matematiche importanti, qui non solo esso è aperto, come rilevante problema filosofico degli infiniti e degli infinitesimi, ma diventa un problema essenziale dell'Analisi.

- La storia della Filosofia della Matematica coincide largamente con quella delle fondazioni del calcolo infinitesimale... il problema dell'infinito che a detta di molti è ancora uno degli argomenti principali della Filosofia della Matematica, sebbene con uno scopo allargato e differente enfasi, è essenzialmente lo stesso problema che arrovellava i fondatori dell'Analisi Matematica (63).

---

(62) Ibidem p. 4-5, sott. dell'autore
(63) Ibidem p. 281.

Così Robinson critica certi aspetti della teoria degli insiemi.

> Al momento il punto di vista cantoriano è quello sostenuto dalla maggioranza dei matematici. Ma forse la nostra rassegna storica suggerisce che proprio come il calcolo infinitesimale, che trionfa a metà '700 fu posto su fondamenta completamente nuove nei cent'anni successivi, così le future generazioni di matematici pur accettando i risultati formali della Teoria degli Insiemi, possono rigettare le pretese platonistiche comunemente associate ad essa (64).

- Si confronti con l'affermazione di J. Dieudonné:

> A proposito dei fondamenti noi crediamo nella realtà della matematica, ma naturalmente quando i filosofi ci attaccano con i loro paradossi corriamo a nasconderci dietro il formalismo e diciamo: "La matematica è proprio una combinazione di simboli privati del significato" e tiriamo fuori i capitoli 1 e 2 sugli insiemi. Finalmente ci lasciano ritornare in pace alla nostra matematica per farla come l'abbiamo sempre fatta con la sensazione, che ha ogni matematico, di stare a lavorare a qualcosa di reale. Questa sensazione è probabilmente una illusione, ma è molto conveniente (65).

La questione della realtà è invece affrontata in Robinson così:

> ci appare oggi che i numeri infinitamente grandi ed infinitamente piccoli di un modello non-standard dell'Analisi sono reali né più e né meno - ad esempio - dei numeri irrazionali standard. Questo è ovvio se introduciamo tali numeri attraverso gli insiemi mentre nell'approccio genetico sia gli irrazionali standard sia i numeri non standard vanno introdotti attraverso processi infinitari. Questa affermazione è egualmente vera se affrontiamo il problema dal punto di vista dello scienziato empirico. Visto che tutte le misure sono registrate in termini di interi o razionali, anche se il nostro schema teorico va al di là di questi, non c'è ragione allora che ci costringa a rimanere all'interno di un sistema numerico archimedeo (66).

---

(64) Ibidem p. 281, cfr. Robinson 1972 p. 39,45

(65) Dieudonné 1970 p. 145 sott. dell'autore

(66) Robinson 1966 p. 282.

- Assiomi si, ma corredati consapevolmente di un punto di vista critico nei confronti dell'Analisi, ed associati ad il ritorno di una problematica che il matematico medio tende a dimenticare. Al proposito Robinson non esita a rivendicare la propria ideologia di cui riconosce l'importanza per le matematiche e che addirittura chiama, senza caricarla di connotazioni negative, "la metafisica" (67). Anche qui come nel bourbakismo si deve riprendere in mano la storia, ma lo si fa con intenti e concezioni assai diverse. Se gli Eléments rimangono tali anche se non si leggono le note storiche, perché sono apologetiche, alla Non-Standard Analysis senza la storia mancherebbe una profondità sostanziale. Di più, dalla concezione di Robinson gli storici del "progresso scientifico" avrebbero molto da imparare.

> L'ultimo capitolo contiene una rassegna di certi stadi nella storia del Calcolo Differenziale ed Integrale che hanno a che fare con la teoria degli infinitesimi. Il fatto che i più recenti scrittori in questo campo fossero convinti che nessuna teoria simile poteva essere sviluppata effettivamente qualifica il loro giudizio storico. Quindi una revisione si è resa necessaria (68).

Ma gli storici ed i filosofi delle scienze sono in genere così poco attenti alle reali pratiche della ricerca ed agli ultimi prodotti di essa che hanno in genere taciuto. Solo Lakatos ha raccolto l'avvertimento, ma per trasformarlo in una occasione, sia di critica all'immagine assiomatico-deduttiva delle matematiche, sia di articolazione a questo caso storico del modello falsificazionista popperiano (69). Ad ennesima riprova che certe concezioni storiografiche sono tanto poco aderenti ai fatti quanto soprattutto atti di fede nel progresso.

---

(67) Robinson 1972 p. 28

(68) Robinson 1966 p. 4

(69) Lakatos 1978; cfr. anche p 56 del presente lavoro.

La matematica costruttiva di E. Bishop.

Sono le posizioni del tipo di quella di A. Robinson che disturbano sono all'ira le filosofie neopositiviste (70) e che rivelano l'insostenibilità fattuale delle filosofie della storia fondate sul concetto di "progresso". A questo punto ci possiamo allargare a quell'area di dissenso "metafisico" (nell'accezione di Robinson) che arriva fin dentro il nocciolo duro della matematica giungendo a cambiarne i teoremi, come è il caso della "Analisi Costruttiva" di E. Bishop.

- Questa volta si cerca di rifare l'analisi classica partendo dagli interi naturali e considerando come validi solo i risultati ottenibili "costruttivamente" da proposizioni dotate di senso "costruttivo". Dove "costruire" significa prescrivere un meccanismo operativo finito.

> L'oggetto primario della matematica è numero e questo vuol dire gli interi positivi.
>
> Ogni cosa si riattacca al numero ed ogni proposizione matematica in ultima istanza esprime che se si eseguono certe computazioni all'interno dell'insieme degli interi positivi si otterranno certi risultati.
>
> Il nostro programma è semplice - dare significato numerico alla maggior parte possibile dell'analisi classica astratta.
>
> Il compito di rendere l'analisi costruttiva è generato da tre principi base. Primo, rendere ogni concetto affermativo. (Persino il concetto di diseguaglianza è affermativo). Secondo, evitare definizioni che non sono rilevanti (Il concetto di funzione continua punto per punto non è rilevante. Una funzione continua è una che è uniformemente continua su intervalli compatti). Terzo, evitare pseudo generalità (71) .

- Un esempio di proposizione dotata di senso costruttivo è la seguente: ogni intero pari ≥ 4 è la somma di due primi. Darne una dimostrazione costruttiva significa dare un procedimento effettivo e finito che costruisca i due numeri primi la cui somma è il generico pari di partenza. Tipica

(70) Bar-Hillel 1972 p. 44

(71) Bishop 1967 p. 2,3,IX,X

dimostrazione non costruttiva è invece quella per assurdo che stabilisce l'esistenza di un oggetto dotato di certe proprietà attraverso le contraddizioni che si ottengono negandola. Un esempio di proposizione priva di senso costruttivo è: esistono 100 cifre consecutive uguali a "7" nello sviluppo decimale di π. Renderla costruttiva significa fissare l'estremo superiore prima del quale i 100 "7" andrebbero trovati, in caso contrario è più una questione di stanchezza che di matematica (72).

- Forse queste richieste possono sembrare non troppo strane, ma il matematico attivo sa che questo rappresenta un programma ben più riduzionistico di quello bourbakista. Esso costringe non solo a rifare i teoremi (questo è una costante storica), ma addirittura a rifiutarne alcuni come indimostrabili o privi di senso, togliendo dalle mani dei matematici molti degli strumenti che essi ritengono indispensabili.

> Per vedere come alcuni dei risultati più fondamentali dell'analisi classica manchino di significato computazionale, si prenda l'asserzione che ogni insieme limitato e non vuoto A di numeri reali ha un estremo superiore... Come altro esempio si consideri il teorema intuitivamente attraente che ogni funzione f continua su un intervallo chiuso $[0,1]$ tale che $f(0) < 0$ e $f(1) > 0$ si annulla in qualche punto x_o (73) .

Per il costruttivista bisogna costruire esplicitamente x_o, ma questo secondo lui è impossibile perché equivarrebbe a trovare metodi per dimostrare su successioni di interi certe proprietà costruttivamente assurde come: per ogni successione di $-1,0,1$ o ogni 1 è preceduto da -1 o ogni -1 è preceduto da 1. Non si usa la definizione classica di continuità punto per punto.

> Classicamente si dimostra che la continuità punto per punto (su un intervallo compatto) implica l'uniforme continuità. Costruttivamente non se ne conosce la dimostrazione, così si assume l'uniforme continuità dall'inizio. Non si perde nulla d'essenziale, e si guadagna una certa

---

(72) ibidem p. 353-354

(73) ibidem p. 4-5

semplicità [74].

- Altri punti sostanziali in cui la matematica costruttiva si differenzia da quella standard sono la topologia, la teoria degli insiemi, la teoria della misura, il restringersi agli spazi metrici, il che non è poco. Al posto dello spazio topologico si trova lo "spazio di intorni" e la topologia su un insieme X (detto "function space") è costituita da certe funzioni, dette continue, a valori in $\mathbb{R}$ che soddisfano ad opportune condizioni. Il punto di vista moderno sulla topologia e sugli insiemi è stato qui capovolto. I numeri reali(ottenuti si intende dagli interi solo con le loro proprietà costruttive) sono diventati il punto di partenza inducendo la topologia naturale sugli altri insiemi (dati costruttivamente, cioè dando regole meccaniche e finite per stabilire se un elemento sta o no nell'insieme) mediante la specificazione di quali funzioni sono continue. Qui i reali e le funzioni giocano il ruolo primario mentre la topologia generale e gli insiemi sono concetti derivati

> ...una nozione di vicinanza è introdotta classicamente in un insieme X non dando una famiglia di funzioni, ma dando una famiglia di sottoinsiemi, sia aperti che intorni. Classicamente questo è equivalente a dare una famiglia di funzioni da X all'insieme {0,1} mentre costruttivamente c'è una grande differenza perché solo i rarissimi sottoinsiemi liberi di X corrispondono a tali funzioni. Questo succede perché le funzioni sono definite nettamente mentre la maggior parte degli insiemi sono sfumati lungo i bordi ... La verità è che né i "function spaces" né gli "spazi di intorni" sono importanti come certe strutture correlate - spazi metrici e spazi vettoriali normali ... [75]

> - Fu enunciato da Lebesgue, Borel ed altri pionieri della teoria astratta delle funzioni che la matematica che stavano creando poggiava, in modo quasi unico a quei tempi, su metodi insiemistici e conduceva a risultati il cui contenuto costruttivo era problematico. Oggi è vero più che mai che l'analisi astratta non ha una interpretazione costruttiva pronta... L'approccio originale fu di considerare una misura come una funzione definita per insiemi. Più recentemente è diventato popolare considerarla

(74) *Ibidem* p. 60 sott. dell'autore

(75) *Ibidem* p. 71

una funzione definita per funzioni. Questo approccio si accorda con la nostra filosofia, che le funzioni (almeno quelle continue) dovrebbero essere preferite agli insiemi come oggetti primari di indagine ogni volta che si presenti scelta (76).

-Dal punto di vista costruttivo ci chiediamo se c'è della matematica significativa che non si possa fare, o forse che non si possa fare bene, all'interno dello schema che si è sviluppato. Dal punto di vista classico il problema è di sapere quanto della teoria non metrica e non separabile si possa riscoprire dai nostri risultati e quanto non si possa ... La situazione è facilmente riassunta: gli spazi nonmetrici e gli spazi metrici non separabili non giocano alcun ruolo significativo in quelle parti dell'analisi nelle quali questo libro è coinvolto (77).

Ma è chiaro che Bishop non può sempre rigidamente giocare a sostenere che ciò che non è costruttivo non è importante. In questo è già stato sconfitto l'intuizionista Brouwer, il suo ascendente più vicino, e da lui quindi deve programmaticamente prendere le distanze, in modo assai simile a quelle che prendono i bourbakisti da Hilbert. Bisogna riuscire a salvare buona parte dell'analisi, in caso contrario il programma non avrebbe alcuna credibilità presso gli altri matematici. Si cercano quindi "sostituti costruttivi" ad alcuni risultati e teorie classiche(78). Ci sembra assai significativo che questo si cerchi di fare nel caso di teoremi dall'evidente interesse applicativo come quello di Birkhoff (teorema ergodico) oppure nel caso della teoria delle algebre di Banach. Si deve ammettere - e se ne da un argomento euristico - che "il teorema di Birkhoff non è costruttivamente valido" essendo "un esempio in cui una successione $\{a_n\}$ di numeri reali che converge classicamente non converge costruttivamente". Inoltre il modo di pensare costruttivo rende una teoria difficile e poco elegante.

(76) Ibidem p. 154

(77) Ibidem p. 349

(78) Ibidem p. 359

> La teoria delle algebre di Banach commutative è l'unico esempio in questo libro di una teoria classica la cui versione costruttiva sembra forzata ed innaturale [79].

- Ma cosa significa "sostituto costruttivo" di un risultato? Significa - e qui veniamo ad uno dei nodi principali di questa ideologia - depennare i risultati della matematica dagli aspetti "metafisici" mantenendone i risultati pratici. Uno degli aspetti, secondo Bishop, "metafisici" è costituito dal "principio di onniscienza" che nella forma logica suona

> o tutti gli elementi di A hanno la proprietà P oppure esiste un elemento di A con la proprietà non P [80].

Un sostituto costruttivo è buono se basta aggiungere questo principio per ottenere il risultato classico. Storicamente, questo è il rifiuto esplicito del "non esiste ignorabimus" di Hilbert. Considerato l'uso che noi facciamo del termine ideologia ed il senso dato da Robinson alla parola "metafisica", non dovrebbe meravigliare se il rifiuto di Bishop del principio di onniscenza si trasforma in una richiesta altrettanto "metafisica" ed ideologica di quella che vorrebbe evitare. Cosa significa rifiutare che "per ogni numero reale $x \geq 0$, o $x > 0$, o $x = 0$"? [81].

- Quale è allora l'ideologia della matematica costruttiva? Cioè quali sono le convinzioni profonde che spingono un matematico costruttivo ad un *tour de force* altrimenti poco spiegabile? Una certa crisi si insinua nel matematico insoddisfatto ed alienato, sia perché isolato dal mondo nonostante il fiorire della disciplina sia perché trova difficoltà a dare significato al suo lavoro.

> Egli non crede che la matematica consista nel derivare brillanti conclusioni da assiomi arbitrari, di concetti truccati e vuoti di contenuto *pragmatico*, di giochi privi di significato ... La matematica è una mescolanza di reale e di ideale, ora l'uno ora l'altro spesso così presenti che diventa difficile distinguere quale è l'uno e quale è l'altro. La componente realistica della matematica - il desiderio di una

(79) *Ibidem* p. 233,235
(80) *Ibidem* p. 9
(81) *Ibidem* p. 26

> interpretazione pragmatica - fornisce il controllo che determina il corso dello sviluppo e le impedisce di scivolare in un formalismo senza significato. La componente idealistica permette semplificazioni ed apre possibilità altrimenti chiuse. I metodi di dimostrazione e gli oggetti da esaminare sono stati idealizzati in un gioco, ma la condotta reale del gioco è motivata in ultima analisi da considerazioni pragmatiche (82).

Anche se la comunità dei matematici è "unanime nell'accordo su come giocare alla matematica" bisogna cercare di "purgarla completamente dal suo contenuto idealistico" perché "esiste una alternativa soddisfacente" (83).

Per cogliere il significato attribuito da Bishop al termine "idealistico" se ne veda l'uso nei seguenti contesti

> un insieme non è un'entità che ha un'esistenza ideale. Un insieme esiste solo quando è stato definito ... Noi prescriviamo almeno implicitamente, cosa dobbiamo fare ... per costruire esplicitamente un elemento dell'insieme ...
>
> La geometria fu altamente idealistica dal tempo di Euclide e degli antichi al tempo di Cartesio, derivata com'era da assiomi ... Cartesio ridusse la geometria alla teoria dei numeri reali (84).

- La matematica classica si contenta dell'esistenza ideale mentre

> L'unico modo di mostrare che l'oggetto esiste è fornire una routine finita per trovarlo (85).

(82) Ibidem p. VIII sott. dell'autore

(83) Ibidem p. IX.

(84) Ibidem p. 14, VIII-IX. La definizione costruttiva di funzione è la seguente:"Una operazione da un insieme A all'insieme B è una regola <<f>> che assegna un elemento <<f(a)>>di B ad ogni elemento <<a>> di A. La regola deve fornire una riduzione esplicita, finita e meccanica del procedimento di costruzione di<<f(a)>> a quello di costruzione di <<a>> . Tale <<f>> si chiama una funzione se <<$f(a_1) = f(a_2)$>> quando <<$a_1 = a_2$>> (univocità)".

(85) Ibidem p. 8

Per questo motivo la radice dell'idealismo sta nel principio di onniscenza: rifiutandolo si rifiuta la logica classica con il principio del terzo escluso (o A o non A). La logica costruttiva è quindi diversa da quella usualmente ammessa in matematica, ad esempio <<p>> non è equivalente a << non (non P)>> e le dimostrazioni per assurdo sono giustificate solo se il numero delle alternative è finito. Il peso di queste scelte non classiche e non formalistiche ne fa una teoria che dipende fortemente dalla propria logica. Ma del resto non si vuole indulgere affatto a considerazioni metamatematiche storicamente battute e poco pragmatiche. La questione della consistenza della matematica vi ha un peso ancora minore che nel programma bourbakista. La dimostrazione matematica non deve evocare assiomi , deduzioni.

> In altre parole, una dimostrazione è una computazione [86].

- Bishop nonostante la sua insistenza sul realismo, sul pragmatismo, sui procedimenti computazionali (cioè meccanici e finiti come le moltiplicazioni tra interi) non può però ridurre la matematica all'efficienza.

> La matematica dovrebbe e deve occuparsi dell'efficienza, forse a detrimento dell'eleganza, ma questi dati verranno alla ribalta solo quando il realismo avrà cominciato a prevalere.
> E' infatti un fatto innegabile che la matematica idealistica produceva i risultati più generali con il minimo sforzo [87].

Ma se questo sforzo si meccanizzasse si potrebbe anche sprecare energia. Così fa capolino nelle ultime pagine del libro quello che in realtà potrebbe diventare l'asso nella manica di questo programma oggi minoritario: la computerizzazione della matematica.

> Così come scritto questo libro è adatto alle persone piuttosto che al computer. Sarebbe di grande interesse averne una versione adatta al computer [88].

---

(86) Ibidem p. 354
(87) Ibidem p. 3,6
(88) Ibidem p. 357

Come non pensare allora che una modificazione sostanziale della matematica indotta da un programma che la riduce agli interi, si accordi nella realtà con la modificazione prodotta dal sempre più intenso uso dei computer nella ricerca scientifica?

Una matematica Materialista?

Dissenso sostanziale nei confronti delle posizioni comunemente sostenute dai matematici si trova espresso anche nel punto di vista di Chandler Davis. Si critica il matematico che "persegue la teoria senza rapportarla alla pratica" si critica la matematica come "scienza da poltrona" che "evita il rapporto con una pratica specifica perché generalizza" (89). Dovrebbe invece essere "materialista", non "idealista" o "platonista" perché non è la mente che la fa esistere o la rende conoscibile bensì il suo collocarsi nell'"universo reale che noi osserviamo attraverso i nostri sensi e di cui il nostro corpo è parte", inoltre bisogna

> collocare la matematica nel suo contesto sociale, capire la sua genesi sociale ed il suo impatto sulla società (90).

Quanto il matematico bourbakista è corporativo, perché si preoccupa essenzialmente di tirare fuori teoremi dal proprio orticello e cerca la legittimazione del proprio fare matematica all'interno del proprio modello produttivo e del proprio gruppo, tanto questo matematico "materialista" la trova fuori. Diventano così centrali le questioni dell'esistenza degli oggetti matematici, della loro utilizzazione, del rapporto con l'esperienza.Ritroviamo qui quella che forse è l'unica costante della "filosofia spontanea" dei matematici, cioé una larga indifferenza ai problemi dei fondamenti, come problema solo logico.

> Uno semplicemente fa matematica seguendo certe regole; queste regole includono (devono includere? in ogni caso di fatto includono)quelle che non hanno apparente giustificazione se non su ipotesi platoniste di esistenza.

---

(89) Davis 1974 p. 38

(90) Ibidem p. 37,39.

> Focalizzare l'attenzione sulla teoria dei tipi o sull'assioma della scelta significa non cogliere il segno. Se le nostre affermazioni matematiche hanno da essere definite esse non debbono basarsi sulla possibilità di procedimenti di ricerca certamente impossibili (91).

Si cita Bishop e si accolgono blandamente le obiezioni intuizionistiche contro il principio del terzo escluso.

> - ... esistenza matematica è possibilità di uso nel ragionamento matematico nel ruolo di un nome - di - oggetto esistente,

ma questa definizione interna non basta:

> Il XIX secolo aveva non solo prodotto ed ammirato la teoria delle funzioni di variabile complessa, ma anche fatto cose con essa. L'analisi classica era stata sottoposta alla verifica della consistenza nell'uso (un argomento molto diverso dalla dimostrazione di consistenza). Era stata sottoposta alla verifica del servizio fornito ad una teoria fisica verificabile - persino al test di trasferibilità ad una teoria fisica nuova(92).

Essendo la matematica una "scienza viva in relazione con le altre scienze, come una attività umana i cui prodotti sono espressioni umane "bisogna rispettare gli analisti classici del XX secolo che non vedendo un fondamento alternativo finirono per "accettare il platonismo come ipotesi di lavoro" (ci si ricordi di Dieudonné).

> Al platonismo sta per essere data la migliore patente di materialismo (od almeno di pragmatismo)... Io penso di no. Penso che <<je n'ai pas besoin de cette hypothèse>>.

Infatti basta privilegiare la pratica:

> l'attitudine alla impazienza pragmatica ci aiuterebbe ad evitare l'illusione di una perfezione già raggiunta, una delle fonti della reificazione (93).

---

(91) Ibidem p. 43,42

(92) Ibidem p. 40,44 sott. dell'autore.

(93) Ibidem p. 44-46.

E' chiaro in questo quadro che il problema della verità, e del rigore diventano secondari ed assumono ad esempio aspetti del tutto contrastanti con la filosofia bourbakista.

> La nostra convinzione che nessuna esperienza potrebbe falsificare un teorema vero è correlata alla nostra capacità di dichiarare ciò vero a priori senza aver fatto appello all'esperienza.

Si cita Struik

> la loro verità più intima segue dal fatto che essi rappresentano relazioni oggettive nel mondo materiale

e si asserisce che la verità matematica è più simile che non si creda a quella esmpirica.

> Perché la matematica contiene asserzioni specialmente immuni alla falsificazione? Arguisco che questa immunità vada spiegata non come indifferenza all'esito di esperimenti ma come invarianza rispetto ad un vantaggio relativamente ampio di esiti alternativi. Una teoria matematica è un sistema di asserzioni che, noi presumiamo, relativamente ad altri sistemi, rimarranno valide o cadranno insieme; e che (lasciatemi aggiungere) ci aspettiamo che siano valide in qualche posto.

E' una differenza di grado, non una separazione netta dalle altre scienze empiriche.

> Il nostro rigore risulterebbe dalla verifica ingegnosa del significato di nuovi passi, non dal rifiuto di farli (94).

- Assistiamo qui ad uno spostamento dal criterio di verità al criterio di "interesse "analogo a quello bourbakista, perché generato da cause simili. Ma ben altra è la consapevolezza ideologica e soprattutto Chandler Davis risolve il nuovo criterio abolendo la separazione dal mondo e non ribadendo la funzione della corporazione.

---

(94) Ibidem p. 48,49,64.

> Ciò che in matematica corrisponde al rifiuto di una teoria empiricamente falsa è la decisione che una certa area è irrilevante o non interessante... Capisco la 'verità matematica' nel modo che corrisponde al mio capire l'esistenza matematica'... una proposizione matematica è vera ogni qualvolta può essere trattata nel ragionamento matematico nello stesso modo con cui una asserzione fattuale viene trattata nel ragionare sulle cose obiettive ... Se viene privata quindi del criterio di rilevanza e di interesse la verità matematica rimane un criterio unilaterale e super-accademico.

La soggettività dei criteri di interesse si supera perché

> Un buon pezzo di matematica è potenzialmente utilizzabile nel fare asserzioni fattuali attorno al mondo obiettivo.

Ma se è sufficiente l'essere potenzialmente utilizzabile non si corre il rischio che il criterio si vanifichi, perché la matematica può pensarsi tutta, prima o poi, potenzialmente applicabile? Nonostante questa evidente obbiezione e lo scontro quindi di paradigmi con i criteri formalistico-assiomatici, il matematico materialista non rinuncia ai suoi, perché ritiene che gli altri siano "egualmente sottili, egualmente dipendenti da congetture riguardo alla futura evoluzione della scienza, e meno chiari". Ma soprattutto "la teoria si sviluppa meglio in rapporto con la pratica" [95].

- Di fronte alle tante applicazioni che si danno oggi dei vari settori della matematica, il criterio del riferimento al mondo reale non può bastare a dare unità, perché rimane astratto, specie per un materialista così pragmatico. Bisogna costruire i ponti tra un settore e l'altro, ma senza pretendere una riduzione a qualche principio ultimo. La biologia ha guadagnato dal suo rapporto con la fisica ma sarebbe errato dire che la biologia si fonda sulla fisica, ci ricorda Davis[96].

---

(95) Ibidem p. 50-52,37
(96) Ibidem p. 60-61

- Il criterio di rilevanza non può quindi ridursi bourbakisticamente ad individuare i settori ultimi o più generali della matematica, ma diventa un criterio di coerenza ideologica complessiva con cui passare in rassegna i molti settori della matematica.

> Così spesso c'è accordo che il più generale sia più matematico ... Ma il più generale non è sempre la migliore matematica, con qualsiasi criterio [97].

Si rifiutano i ragionamenti sugli insiemi infiniti, ma non ci si riduce agli interi, come se 2+2 = 4 fosse l'intera matematica. "Fare manipolazioni geometriche è una forma di ragionamento matematico" autonomo. La geometria non va ridotta agli interi od all'analisi matematica, nonostante l'opinione della maggioranza dei matematici.

> Il continuo lineare può essere manipolato con la stessa utilità e confidenza delle idee della geometria euclidea.

Lo stesso si può dire della topologia elementare sintetica (problema dei quattro colori). Questo "continuo" non va tanto pensato come l'infinito attuale dei formalisti, ma - proprio perché non è autonomo anche se poggia sull'intuizione - come oggetto geometrico connesso ed infinitamente divisibile. Non dobbiamo però vederci "l' insieme di tutti i sottoinsiemi di un insieme finito non numerabile ed altri mostri di cui dubito l'esistenza" [98]. L'aritmetica e la geometria euclidea sono aree salde, mentre asserzioni come "ogni numero reale è o razionale o irrazionale" sono privi di senso. Ma non è necessario ridurre l'analisi ad uno schema di programmi di calcolo per l'analisi numerica per ottenere una legittimazione, basta pensare ai reali come ad un campo archimedeo, ordinato e completo. Si prendono quindi nettamente le distanze dai costruttivi e dagli intuizionisti perché "la topologia è una teoria significativa "ed inoltre" il ponte tradizionale tra essa e l'analisi ha qualche senso", mentre non usare le funzioni discontinue "comporta

---

(97) Ibidem p. 53-54

(98) Ibidem p. 56-58

intollerabili circonlocuzioni" (99).
Chandler Davis non "crede" al teorema di Heine-Borel, ma valorizza la teoria di variabile complessa, ha un vecchio amico nello spazio di Hilbert L^2 anche se non tutti i suoi elementi possono identificarsi con funzioni. Crede ai reali non-standard, come crede alle derivate fatte, in molte teorie fisiche rispettabili, rispetto ad una variabile discreta, ma esita davanti alla loro fondazione sui modelli logici (100).

- Abbiamo assistito in questo caso ad una esplicita chiamata alla ribalta dell'ideologia che è presente - come sempre - anche in tutte le altre posizioni, ma che veniva smentita e mascherata, o trattata con un po' di vergogna. Anche quando viene rivendicata esplicitamente come da Robinson essa ricopre un ruolo non preponderante rispetto alla trattazione matematica tecnica. In questo lavoro di Davis invece le categorie sono esplicitamente filosofiche - idealismo, platonismo, materialismo - ed il programma viene proposto esplicitamente in rapporto ad esse. E' della maggiore importanza notare infine come anche questo nostro matematico "materialista" non esiti a far pesare il suo punto di vista ideologico su teoremi e su teorie matematiche particolari trasformandolo in giudizio di valore.

Il ruolo della storia nella critica all'assetto assiomatico-formale delle matematiche.

Nella nostra analisi dei diversi punti di vista abbiamo cominciato dalle posizioni dei matematici attivi perché in genere si pensa-erroneamente- che nelle questioni scientifiche la dissidenza possa essere al più metafisica (questa volta nel senso positivistico e spregiativo del termine), filosofica e legata solo a qualche personale sogno programmatico. Ma si intende che lo spettro va allargato anche alle posizioni di chi matematico attivo non è prevalentemente o non è affatto. Si perde spesso il riferimento alla pratica

(99) *Ibidem* p. 59-60,62

(100) *Ibidem* p. 60,62,63.

della ricerca, ma in compenso gli storici ed i filosofi sono per mestiere più espliciti ed amanti delle analisi generali.

Una delle critiche più profonde e motivate all'immagine assiomatico-formale delle matematiche con particolare riferimento alla deformazione didattica della New Math, è quella portata dal poliedrico M. Kline (topologo, fisico, storico, filosofo, pedagogo).

> Prima di tutto la matematica è essenzialmente una attività creativa, e questo richiede immaginazione, intuizione geometrica, sperimentazione, giudizioso congetturare; tentativi ed errori, l'uso delle analogie più vaghe... Creatività presuppone flessibilità nel risolvere i problemi ed ogni idea proveniente da ogni dominio della matematica dovrebbe essere accettata cada o meno entro i confini di una particolare struttura assiomatica. L'ultima di fatto opera come un vestito stretto per la mente (101).

La logica o distorce la matematica o viene dopo.

> I concetti, i teoremi, le dimostrazioni emergono dal mondo reale. Sono gli usi ai quali la matematica è sottoposta che ci dicono cosa è giusto ... Dopo avere determinato sulla base degli usi quali proprietà le operazioni ed i concetti matematici devono avere si inventa <u>allora</u> una struttura logica... La logica <u>non</u> stabilisce il contenuto della matematica. Gli usi determinano la struttura logica... Lo sviluppo deduttivo di una branca della matematica è spesso così artificiale da risultare senza senso(102).

- I criteri di verità e di rigore sono relativi.

> Non esiste una dimostrazione dal rigore conclusivo. Questo fatto deriva da modo reale in cui la matematica si sviluppa... Non esistono problemi risolti, ci sono solo problemi che sono risolti più o meno. La matematica è corretta come lo sono gli esseri umani e gli uomini sono fallibili(103).

---

(101) Kline 1970 p. 271

(102) <u>Ibidem</u> p. 272

(103) <u>Ibidem</u> p. 279

Se questa è la matematica,come si definisce nel suo sviluppo e nei suoi metodi,l'errore dei fautori della "matematica moderna" è duplice: si dà una immagine falsa della matematica e se ne complica enormemente l'apprendimento. Non solo l'approccio euristico intuitivo risulta il più efficace per l'apprendimento - essendo un approccio motivato perché legato all'esperienza concreta dello studente e perché gli permette in un certo senso di creare la matematica evitando di imparare a memoria concetti e teoremi proposti da altri - ma soprattutto è in accordo con i procedimenti di ricerca e di sviluppo delle teorie usati dai matematici nella realtà.

- Qui la storia assume un ruolo centrale nell'argomentazione in quanto si può verificare nei fatti come si sono comportati i matematici del passato e quali procedure seguivano, se euristiche o deduttive. Si verifica infatti nella storia come muta il rigore matematico e quale ruolo nell'evoluzione hanno avuto le applicazioni e le richieste fisiche rispetto ai procedimenti assiomatici e formali. Le analisi storiche acquistano allora un peso sostanziale e non sono la valorizzazione pubblicitaria del proprio mestiere, come non lo erano i riferimenti storici presenti negli eretici fin qui analizzati. Si intende che sono concezioni della storia per molti versi apposte a quella bourbakista perché attente e sensibili ai rapporti tra la matematica e le altre scienze, tra la matematica e la cultura generale, tra la matematica e l'ambiente sociale. E' per tale ragione che si provano riferimenti a matematici come F. Klein, H. Poincaré e H. Weyl, per citare solo i più recenti, in quanto portatori di concezioni matematiche non assiomatico-formalistiche.

Il grosso impegno nel settore storico di M. Kline, teso a collocare le matematiche in un contesto culturale più ampio di quello scientifico ed a fare risaltare il ruolo ricoperto dalle scienze sperimentali nella loro evoluzione, rafforza grandemente le sue critiche alla "matematica moderna"[104].

La storia assume allora un ruolo discriminante tra ideologie matematiche diverse. Il matematico "moderno", così prigioniero del proprio specialismo, non si occupa di storia e la ritiene irrilevante: i problemi si pongono e si risolvono tenendo conto solo dello stato presente della ricerca. Se ci si occupa di storia - facendo naturalmente l'apologia della situazione esistente - si fa un altro mestiere la cui utilità per la ricerca attiva è dubbia od al massimo casuale, bene che vada è una disciplina tra tante. Ma le cose stanno forse peggio perché gli insegnamenti universitari di storia delle matematiche sono tra i più scarsi. Questo capita probabilmente in tutti i paesi del mondo: dall'Italia (gli incarichi si contano su una mano, di cattedre ce n'è una sola) agli USA in cui su una scelta di 11 Università di vario livello e tipo (private o di stato) solo 4 offrono corsi storici (ma 2 sono di mezzo semestre) e solo sulla matematica antica e preinfinitesimale. "Nessuna menziona qualche corso sulla storia della matematica moderna"[105].

- Solo un'ideologia attinente ad un programma complessivo come quella bourbakista dà una funzione all'analisi storica, come abbiamo visto, ma è proprio la parte che più viene criticata in genere dal matematico attivo. Il rapporto tra ricerca matematica e storia dipende dunque da ciò che si intende per l'una e per l'altra. Se con la prima si intende la pura dimostrazione di teoremi di un ben definito settore, senza inquadramento generale del problema o visione complessiva, senza giustificazioni di sorta nell'uso od in un programma, senza proccupazioni didattiche, mentre con la seconda si intendono gli aneddoti, le biografie, le querelles sulla priorità, il ritrovamento di vecchie lettere arrivando al massimo a Leibniz,senza una profondità culturale o sociale, una storia cioé come elenco lineare di effetti senza cause e senza scelte, è sicuro che l'unico rapporto possibile sarà quello me-

---

(104) Kline 1953 e 1972

(105) Wilder 1972 p. 479-480.

ta-accademico tra due corporazioni. La prima è allora, giustamente per la questione sostanziale del rapporto col mercato, di gran lunga la più forte.

- Se al contrario si ha "una visione ampia della matematica come organismo vivente in crescita che si evolve continuamente" (e quindi si dovrebbe studiarla "come una cultura"), se

> ciò di cui si ha bisogno è qualcosa di realmente vicino agli interessi di ognuno... Ciò non dovrebbe solo allargare il proprio punto di vista mostrando il posto della matematica nella propria cultura, ma dovrebbe informarlo dove la sua specialità si raccorda con lo schema generale della matematica, come in primo luogo nacque e dovrebbe dargli i mezzi per giudicare dove probabilmente sta andando.

La storia sarebbe allora in grado di

> fornire principalmente gli stadi del processo evoluzionaristico... la dinamica dei processi: cioè quelle fasi che furono gli strumenti di produzione degli stadi (106).

Quando lo storico riesce a fare questo assume una funzione significativa ed indispensabile sia per la ricerca che per la didattica.

- Analizzando ad esempio come sono mutati gli standard di rigore in analisi ci si può convincere che

> La matematica cresce in due modi; non solo per incrementi successivi, ma anche per rivoluzioni occazionali... La matematica non è l'unica scienza senza rivoluzioni. Piuttosto, la matematica è quell'area dell'attività umana che ha ad un tempo le rivoluzioni meno distruttive e quelle più importanti (107).

---

(106) Ibidem p. 483,482,487. Wilder si accorge ovviamente che può essere accusato di "contrastare il platonismo" ed asserisce che una teoria storica applicata a delle teorie matematiche "non prende posizione sulla loro cosiddetta 'verità'". Affermazione che indebolisce di molto la sua argomentazione e che va contestata nettamente alla luce della presente analisi.

(107) Grabiner 1974 p. 364

Non si dà dunque nessun progresso lineare verso le "strutture" e nessuna garanzia assoluta di rigore può essere fornita da un sistema assiomatico-formale.

Cosa si deve sostituire allora a tali certezze storiografiche quando esse si rivelano infondate? " La nuova matematica nacque in rapporto specifico con la produzione"(108). E questa posizione storica va di pari passo con la rivalutazione della matematica applicata (anche rispetto alla didattica).

> ... le applicazioni della matematica come la meccanica neutoniana, fanno parte della nostra tradizione culturale e dell'attività umana della matematica. Imparare il calcolo infinitesimale senza capire cosa indusse al suo sviluppo e come veniva usato da Newton ed altri, è come imparare a suonare le scale sul pianoforte senza che ci sia mostrata alcuna composizione (109).

Alcune filosofie nella matematica non-deduttivistiche: Heyting, Kalmar Lakatos.

Accanto all'affermazione di Dieudonné che la matematica è fatta "di simboli privati di significato" abbiamo visto come altri abbiano rivendicato vigorosamente un suo rapporto con "la pratica", sia come criterio di "esistenza" sia come criterio di "sviluppo".

Dopo il tentativo di Russell di ridurre la matematica alla logica e dopo il formalismo di Hilbert che la confina ai "segni sulla carta" i filosofi di professione si sono dimostrati di gran lunga più sensibili alla prima posizione. Tanto che dentro i tesi di filosofia della matematica si rischia di trovare solo più la logica matematica, uno dei tanti retaggi del neopositivismo che varrebbe la pena riuscire a scrollarsi di dosso e che a causa della sua diffusione non è neanche il caso di richiamare nella nostra analisi.

---

(108) Hodgkin 1976 p. 53

(109) Griffiths & Howson 1974 p. 287.

E' al contrario assai utile riportare le posizioni di alcuni filosofi che sembrano più in accordo con il secondo punto di vista e che, al di là delle differenze specifiche, possiamo chiamare anti-deduttivisti.

– L'intuizionista Heyting ritiene che "nessuna filosofia è necessaria per capire la matematica" perché

> le nozioni base della matematica sono così estremamente semplici, persino triviali, che dubbi intorno alle loro proprietà non sorgono del tutto. L'intuizionismo non è un sistema filosofico come il realismo, l'idealismo o l'esistenzialismo...
> ... la logica è complicata e quindi inadatta come base per la matematica (110)

La "base della matematica" potrebbe stare "nel processo del contare", ma "è ancora troppo complicato" perché richiede il confronto tra un "mondo esterno" ed "i numeri astratti". Il vero atto basilare consiste nell'isolare "entità con un atto mentale più o meno conscio", si tratta di associare "innumerevoli memorie, impressioni e immagini".

> L'entità concepita nella mente umana è il punto di partenza di tutto il pensare ed in particolare della matematica ... la matematica nella forma più semplice rimane confinata nella mente di ognuno (111).

- Qui siamo a monte di tutti i problemi posti dai matematici per i quali lo atto elementare - se ce n'è uno - è "fare la matematica" (da Dieudonné a Ch. Davis). Rispetto allo stesso Errett Bishop si vogliono fondare i numeri interi che per lui sono dati. Il processo del contare si fonda sulla proprietà della nostra mente di fissare una percezione nella memoria e di ripeterla. Non importa ciò che si conta, ma l'atto mentale in sé, così la natura degli oggetti che costituiscono il numero è irrilevante. Arrivati agli interi si possono dimostrare i teoremi che li riguardano, ma questo significa <u>costruire</u> esplicitamente le proprietà in esame.

---

(110) Heyting 1974 p. 122-123

(111) <u>Ibidem</u> p. 123-124

- La difficoltà classica di questo approccio intuizionista sono i numeri reali intesi come "successioni infinite di numeri naturali" perché, diversamente dalla matematica usuale in cui si può considerare l'insieme di tutte le successioni dei razionali che convergono, qui ogni successione va esplicitamente caratterizzata ("costruita") da una legge. Qualcuno a questo punto postula il "continuum" (attraverso l'intuizione del tempo), altri-tra cui Heyting - preferiscono il concetto di "successione di scelta". Esse sono "successioni senza legge nelle quali ogni scelta deve essere completamente libera". Come già abbiamo visto con Bishop queste richieste cambiano l'analisi considerevolmente, ma Heyting preferisce lavorare sui concetti base come quello di "insieme" che ammette possa darsi, contrariamente a Bishop, anche non costruttivamente (112).

- La differenza con ogni fondazione assiomatica e formale è netta.

> La logica non è il fondamento della matematica, al contrario è concettualmente una parte complicata e sofisticata della matematica

Anzi"la logica può essere considerata come una parte delle linguistica o come una teoria filosofica del mondo" perché secondo Heyting "la teoria del linguaggio come ogni teoria attorno al mondo reale è matematica applicata".

> ... la legge del terzo escluso non può essere dimostrata. Se non sappiamo se A è vera o no è meglio non farci sopra asserzioni ... La logica intuizionistica rende possibili distinzioni più sottili, che la logica classica a due valori è incapace di esprimere.

In linea col giudizio già dato sulla logica Heyting però non crede che queste differenze logiche abbiano grande peso(113).

-Gli preme di più prendere le distanze dalla concezione formalistica della

---

(112) Ibidem p. 126-128

(113) Ibidem p. 129-131

matematica.

> Il formalista considera ogni ragionamento matematico intuitivo come inesatto. Studia il linguaggio in cui tali ragionamenti sono espressi e cerca di formalizzarli.

Il risultato è un sistema assiomatico e formale.

> Dal punto di vista intuizionista, questo processo appartiene alla matematica applicata ... Questo sistema formale si può applicare nella scienza e nell'industria; la sua funzione è paragonabile a quella di una macchina in una fabbrica ... è innegabile che gli scienziati e gli ingegneri sono più interessati alle formule matematiche stesse che alla loro interpretazione astratta.

Non ci sarebbe conflitto tra intuizionismo e formalismo se questo ultimo stesse al suo posto come

> costruzione di un sistema formale motivato dalla sua bellezza interna o dalla sua utilità per la scienza e l'industria. Essi si urtano quando i formalisti pretendono che i loro sistemi esprimano il pensiero matematico.

Perché "le costruzioni mentali non possono essere rese esattamente attraverso il linguaggio ..." e le dimostrazioni di consistenza tipiche dei formalisti hanno essenzialmente un significato pratico.

> La pretesa che una dimostrazione di consistenza fornisca una interpretazione del sistema formale è completamente infondata.

- La matematica in questa visione (il termine pare del tutto appropriato) coincide col pensiero primigenio, è la parte ineffabile dell'uomo. Così ogni pensiero cosciente e linguisticamente espresso è di qualità inferiore, ma in quanto valido rimane matematica applicata. Tra la vita di ogni giorno e le scienze più astratte, come tra le scienze naturali e quelle umane la differenza è solo una questione di grado. La discriminante non sta nel metodo,ma "nel modo con cui ottengono la loro materia prima" (114) .

---

(114) Ibidem p. 132-133

- Da tutte le altre posizioni fin qui analizzate alle speculazioni filosofiche di Heyting sono cambiati i problemi, il modo di affrontarli, la terminologia.

La matematica secondo lui è fatta di problemi che il matematico militante neanche considera, la matematica applicata comprende quella che normalmente si chiama pura. Nonostante cerchi di distinguersi dai logici e dai filosofi essi sono quasi gli unici che starebbero ad ascoltarlo. La verità è che la questione della crisi dei fondamenti nei termini coi quali si è data in passato risulta oggi terribilmente invecchiata.

Di tutt'altra natura sono le critiche di L. Kalmar a chi guarda "la matematica come una <<scienza puramente deduttiva>>" Questi matematici dimenticano

> che i loro assiomi furono estratti all'origine da fatti empirici e che le loro regole di inferenza deduttiva sono valide perché esse sono state verificate nell'attuale pratica pensanti [thinking practice] della umanità.

Se si passano in rassegna i risultati negativi legati al problema dei fondamenti della matematica (Logicismo,Intuizionismo e Formalismo)

> dobbiamo rinunciare all'idea classica che i concetti primitivi di una branca della matematica possano essere definiti implicitamente attraverso un sistema di assiomi, ora invece si pensa che un sistema di assiomi definisca le proprietà comuni a tutti i suoi modelli, standard e non-standard, un punto di vista adottato da molto tempo in Algebra. Presto parleremo di <<una teoria degli insiemi>> proprio come oggi parliamo di un gruppo o di un anello.

La speranza di poter dimostrare che la matematica è "una scienza puramente deduttiva stabilmente fondata ... non si è realizzata di fatto mai". Dobbiamo quindi ammettere che

> la consistenza della maggior parte dei nostri sistemi formali è un fatto empirico; persino quando essa è stata dimostrata, l'accettabilità dei metodi matematici usati nella dimostrazione (ad esempio induzione trasfinita fino a qualche ordinale costruttivo) è di nuovo un fatto empirico... Perché non ammettiamo che la matematica, come le altre scienze, è in ultima analisi basata sulla pratica, e che deve essere verificata nella pratica?

Così accanto ai metodi deduttivi si possono usare quelli induttivi usati nelle altre scienze. Se non pensiamo che una asserzione generale dimostrata per induzione sia vera che dire di una asserzione esistenziale dimostrata per deduzione?

> Si ammettano o meno i metodi induttivi in matematica, o ci si confini nella deduzione... i nostri teoremi matematici saranno (almeno parzialmente) verità relative che forse richiederanno modifiche in futuro. Essi possono tuttavia essere approssimazioni alla verità assoluta (cioè a quello che capita in realtà) proprio come lo sono alcune leggi fisiche o come sono supposte esserlo sulla base dell'evidenza pratica.

Si può sviluppare su ciò un programma di ricerca, basta che a questi problemi siano "garantiti i diritti civili" (115)

- Questa posizione presentata ad un congresso di filosofia della scienza nel 1965 ha provocato un'altra reazione furibonda del formalista Y.Bar-Hillel (si ricordi A. Robinson): ma come! dopo i trionfi del formalismo si risuscita l'empirismo? L'intuizionista Heyting ha commentato al proposito che preferisce la concezione di Weyl (intuizionista pure lui). Kleene ha osservato che certo una parte della matematica è empiricamente fondata (ad esempio il teorema di Fermat), ma altre parti sono più sicure come la logica classica, il problema è di dirlo chiaro nelle ipotesi. Paul Bernays ha espresso l'opinione che dare un ruolo all'esperienza gli andrebbe bene anche per la matematica, purché sia però "esperienza mentale". Si potrebbe introdurre una distinzione tra Bar-Hillel e Heyting rispetto agli altri interventi perché in

(115) Kalmar 1972 p. 188, 191-194.

sistono a concepire la questione dei fondamenti nei termini obsoleti degli anni '20 e '30'[116].

Kalmar capisce invece che oggi una concezione della matematica per essere valida deve permettere lo sviluppo specialistico e non pretendere "riduzioni" troppo rigide: una teoria degli insiemi deve valere quanto la teoria dei gruppi, non può risultare più uno dei pilastri della matematica. Kalmar si appella infatti molto significativamente ai computer.

> Sembra improbabile che, persino nel migliore dei casi, si estenderà oltre l'analisi classica il campo della matematica dimostrativamente consistente - a meno che i computers, usando l'induzione, o qualche altro principio troppo sofisticato per la mente umana, possano aiutarci nel costruire dimostrazioni di consistenza.

E replica a Bar-Hillel che lo aveva tacciato per questo di frivolezza e di essere inintelligibile.

> Considera forse <<prossimo al frivolo>> o <<inintelligibile>> l'idea di usare un microscopio per osservare oggetti troppo piccoli per gli occhi umani? Perché escludere a *priori* la possibilità di <<allungare>> la mente umana attraverso artefatti, se possiamo in tal modo allungare i sensi umani?[117].

- Siamo in tal modo fuori dalla classificazione che l'empirismo logico fa tra scienze empiricamente fondate (a *posteriori*, fallibili e dotate di contenuto come la fisica ...) e scienze logicamente fondate (a *priori*, tautologiche ed infallibili come le matematiche). Si insinua (giustamente) l'idea che la collocazione professionale nelle varie corporazioni cominci a pesare sui criteri normativi di demarcazione:

> devo attribuire la differenza in stile tra i suoi commenti [Bar-Hillel] e quelli di Heyting, Kleene e Bernays al fatto che gli ultimi sono matematici mentre Bar-Hillel è un filosofo[118].

---

(116) Lakatos 1972 p. 195-207
(117) *Ibidem* p. 191,205
(118) *Ibidem* p. 204

Nonostante che si tratti di qualcosa di più di una differenza in stile e che Kleene e Bernays siano piuttosto dei logico-matematici, l'osservazione sembra tutto sommato azzeccata perché individua la radice pratica e sociale delle "nebulose metafisiche". Ci pare altrettanto importante cogliere - come fa Kalmar-il problema dell'influenza che lo sviluppo tecnologico recente ha oggi di fatto su certe aree della matematica (ci si ricordi anche di Bishop, p38). Si tratta soprattutto di analizzare - se è vero che la matematica si fonda su una pratica - quali modifiche concettuali i computer producano nella ricerca e come si articoli nei dettagli la loro capacità di indurre problemi nuovi, piuttosto che di risolvere "rispettosamente" problemi matematici già dati (119)
Potrà sembrare strano a molti (matematici o meno) che esistano posizioni come quella appena espressa, ancora più singolare allora riulterà loro sapere che non sono isolate. I. Lakatos sostiene, con la consueta lucidità legata alla sua abilità linguistica di produrre terminologie nuove per nuove distinzioni, che "La matematica è quasi-empirica" e che siamo di fronte oggi ad una "rinascita dell'empirismo" nella filosofia della matematica (120).

- Egli riesce a scovare ben tredici affermazioni di sapore para-empirico in alcuni filosofi e logici-matematici, ma anche in due matematici attivi come Weyl e von Neumann. Nell'elenco si trovano persone insospettabili, come un Russell del 1924: la logica è come le equazioni di Maxwell,"ambedue sono credute a causa della verità osservata di alcune delle loro conseguenze logiche". Come un Gödel del 1944: "la matematica... coll'apparire di ulteriori

---

(119) Questo punto ha una importanza centrale, ma purtroppo è largamente assente dalla letteratura. Esiste però l'articolo di Knuth 1974, mentre la "soluzione" del problema dei quattro colori proposta recentemente e che fa uso in modo essenziale del computer potrebbe porre tale questione in primo piano Cfr. Appel & Haken 1977

(120) Lakatos 1976 p.201. Questo lavoro è stato pubblicato postumo, perché Lakatos muore nel 1974, ma ha avuto origine proprio dalla discussione seguita alla conferenza di Kalmar, cui lo stesso Lakatos intervenne. Lakatos 1972 p. 199-202.

assiomi per la teoria degli insiemi sarà sempre più fallibile" e del 1947: gli assiomi "dovrebbero essere assunti almeno nello stesso senso di ogni teoria fisica ben stabilita". Scrive Von Neumann nel 1947:

> Dopo tuttola matematica classica si poggia su fondazioni sane almeno quanto, ad esempio, l'esistenza dell'elettrone.

Il più sospettabile (intuizionista) Weyl sostiene nel 1959:

> una matematica veramente realistica dovrebbe essere concepita, in linea con la fisica, come una branca della costruzione teorica dell'unico mondo reale e dovrebbe adottare la stessa sobria e cauta attitudine verso le estensioni ipotetiche delle proprie fondazioni che viene esibita dalla fisica(121).

- Da buon seguace del suo maestro Popper,Lakatos a questo punto deve andare alla ricerca di altri criteri di demarcazione,visto che le vecchie distinzioni tra scienze induttive e deduttive non funzionano più, ma - abbastanza sorprendentemente per un popperiano - non li trova più distinguendo il contesto della scoperta da quello della giustificazione. Non è solo nell'arrivare alle teorie matematiche ed ai teoremi - come mostra ampiamente anche la storia - che i ricercatori non si sono mai sognati di dedurre (preferendo metodi euristici, intuizioni ed analogie), ma è addirittura nel legittimarli a <u>posteriori</u> (la "ricostruzione razionale") che alcuni matematici paiono preferire oggi criteri empirici. La distinzione di fondo va fatta ora tra teorie "euclidee"e teorie "quasi-empiriche". Nelle prime il criterio di verità scorre dalla cima (gli assiomi) al fondo dove stanno le asserzioni base (i teoremi principali), mentre nelle seconde ciò che scorre è un criterio di falsificazione ed il moto avviene in senso opposto, dal fondo alla cima. La teoria scientifica diventa empirica (come la Fisica) se il criterio di falsificazione è costituito da esperimenti che avvengono nello spazio-tempo.

> Tuttavia gli studi sui fondamenti condussero inaspettatamente alla conclusione che una riorganizzazione Euclidea della matematica come un tut

(121) <u>Ibidem</u> p. 202-204

> to poteva essere impossibile; che almeno le teorie matematiche più ricche erano, come le teorie scientifiche, quasi-empiriche (122).

Anche i grandi sistemi logici classici sono alla fin fine quasi-empirici. Ma allora come distinguere la matematica dalle scienze naturali una volta che anche la matematica è stata resa scienza - nell'accezione di Popper - da un processo di falsificazione possibile ?

> Ora nessuno pretenderà che la matematica sia empirica nel senso che i suoi falsificatori potenziali siano asserzioni spazio-temporali singolari [gli esperimenti].

Ma allora quale è la natura della matematica? "Cioè quali sono i suoi falsificatori potenziali?" Non possono essere solo logici perché se no avremmo una teoria euclidea, ce ne sono invece di "euristici"che misurano la distanza tra la teoria assiomatico-formale e la teoria informale corrispondente. Se un teorema della teoria formale è negato da il teorema corrispondente della teoria informale quest'ultimo è un falsificatore euristico della prima. Il dato di partenza è allora una teoria informale a confronto con una teoria formale quasi-empirica che, sotto la spinta dei falsificatori euristici modifica progressivamente gli assiomi onde ricoprire il più possibile quella informale. Si è preso atto quindi finalmente che non tutta la matematica è formalizzata o formalizzabile. Chi lo pensava né è riuscito a risolvere tutti i problemi logici (consistenza, completezza, decidibilità ...) né è riuscito parimenti a coprire tutto ciò che la comunità dei matematici considerava "matematica". Esistono quindi diverse teorie degli insiemi che

> assolvono il compito di essere la teoria matematica unificante e dominante in cui tutti i fatti matematici disponibili (vale a dire qualche sottoinsieme specifico di teoremi informali) devono essere spiegati.

Secondo la filosofia formalistica, o si dimostra la "consistenza" o bisogna abbandonare la teoria, ma allora tutto il valore "dominante e unificante" andrebbe perso. Secondo il semi-empirista. di una particolare assiomatizzazione

---

(122) Ibidem p. 205-206,207

della teoria degli insiemi bisogna invece verificare la "correttezza" all'atto della sua traduzione nei vari settori della matematica, ad esempio nell'aritmetica.

Un teorema vero dell'aritmetica come teoria informale, falsifica una particolare teoria degli insiemi in cui esso è falso. Così questa ultima teoria formale diventa falsa [123].

- Si tratta di scegliere ora come modificare o quella teoria degli insiemi o quel teorema dell'aritmetica. Ma a questo punto non si trovano più - in Lakatos - regole normative.

> Ad esempio se capitasse che tutti i sistemi forti della teoria degli insiemi fossero aritmeticamente falsi, si potrebbe modificare la nostra aritmetica - la nuova aritmetica non-standard potrebbe servire, possibilmente altrettanto bene, le scienze empiriche.
>
> Fino ad ora la demarcazione principale è stata tra il dimostrato e l'indimostrato (e tra il dimostrabile e l'indimostrabile); il giustificazionista radicale ("il positivista") eguagliava questa demarcazione a quella tra sensato e privo di senso. Ma ora ci sarà un nuovo problema di demarcazione: <u>il problema di demarcazione tra teorie matematiche verificabili e inverificabili (metafisiche) rispetto ad un insieme dato di asserzioni base</u> [124]...

E veniamo al punto cruciale:

> Un falsificatore euristico dopo tutto è un falsificatore solo in senso pickwickiano: esso non falsifica le ipotesi, solo suggerisce una falsificazione - e una suggestione [suggestion] può <u>essere ignorata</u>.E' solo una ipotesi rivale. Ma questo non separa la matematica dalla fisica così nettamente come si potrebbe pensare. Anche le asserzioni di base popperiane sono solo ipotesi dopo tutto. <u>Il ruolo cruciale delle refutazioni euristiche è di spostare i problemi verso quelli più importanti</u> ...Si può mostrare che la maggior parte delle refutazioni classiche nella storia della scienza e della matematica sono falsificazioni euristiche [125].

(123) <u>Ibidem</u> p. 213-214
(124) <u>Ibidem</u> p. 216,217-218 sott. nel testo.
(125) <u>Ibidem</u> p. 218 la prima sott. e dell'autore la seconda è nel testo.

- In questi termini la domanda "quale è la'natura'della matematica" può essere ridotta "in parte" all'altra "quale è la natura delle teorie informali". Quale possibilità del ventaglio va scelta? L'empiricità di Weyl e Kalmar, la costruttivista, la platonista, la convenzionalista?

> La risposta sarà difficilmente monolitica. Accurati studi critici di casi storici condurranno probabilmente a una soluzione composita e sofisticata. Ma qualsiasi possa essere la soluzione i concetti ingenui di una razionalità statica come a priori - a posteriori, analitico -sintetico, nasconderanno solo la loro contingenza (126).

- Il problema di Lakatos a questo punto è la delusione indotta da questa ulteriore crisi del razionalismo classico. Essa conduce dal "torpore e dall'indolenza di una teoria Euclidea ed induttiva ... dove la critica e le teorie rivali sono scoraggiate"(e qui si cita Kuhn) alle "sfide" ed all'"avventura" di lavorare nella "permanente critica delle teorie quasi-empiriche". Capisce che ci si può "girare per analogia ad una immagine errata della scienza".Vede il problema, ma non può risolverlo nel suo schema.

> Ci vorrà qualcosa di più dei paradossi e dei risultati di Gödel per condurre i filosofi a prendere sul serio gli aspetti empirici della matematica e ad elaborare una filosofia del fallibilismo critico che prenda ispirazione non dai cosiddetti fondamenti, ma dalla crescita della conoscenza matematica(127).

C'è voluto qualcosa di più dell'esperimento di Michelson-Morley per arrivare alla teoria della relatività, c'è voluto qualcosa di più delle critiche di Saccheri per arrivare alle geometrie Non-Euclidee. Questo qualcosa di più molti storici non riescono a vederlo nella storia e molti filosofi della matematica non riescono a vederlo nella matematica d'oggi. Certo è più probabile che lo vedano prima quei matematici e quei ricercatori che lavorano e vivono nelle contraddizioni delle loro pratiche scientifiche e del loro ruolo sociale.

---

(126) Ibidem p. 218 sott. nel testo.
(127) Ibidem p. 220

Ma dove andare a cercare questo qualcosa di più che suggerisce l'insufficienza delle analisi "interniste" e richiede di prendere in esame i fattori "esterni", se vogliamo accettare per un momento questa opposizione convenzionale?

Ci sembra oppurtuno partire da quelle controversie storiche di fine '800 e degli anni '20 delle quali, chi per un verso chi per un altro, tutti siamo figli. Solo che per evitare il vicolo cieco di Lakatos sarà necessario guardare alla storia con occhio diverso dal suo. In effetti egli aveva già preparato, attraverso una analisi storica della topologia prima di Poincaré, le tesi qui sostenute schierandosi con l'euristico Polya contro il formalismo e contro Dieudonné [(128)]. Ma prigioniero di un modello popperiano, per quanto sofisticato come teorizzerà in seguito [(129)], mette "la ricostruzione razionale" nel testo e la storia nelle note.

(128) Lakatos 1963 p. 3

(129) Lakatos 1970 e 1971

Conclusioni.

La precedente analisi, per quanto largamente fenomenologica ed incompleta è già tuttavia sufficiente a mostrare che la ricerca in matematica vede più controversie di quanto comunemente si creda. E' proprio l'idea superficiale che in questo settore della ricerca scientifica non si dia un dibattito reale che rende molto utile giustapporre gli uni agli altri ampi brani nei quali le varie concezioni illustrano da sole la loro irriducibile e non mediabile diversità.

Chi scrive ritiene necessaria una trasformazione dalle radici delle attuali pratiche di ricerca in matematica e nelle scienze in generale, che sia coerente con una altrettanto profonda trasformazione della società. Per questo, da tutto il lavoro, traspare simpatia per tutte quelle posizioni che corrodono l'assetto assiomatico-formale delle matematiche. Quest'ultimo infatti assume oggi la funzione di un gendarme epistemologico che pretende di dire cosa è vera matematica o quale è la matematica importante, conservando una divisione accademica dei settori matematici funzionale, da una parte alla riproduzione allargata della corporazione, dall'altra all'incremento della produzione cartacea. In questa situazione è già qualche cosa poter indicare matematici, storici e filosofi che dissentono e magari suggeriscono di andare a cercare nella pratica le reali fonti di legittimazione.

Ma anche se ci si fosse limitati ad una pura e semplice operazione di montaggio di citazioni - tentazione peraltro alla quale non si è sempre sfuggiti - tuttavia si sarebbe già ottenuto un risultato. Per dirla matematicamente e provocatoriamente abbiamo dato qui gli elementi per costruire un controesempio alla congettura: la matematica non è una opinione. Congettura che mi pare più fecondo sostituire allora con quella opposta, perché alla luce di quanto mostrato essa risulta più verosimile e meno epistemologicamente paralizzante.

In realtà si è mostrato qualche cosa di più e di più preciso. Le ideologie dei matematici attivi non sono cioè espurgabili né dalle loro pratiche di ricerca né dai loro risultati (i teoremi), nel senso che esistono teoremi, neanche troppo sofisticati, che dipendono criticamente da esse. Quindi le controversie arrivano ad investire tutto il corpo delle discipline matematiche e non possono essere confinate nelle questioni dei fondamenti o filosofiche. In questa ottica anche enunciati come $2+2=4$, che paiono pacificati e neutrali, acquistano significati profondamente diversi a seconda del contesto storico, culturale e sociale. Ad esempio se le entità di base sono i numeri interi stessi come in India, o se sono delle grandezze geometriche come nella Grecia classica di Euclide; se ne viene data una legittimazione attraverso un rapporto col mondo reale, o attraverso una formulazione assiomatica autoconsistente.

Man mano che ci si allontana dai risultati sedimentati nella nostra cultura da millenni o già passati nelle pratiche sociali, avvicinandosi invece alle pratiche di ricerca della comunità dei matematici, il presunto residuo - sul quale si darebbe accordo unanime - diventa con ancor maggiore evidenza non individuabile: perché inseparabile, sia dalle condizioni di acculturazione, sia dalle regole sociologiche intorno alla corporazione. In questi termini la verità matematica residuale si riduce ad una petizione di principio epistemologica o ad un atto di fede nella razionalità universale. Possiamo all'opposto anzi individuare nell'analisi delle controversie le caratteristiche tipiche di un dato contesto culturale e sociale storicamente determinato. Si pensi per esempio alla varietà non casuale delle critiche al programma bourbakista ed alle sue differenti capacità di penetrazione in contesti nazionali differenziati: l'impronta empirista dei critici britannici, quella liberista e pragmatica dei nordamericani.

Una ultima considerazione si può infine trarre dai testi riportati: siano essi stati scritti da matematici attivi o da filosofi, da A. Weil o da I.Lakatos. Le controversie si fanno tanto più dure ed insanabili quanto più assumo no le caratteristiche di progetti complessivi che riguardano l'avvenire della matematica e cioé la scelta della linea di sviluppo da seguire. La qual cosa, visto che è vera in ogni momento storico, vanifica ogni modello legato ad un progresso lineare. Per questo le teorie eretiche e non quelle ortodosse sono le spie migliori e più esplicite degli avvenimenti interni alla comunità dei matematici.In quanto desiderosi di conquistare la maggioranza gli eretici debbono necessariamente essere più progettuali degli ortodossi, più espliciti nel criticare le regole spesso sottaciute dagli avversari, più attenti lettori dei fatti storici, rispetto alle analisi generalmente apologetiche.

Possiamo a questo punto dopo tanta cinematica porre il problema dinamico centrale: chi e cosa determina che una teoria sia ortodossa ed un'altra eretica? Ma dovremo proprio introdurre quel "qualcosa di più" di cui manca Lakatos: la dinamica storica reale nel contesto sociale e politico. Quindi ci dobbiamo accontentare qui di un altro teorema di ostruzione: la discriminante non avviene tra teorie vere e teorie false. Come dice Marx per le scienze economiche "Ora non si tratta più di vedere se questo o quel teorema era vero o no, ma se utile o dannoso ..." (130).

O o O o O o O o O

Si ringrazia il Prof. Michele SCE per le interessanti discussioni avute, nonché per aver pazientemente letto il dattiloscritto ed aver proposto utili modifiche.

---

(130) Marx 1873 p. 12 edizione Einaudi 1975.

B I B L I O G R A F I A

AHLFORS ET ALIA

1962 " On the Mathematics curriculum of the High School" American Matematical Monthly 69,189-193.

APPEL K. & HAKEN W.

1977 "The solution of the four-colour-map-problem" Scientific American 237,4(Oct), 108-121; tr.it. "La soluzione del problema dei quattro colori" Le scienze XX (1978), 54-65.

ARTIN E.

1953 recensione agli Eléments de Mathématique Book II, Algebra Bulletin American Mathematical Society 59, 474-479.

1957 Geometric Algebra Wiley N.Y.;tr.it.Algebra Geometrica Feltrinelli Milano 1968.

BARACCA A. & LIVI R. & RUFFO S.

1979"Le tappe dello sviluppo della teoria dei quanti nel quadro della seconda rivoluzione industriale e delle contraddizioni del primo dopoguerra" Testi e Contesti in corso di stampa.

BARACCA A.& DONINI E. & ROSSI A. & RUSSO A. & TONIETTI T.

1979 "Problemi sociali e storia nell'insegnamento scientifico "Sapere 817(Febbr.-Mar), 26-29.

BAR-HILLEL Y.

1972 "The irrelevance of ontology to Mathematics" in Lakatos 1972,44

BARUK STELLA

1973 Echec et Maths Seuil Paris

1977 Fabrice ou l'école des mathematiques Seuil Paris

BING R.H.

1967 "Challenging conjectures"American Mathematical Monthly 74, 56-64

BISHOP E.

1967 Foundation of constructive analysis Mc Graw Hill N.Y.

BOITI M. & BOSCOLO I. & DONINI E. & ROSSI A. & TONIETTI T.

1979 "Lecce: un <<sovvertimento>> inevitabile "Sapere 817(Febbr.-Mar.), 53,57.

BOLDRIGHINI C. & MARCHETTI F.

1977 "Lo sviluppo della matematica alla fine del secolo XIX: il problema dei fondamenti e la formalizzazione hilbertiana" in Donini & Rossi & Toniet ti (cur.) 1977, 109-122.

BOURBAKI N.

1939 Eléments de Mathématique Hermann Paris, in molti volumi ed in corso (forse) di completamento

1948 "L'architecture des Mathématiques" in Les Grands Courants de la Pensée Mathematique F. Le Lionnais (cur.) Cahiers du Sud, 35-47.

1949 "Foundations of Mathematics for the Working Mathematician" The Journal of Symbolic Logic 14,1-8.

1960 Eléments d'histoire des Mathématiques Hermann, Paris tr.it. Elementi di Storia della Matematica Feltrinelli Milano 1963

CARTAN H.

1959 " N. Bourbaki and die heutige Mathematik" Arbeits Gemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen 76.

D'AMORE B. & MATTEUZZI M.L.M.

1976 Dal Numero alla Struttura Zanichelli Bologna.

DAVIS CHANDLER

1974 "Materialist Mathematics" in For Dirk Struik R.S. Cohen & I. Stachel & M.W.Wartofsky (cur.) Boston Studies in the Philosophy of Science XV Reidel Dordrecht, 37-66.

DIEUDONNÈ J.

1964 " Recent Developments in Mathematics "Am .Math.Month. 71, 239-248.

1965 "Mathematics" in Collier's Encyclopedia vol. 15,541-552.

1970 "The work of N.Bourbaki" American Mathematical Monthly 77, 134-145.

1976 "Mathématiques vides et Mathématiques significatives" in Langage et Pensée Mathématiques Actes du Colloque International de Luxembourg-Luxembourg 162 a avenue de la Faïencerie, 273-297.

DONINI ELISABETTA

1978 "La Meccanica Quantistica tra Germania ed USA" Sapere 812,55-62

DONINI ELISABETTA & TONIETTI T.

1977 " Lo Scientifico è politico" Quaderni Piacentini 62/63, 99-133

DONINI ELISABETTA & ROSSI A. & TONIETTI T.

1977 curatori Matematica e Fisica: Struttura e Ideologia De Donato Bari.

EILENBERG S.

1964 in New Directions in Mathematics R.W. Ritchie (cur.)

FANG J.

1970 Bourbaki Paideia Press New York

FORMAN P.

1971 " Weimar Culture, Causality and Quantum Theory 1918-1927" Historical Studies in the Physical Sciences 3, 1-115.

1974 "The financial support and political alignement of Physicists in Weimar Germany" Minerva 12, 39-66.
Ambedue in corso di traduzione in P. Forman Fisici a Weimar Einaudi Torino.

GRABINER JUDITH

1974 " Is mathematical truth time-dependent?" American Mathematical Monthly 81, 354-365

GRIFFITHS H.B. & HOWSON A.G.

1974 Mathematics: society and curricula Cambridge Univ. Press.

HALMOS P.

1953 recensione agli Eléments vol. Intégration Bulletin American Mathematical Society 59, 249-255.

HEYTING A.

1974 "Intuitionistic Views on the Nature of Mathematics" Bollettino dell'Unione Matematica Italiana 9 Supp. 2,122-134.

HODGKIN L.

1976 "Politics and Physical Sciences" Radical Science Journal n.4,29-60; tr.it. "Ricerca matematica e ideologica" Sapere 808 (1978),2-15.

ISRAEL G.

1977 "Un aspetto ideologico della matematica contemporanea: il Bourbakismo"in Donini et al. (cur.) 1977, 35-70.

KALMAR L.

1972 "Foundation of Mathematics. Whither Now?" in Lakatos (cur.)1972,187-194.

KLINE M.

1953 Mathematics in Western Culture Oxford Univ. Press N.Y. tr.it. La matematica nella cultura occidentale Feltrinelli Milano 1976.

1970 "Logic versus Pedagogy "American Mathematical Monthly 77, 264-282.

1972 Mathematical Thought from Ancient to Modern Times Oxford Univ.Press N.Y.

1973 Why Johnny can't add St. Martin's Press N. Y.

1977 Why the Professor can't teach St Martin's Press N.Y.

KNUTH D.E.

1974 "Computer Science and its relation to mathematics"American Mathematical Monthly 81, 323-343.

LAKATOS I.

1963 "Proofs and refutations" The British Journal for the Philosophy of Science XIV, 1-25,120-139,221-245,296-342.

1970 "Falsification and the methodology of scientific research programmes" in Criticism and the Growth of Knowledge I.Lakatos,A Musgrave (cur.) Cambridge Univ. Press,91-196;tr.it. in Critica e Crescita della Conoscenza Feltrinelli Milano 1976, 164-276.

1971 "History of Science and its Rational Reconstructions" in Boston Studies in the Philosophy of Science 8, 91-135 Reidel Dordrecht;tr.it. in Critica e Crescita della Conoscenza Feltrinelli Milano 1976, 366-408

1972 curatore Problems on the Philosophy of Mathematics North-Holland Amsterdam

1976 "A reinassance of empiricism in the recent philosophy of mathematics" The British Journal for the Philosophy of Science 27, 201-223. rist. in Philosophical Papers Vol II cit. in Lakatos 1978,24-42.

1978 "Cauchy and the continuum: the significance of non-standard analysis for the history and philosophy of mathematics" in I. Lakatos Philosophical Papers Cambridge Univ. Press, 43-60.

MARX K.

1873 Poscritto alla seconda edizione de Das Kapital tr. it. in Il Capitale Libro primo Einaudi Torino 1975, 9-19.

MESERVE B.E.

1973 "Geometry as a gateway to Mathematics" in Developments in Mathematical Education A.G. Howson (cur.) Cambridge Univ. Press, 241-253

ROBINSON A.

1966 Non-Standard Analysis North-Holland Amsterdam

1972 "The Metaphysics of the Calculus" in Lakatos 1972, 28-40

ROSSI-LANDI F.

1978 Ideologia Isedi Milano.

SCHAFF A.

1977 Historia i Prawda tr. it. Storia e Verità Editori Riuniti Roma

SHIBATA TOSHIO

1973 "The role of axioms in contemporary mathematics and in mathematical education" in Developments in Mathematical Education A.G.Howson (cur.) Cambridge Univ. Press, 262-271.

SPANIER E.

1970 "The undergraduate program in mathematics" American Mathematical Monthly 77, 752-755.

TONIETTI T.

1976 " Il dibattito sui fondamenti della meccanica quantistica "Sapere 788, 19-26

1977 "Algebra e teoria degli insiemi nell'insegnamento medio e superiore" Sapere 805 (ott-nov) ,56-64.

1979 "Catastrofi e Rivoluzioni" Testi e Contesti 1, 91-132

? "Dal caso 'Weimar' di P. Forman ad un modello'integrale' di storia delle scienze" poscritto a P. Forman Fisici a Weimar in corso di pubblicazione da Einaudi.

WEIL ANDRE'

1948 "L'avenir des Mathématiques" in Les Grands Courants de la Pensée Mathematique F. Le Lionnais (cur.) Cahiers du Sud, 307-320

WILDER R.L.

1972 "History in the Mathematics curriculum; its status, quality and function" American Mathematical Monthly 79, 479-495.

YOUNG G.A.

1971 "The Crises of Mathematical Sciences and why no one group can solve them" American Mathematical Monthly 78, 980-987.

I N D I C E