PREMESSA. -

In [3] Levine ha introdotto un metodo per ottenere raffinamenti di topologie detti estensioni semplici. Tali estensioni sono state studiate anche da Borges (cfr. [1]) e da Reynolds (cfr. [4]) e possono contribuire a risolvere problemi concernenti la determinazione di topologie massimali rispetto a determinate proprietà topologiche.

Ricordiamo che, dati uno spazio topologico (S,τ) *e un sottoinsieme* X *di* S, *si dice estensione semplice di* τ *rispetto ad* X *la topologia su* S $\tau(X) = \{A \cup (A' \cap X)/A, A' \in \tau\}$.

Ovviamente non tutti i raffinamenti di una qualsiasi topologia τ *si possono ottenere come estensioni semplici rispetto ad un opportuno sottoinsieme di* S; *in questo lavoro stabiliamo un criterio per riconoscere se un raffinamento* τ' *di* τ *è un'estensione semplice di* τ *e per individuare un sottoinsieme* X *di* S *(che in generale non è unico come mostra la proposizione 1) tale che sia* $\tau' = \tau(X)$.

Indicheremo con $cl\, X$ *(*$int\, X$*) la chiusura (la parte interna) di* X *nello spazio topologico* (S,τ); *con* $cl_{\tau'} X$ *(*$int_{\tau'} X$*) la chiusura (la parte interna) di* X *rispetto ad una qualsiasi altra topologia* τ' *su* S. $\tau(x)$ *sarà l'insieme degli intorni aperti del punto* x *di* S *nella topologia* τ. *Se* $X \subseteq S$, CX *sarà il complementare di* X *in* S *mentre se* $X \subseteq Y \subseteq S$, *indicheremo con* $C_Y X$ *o anche con* $Y-X$ *il complementare di* X *in* Y.

Definizione 1. -

Dato uno spazio topologico (S,τ) ed un sottoinsieme $X \subseteq S$, si dice estensione semplice di τ rispetto ad X la topologia

$$\tau(X) = \{A \cup (B \cap X)/A, B \in \tau\}.$$

Ovviamente una base di tale topologia è la famiglia

$$B(X) = \tau \cup (\tau \cap X)$$

dove con $\tau \cap X$ si indica la topologia indotta da τ su X.

Ricordiamo che (cfr. [3] Lemma 1) se $\tau(X)$ è un'estensione semplice di (S,τ) e $B \subseteq S$, allora

$$\mathrm{int}_{\tau(X)} B = \mathrm{int}\, B \cup \mathrm{int}_{\tau\cap X}(B\cap X).$$

Proviamo ora il seguente lemma.

Lemma 1. -

Sia $A \in \tau$, $X \supseteq Y$ due sottoinsiemi di S tali che $X-\mathrm{int}X = Y-\mathrm{int}Y=X'$ e $c\ell(X-Y)\cap X' = \emptyset$.

Posto $B = A - c\ell(A\cap X\cap CY) \in \tau$ si ha allora

i) $A\cap \mathrm{int}\, Y = B\cap \mathrm{int}\, X$.

ii) $A\cap X' = B\cap X'$.

Dimostrazione. i) sia $p \in A$ e $p \in \mathrm{int}\, Y \subseteq \mathrm{int}\, X$. Se fosse $p \in c\ell(A\cap X\cap CY) \subseteq c\ell A\cap c\ell\, X\cap c\ell\, CY$ sarebbe $p \in c\ell CY = C\, \mathrm{int}\, Y$ da cui $p \notin \mathrm{int}\, Y$ contro l'ipotesi. Allora risulta $p \in B\cap \mathrm{int}\, X$.

Per provare l'inclusione inversa basta provare che $B\cap \mathrm{int}\, X \subseteq B\cap \mathrm{int}\, Y$ essendo $B \subseteq A$. D'altra parte si ha $B\cap \mathrm{int}\, X = A\cap \mathrm{int}(CA \cup CX \cup Y)\cap \mathrm{int}\, X =$ $= A\cap \mathrm{int}((CA\cap X)\cup Y) = A\cap \mathrm{int}(CA \cup Y)\cap \mathrm{int}\, X$ ed analogamente $B\cap \mathrm{int}\, Y =$ $= A\cap \mathrm{int}(CA \cup Y)\cap \mathrm{int}\, Y$.

Sia allora $p \in A$ e $N \in \tau(p)$ con $N \subseteq A$, $N \subseteq CA \cup Y$ ed $N \subseteq X$; ovviamente $N \subseteq (CA \cup Y)\cap \mathrm{int}\, X = (CA \cup \mathrm{int}X)\cap(CA \cup Y)\cap \mathrm{int}X$ quindi $N \subseteq CA \cup Y$ e poichè è anche $N \subseteq A$ risulta $N \subseteq \mathrm{int}\, Y$ da cui $p \in A\cap \mathrm{int}(CA \cup Y)\cap \mathrm{int}\, Y$.

ii) $B\cap X' = \mathrm{int}\, A\cap \mathrm{int}\,(CA \cup CX \cup Y)\cap X' = \mathrm{int}(A\cap(CX \cup Y))\cap X' =$ $= A\cap \mathrm{int}\,(CX \cup Y)\cap X'$.

Ma da $c\ell(X-Y)\cap X' = \emptyset$ si ricava $X' \subseteq \mathrm{int}(CX \cup Y)$ da cui segue evidentemente la tesi. ∎

Proposizione 1. -

Sia (S,τ) uno spazio topologico ed X,Y due parti di S. Allora $\tau(X) = \tau(Y)$ se e solo se

$$X - \text{int } X = Y - \text{int } Y = X'$$
$$c\ell(X-Y)\cap X' = c\ell(Y-X)\cap X' = \emptyset.$$

Dimostrazione. - Proviamo che le condizioni date sono sufficienti. supponendo dapprima $Y \subseteq X$.

Si ha allora $B(X) \subseteq \tau(Y)$ infatti $A \in \tau \Longrightarrow U = A\cap X = (A\cap \text{int } X) \cup (A\cap Y) \in \tau(Y)$ quindi $\tau(X) \subseteq \tau(Y)$.

Si ha inoltre $B(Y) \subseteq B(X)$ poiché per il lemma 1 $A \in \tau \Longrightarrow V = A\cap Y = (A\cap \text{int } Y) \cup (A\cap X') = (B\cap \text{int } X) \cup (B\cap X') = B\cap X \in B(X)$.

Nel caso generale,posto $Z = X\cap Y$ si ha $Z - \text{int } Z = (X\cap Y)\cap C(\text{int } X\cap \text{int } Y) = (X\cap Y\cap C \text{ int } X) \cup (X\cap Y\cap C \text{ int } Y) = (Y\cap X') \cup (X\cap X') = X'$; inoltre $c\ell(X-Z)\cap X' = c\ell(X\cap (CX \cup CY))\cap X' = c\ell((X\cap CX) \cup (X\cap CY))\cap X' = c\ell(X-Y)\cap X' = \emptyset$ ed analogamente $c\ell(Y-Z)\cap X' = \emptyset$. Si ha quindi $\tau(X) = \tau(Z) = \tau(Y)$.

Viceversa, supponiamo che $\tau(X) = \tau(Y)$ e sia $p \in Y - \text{int } Y$.

Sia $p \notin X$, posto $Y = A \cup (B\cap X)$ con $A,B \in \tau$ risulta $p \in A \subseteq Y$ cioé $p \in \text{int } Y$ contro l'ipotesi.

Se $p \in \text{int } X$ e $p \in N \subseteq X$ con $N \in \tau(p)$ si ha $p \in \text{int}_{\tau(X)}(N\cap Y) = \text{int}(N\cap Y) \cup \text{int}_{\tau\cap X}(N\cap Y\cap X) = (\text{int } N\cap \text{int } Y) \cup \text{int}_{\tau\cap X}(N\cap Y\cap X)$.

Poiché $p \notin \text{int } Y$, si ha $p \in \text{int}_{\tau\cap X}(N\cap Y\cap X) = \text{int}_{\tau\cap X} N\cap \text{int}_{\tau\cap X}Y\cap \text{int}_{\tau\cap X}X$.

In particolare $p \in \text{int}_{\tau\cap X}Y$ ed esiste $N' \in \tau(p)$ tale che $p \in N'\cap X \subseteq Y$.

Ma $p \in N\cap N' \subseteq N'\cap X \subseteq Y$ da cui $p \in \text{int } Y$ contro l'ipotesi.

Risulta quindi $Y - \text{int } Y \subseteq X - \text{int } X$ ed in modo analogo si prova l'inclusio ne inversa per cui si conclude che $Y - \text{int}\, Y = X - \text{int}\, X$.

Sempre nell'ipotesi che $\tau(X) = \tau(Y)$ proviamo che $c\ell(X-Y) \cap X' = \emptyset$.

Se infatti esistesse $p \in c\ell(X-Y) \cap X'$ e fosse $p \in N \in \tau$ allora per ogni aperto $O = A \cup (B \cap X)$ di $\tau(X)$ contenente p si avrebbe:

se $p \in A$ $\quad O \cap (X-Y) \supseteq A \cap (X-Y) \neq \emptyset$

se $p \in B$ $\quad O \cap (X-Y) \supseteq B \cap X \cap (X-Y) = B \cap X \cap CY = B \cap (X-Y) \neq \emptyset$

quindi in ogni caso $O \cap (X-Y) \neq \emptyset$.

Poiché, al contrario, l'aperto di $\tau(Y)$, $N \cap Y$, non intersecherebbe $X-Y$, si avrebbe evidentemente che $N \cap Y \neq O$ per ogni $O \in \tau(X)$ e $\tau(Y) \not\subseteq \tau(X)$ contro l'ipotesi.

Analogamente si prova che $c\ell(Y-X) \cap X' = \emptyset$. ∎

<u>Corollario 1</u>. -

Sia (S,τ) uno spazio topologico, X e Y due parti di S, $\text{int}X = \text{int}Y = \emptyset$. Allora

$$\tau(X) = \tau(Y) \Longleftrightarrow X = Y$$

<u>Dimostrazione</u>. $X \in \tau(Y) \Longrightarrow X = A \cup (B \cap Y)$ con $A,B \in \tau \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \emptyset = \text{int}\, X \supseteq \text{int}\, A \cup \text{int}\, (B \cap Y) \Longrightarrow A = \text{int}\, A = \emptyset \Longrightarrow X \subseteq Y$.

Analogamente $Y \subseteq X$. ∎

<u>Corollario 2</u>.-

Sia (S,τ) uno spazio topologico $X,Y \subseteq S$ e sia $X' = X - \text{int}\, X$.

Allora

$$Y = X-F \text{ con } c\ell\, F = F \text{ ed } F \cap X' = \emptyset \Longrightarrow \tau(X) = \tau(Y)$$

<u>Dimostrazione</u>.- Si verificano facilmente le condizioni della proposizione 1.

$Y - \text{int}\, Y = Y \cap CF \cap C(\text{int}\, X \cap CF) = X \cap CF \cap (C\, \text{int}\, X \cup F) =$

$\qquad = (X \cap CF \cap C\, \text{int}\, X) \cup (X \cap CF \cap F) = X' \cap CF = X'$.

$c\ell(X-Y) \cap X' = c\ell(X \cap (CX \cup F)) \cap X \cap C\, \text{int}\, X = c\ell(X \cap F) \cap X \cap C\, \text{int}\, X \subseteq$

$\qquad \subseteq c\ell X \cap F \cap X \cap C\, \text{int}\, X = F \cap X' = \emptyset$. ∎

Corollario 3. -

Sia (S,τ) uno spazio topologico, X e Y due parti di S e sia $X' = X - \text{int } X$. Allora $Y = X \cup O$, $O \in \tau$, $c\ell\, O \cap X' = \emptyset \Longrightarrow \tau(X) = \tau(Y)$.

Dimostrazione.- Poniamo $F = c\ell\, O - X$. Sono allora verificate le condizioni del corollario 2 come segue.

$Y-F = Y \cap C(c\ell O \cap CX) = (Y \cap C\, c\ell O) \cup (Y \cap X) = (X \cap C\, c\ell O) \cup X = X.$

F è chiuso infatti $c\ell F = c\ell(c\ell O \cap CX) \subseteq c\ell O \cap c\ell\, CX = c\ell O \cap C\text{int}X =$

$= c\ell O \cap C(CX' \cap X) = c\ell O \cap (X' \cup CX) = c\ell O \cap CX = F.$

Poiché, come si verifica facilmente, $\text{int } Y = \text{int } X \cup O$, risulta anche

$Y' = Y - \text{int } Y = (X \cup O) \cap C(\text{int } X \cup O) = (X \cap C \text{ int } X \cap CO) \cup (O \cap C \text{ int } X \cap CO) =$

$= X' \cap CO = X'.$

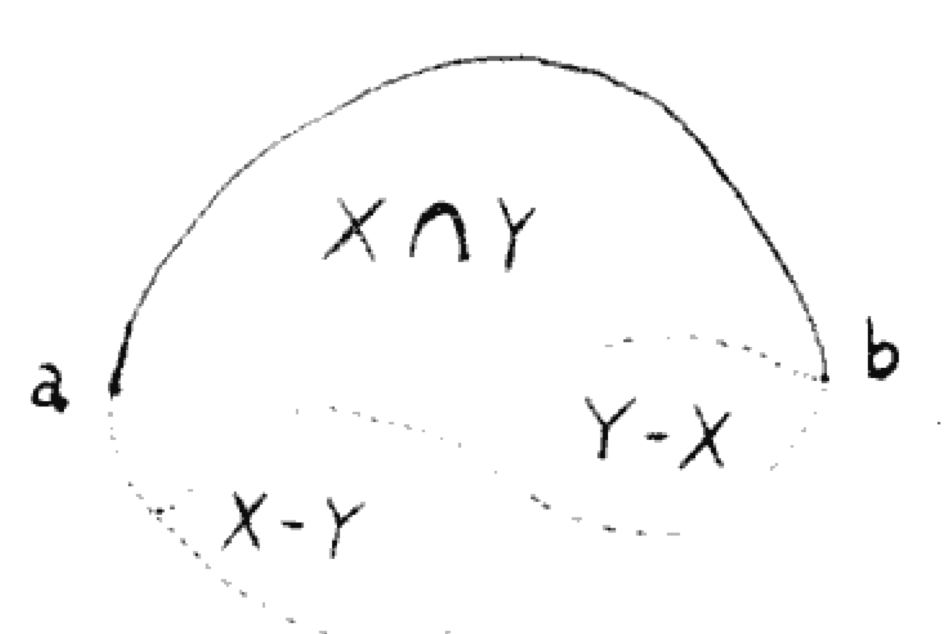
Infine risulta $(c\ell\, O - X) \cap Y' = c\ell\, O \cap C\, X \cap X' = \emptyset.$ ∎

Osservazione 1. - Dai corollari 2 e 3 segue che, dati uno spazio topologico (S,τ) e una parte $X \subseteq S$ che abbia punti interni rispetto a τ, non esistono né un sottoinsieme massimale $M \subseteq S$ né un sottoinsieme minimale $N \subseteq S$ tali che $\tau(M) = \tau(X)$ o $\tau(N) = \tau(X)$.

Il risultato della proposizione 1 è illustrato dagli esempi riportati in figura, nei quali lo spazio topologico è il piano con la topologia naturale.

Nelle figure il tratto continuo indica l'appartenenza dei punti di frontiera agli insiemi disegnati.

Esempio 1. - Evidentemente le condizioni della proposizione 1 sono verificate e $\tau(X) = \tau(Y)$.



$X' = X\text{-int } X = Y - \text{int } Y$

$a \in X'$

$b \notin X'$

fig. 1

Esempio 2. - Non è verificata la condizione $X - \text{int } X = Y - \text{int } Y$ e chiaramente l'aperto $U' \in \tau(Y)$ disegnato in figura non appartiene a $\tau(X)$; dunque $\tau(X) \neq \tau(Y)$.

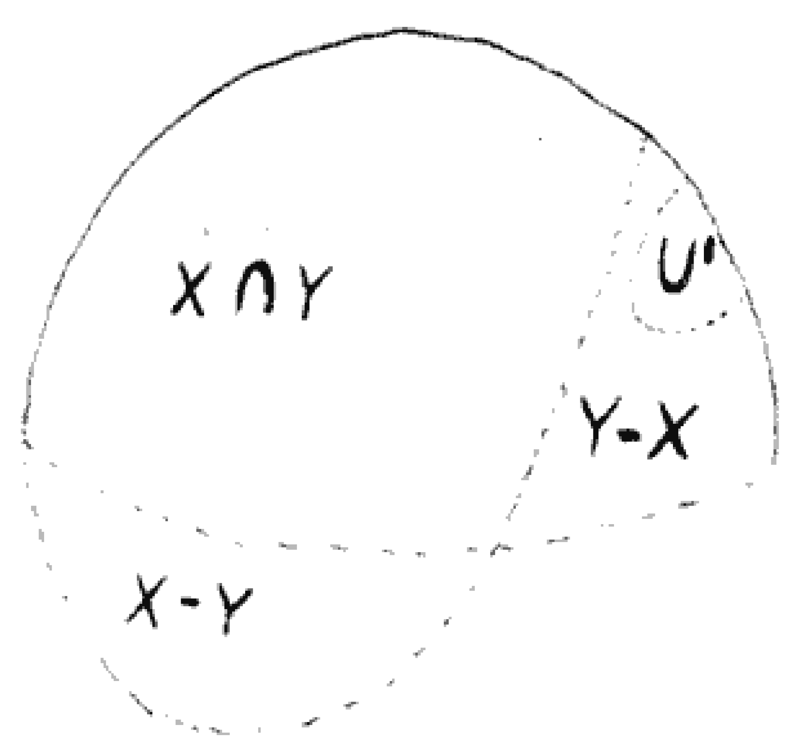
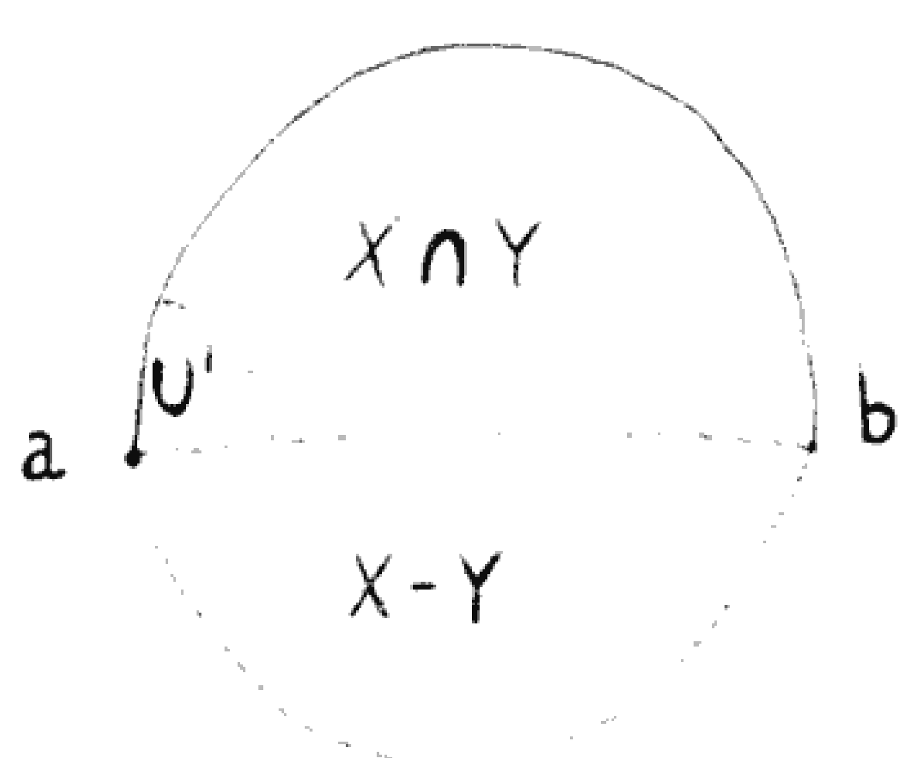


Fig. 2

Esempio 3. - E' verificata la condizione $X - \text{int } X = Y - \text{int } Y = X'$ ma risulta $c\ell(X-Y) \cap X' = \{a\} \neq \emptyset$. Anche nella figura 3 è disegnato un aperto U' di $\tau(Y)$ non appartenente a $\tau(X)$; evidentemente $\tau(X) \neq \tau(Y)$.



$a \in X'$, $b \notin X'$

$a \in U'$

Fig. 3

Proposizione 2.

Dati due spazi topologici (S,τ) ed (S,τ') con τ' estensione semplice di τ, cioè $\tau' = \tau(X)$ con $X \subseteq S$, risulta che $X - c\ell(\text{int } X)$ è l'unione degli aperti di τ' non contenenti aperti non vuoti di τ.

Dimostrazione. - Sia $p \in X - c\ell(\text{int } X)$ ed $N \in \tau(p)$ tale che $N \cap c\ell(\text{int } X) = \emptyset$.

Posto $N' = N \cap X \in \tau'$, l'unico aperto di τ contenuto in N' è $\emptyset$. Ne segue che $X - c\ell(\text{int } X)$ è contenuto nell'unione degli aperti di τ' non contenenti aperti non vuoti di τ.

Viceversa sia $U' = A \cup (B \cap X) \in \tau'$ con $A,B \in \tau$ e sia $U' \neq \emptyset$. Se U' non contiene aperti non vuoti di τ, deve essere $A = \emptyset$, cioé $U' = B \cap X$. Se poi fosse $U' \cap C(X - c\ell(\text{int } X)) \neq \emptyset$ sarebbe $B \cap X \cap c\ell(\text{int}(X)) \neq \emptyset$ quindi $B \cap \text{int } X$ sarebbe un aperto non vuoto di τ contenuto in U' il che è impossibile.

Quindi $U' \subseteq X - c\ell(\text{int } X)$ da cui la tesi. ∎

Ovviamente si ha il seguente corollario.

Corollario 4. -

Se (S,τ') è un'estensione semplice di (S,τ), $\tau' = \tau(X)$ con $X \subseteq S$ e se $\text{int } X = \emptyset$, allora X è l'unione degli aperti di τ' non contenenti aperti non vuoti di τ. ∎

Proposizione 3. -

Se (S,τ') è un'estensione semplice di (S,τ), $\tau' = \tau(X)$, risulta

$$X' = X - \text{int } X = \bigcup_{U' \in \tau'} (U' - \text{int } U').$$

Dimostrazione. - Se $p \in X'$ ed $N \in \tau(p)$, posto $N' = N \cap X \in \tau'$ si ha $\text{int } N' = N \cap \text{int } X$ quindi $p \in N' - \text{int } N'$.

Viceversa sia $U' = A \cup (B \cap X) \in \tau'$ con $A,B \in \tau$. Si ha allora

$$U' - \text{int } U' = [(A \cup B) \cap (A \cup X)] \cap C[(A \cup B) \cap \text{int}(A \cup X)] =$$
$$= (A \cup B) \cap (A \cup X) \cap C \, \text{int}(A \cup X).$$

Sia ora $p \in U' - \text{int } U'$:

se $p \notin X$ allora $p \in A$ quindi $p \in \text{int}(A \cup X)$ e $p \notin U' - \text{int } U'$ contro l'ipotesi;

se $p \in \text{int}\, X$ allora $p \in \text{int}(A \cup X)$ quindi $p \notin U' - \text{int}\, U'$ contro l'ipotesi.

In definitiva $p \in X - \text{int}\, X$. ∎

Proposizione 4. -

Sia (S,τ) uno spazio topologico, $X \subseteq S$ e $X' = X - \text{int}\, X$.

Sia inoltre F un chiuso di τ tale che $F \cap X = X'$, $c\ell(F-X') = F$ ed $X' \subseteq \text{int}\,(F \cup X)$. Posto $Y = CF \cup X'$ si ha allora

$$\tau(Y) = \tau(X).$$

Dimostrazione. - Osservato che $Y = CF \cup X' = (CF \cup X) \cap (CF \cup C\, \text{int}X) = CF \cup X$, si ha $Y - \text{int}\, Y = (CF \cup X) \cap c\ell(F \cap CX') = (CF \cup X) \cap F = X \cap F = X'$.

Inoltre $c\ell(Y-X) \cap X' = c\ell(CF \cap CX) \cap X' = C\, \text{int}\,(F \cup X) \cap X' = \emptyset$ e $c\ell(X-Y) \cap X' = c\ell(X \cap F \cap CX') \cap X' = c\ell(F \cap \text{int}\, X) \cap X' = \emptyset$ in quanto $F \cap \text{int}\, X = \emptyset$.

Per la proposizione 1 si ha la tesi. ∎

Proposizione 5. -

Siano τ e τ' due topologie su S con $\tau \subseteq \tau'$ e sia $X' = \bigcup_{U' \in \tau'} (U' - \text{int}\, U')$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché τ' sia un'estensione semplice di τ è che esista un chiuso F di τ contenente X' e tale che

1) $c\ell(F-X') = F$
2) $\forall p \in X'$ e $\forall N' \in \tau'(p)$ $\exists\, N \in \tau(p)$ tale che $N \cap (CF \cup X') \in \tau'(p)$ e $N \cap (CF \cup X') \subseteq N'$.

In tal caso si ha, inoltre, $\tau' = \tau(X)$ con $X = CF \cup X'$.

Dimostrazione. - Sufficienza. Sia F un chiuso verificante le condizioni 1) e 2) e sia $X = CF \cup X$. Si ha allora $\tau' \subseteq \tau(X)$, infatti se $N' \in \tau'$ e $N' \cap X' = \emptyset$ risulta $N' - \text{int}\, N' = \emptyset$ cioé $N' \in \tau \subseteq \tau(X)$; se invece $N' \cap X' = L \neq \emptyset$ e se $p \in L$, esiste $N_p \in \tau(p)$ con $N_p \cap X \subseteq N'$ e $N_p \cap X \in \tau'(p)$. Posto allora $N = \bigcup_{p \in L} N_p$ si ha $N \in \tau$,

$L \subseteq N$ ed $N \cap X \subseteq N'$ e pertanto $N' = L \cup \operatorname{int} N' = \operatorname{int} N' \cup (N \cap X) \in \tau(X)$.
Si ha inoltre $\tau \cap X \subseteq \tau'$ poiché, osservato che $X - \operatorname{int} X = (CF \cup X') \cap F = X'$ risulta:

se $N \in \tau$ ed $N \subseteq X$ allora $N \cap X = N \in \tau'$;

se $N \in \tau$ ed $N \cap CX \neq \emptyset$ ed $N \cap X' = \emptyset$ allora $N \cap X \subseteq \operatorname{int} X$ da cui $N \cap X \in \tau \subseteq \tau'$;

se $N \in \tau$ ed $N \cap X' = L \neq \emptyset$ si ha $N \cap \operatorname{int} X \in \tau \subseteq \tau'$ e per ogni $p \in L$ esiste $N_p \in \tau(p)$ con $N_p \subseteq N$ ed $N_p \cap X \in \tau'(p)$; posto in tal caso $N' = \bigcup_{p \in L} N_p \cap X \in \tau'$ si ha $N \cap X = (N \cap \operatorname{int} X) \cup N' \in \tau'$.

In definitiva $\tau' = \tau(A)$.

Che la condizione sia necessaria segue evidentemente dalle proposizioni 3e4. ∎

<u>Osservazione 2.</u> -

Una condizione necessaria perché un raffinamento τ' di τ sia un'estensione semplice è che l'insieme $X' = \bigcup_{U' \in \tau'} (U' - \operatorname{int} U')$ sia privo di punti interni in τ. (Si deduce evidentemente dalla proposizione 3).

<u>Osservazione 3.</u> - Nelle ipotesi della proposizione 5, se l'insieme $X' = \bigcup_{U' \in \tau'} (U' - \operatorname{int} U')$ è un aperto di τ' privo di punti interni, il chiuso S verifica le condizioni 1) e 2) e dunque $\tau' = \tau(X')$.

Concludiamo con due esempi in cui riconosciamo che un raffinamento τ' di uno spazio topologico (S,τ) è un'estensione semplice di τ.

<u>Esempio 4.</u> -Sia $S = \{a,b,c,d,f\}$, $\tau = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{d,f\},\{a,b\},\{a,d,f\},\{b,d,f\},\{a,b,d,f\},S\}$ è una topologia su S. $\tau' = \tau \cup \{\{d\},\{a,d\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,d\},\{c,d,f\},\{a,b,c,d\},\{a,c,d,f\},\{b,c,d,f\}\}$ è un raffinamento di τ e risulta $X' = \bigcup_{N' \in \tau'} (N' - \operatorname{int} N') = \{c,d\}$.

Poiché risulta $X' \in \tau'$ ed $\operatorname{int} X' = \emptyset$ si ha, per l'osservazione 3, $\tau' = \tau(X')$.

<u>Esempio 5.</u> - $S = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},S\}$; $\tau' = \tau \cup \{\{c\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ è un raffinamento di τ e risulta $X' = \bigcup_{N' \in \tau'} (N' - \operatorname{int} N') = \{c\}$.

Si verifica poi facilmente che considerato il chiuso $F = \{c,d\}$ contenente X' si ha $c\ell(F-X') = F$; inoltre per ogni $N' \in \tau'(c)$ si ha che l'intorno aperto $N = \{c,d\} \in \tau(c)$ interseca $CF \cup X' = \{a,b,c\}$ secondo l'intorno $\{c\} \in \tau'(c)$ contenuto in N'.

Per la proposizione 5 si ha allora $\tau' = \tau(\{a,b,c\})$.

B I B L I O G R A F I A

[1] Borges C.J.R., *On extensions of topologies*, Canad.J. Math. 19(1967),474-487.

[2] Kelley J.L., *General topology*, Van Nostrand, New York 1955.

[3] Levine N.L., *Simple extensions of topologies*, Amer. Math.Monthly 71 (1964), 22-25.

[4] Reynolds D.F., *Simple extensions of topologies*, Topology (Proc. Ninth Annual Spring Topology Conf.,Memphis 1975), Lect.Notes in Pure and Appl. Math., vol. 24, Dekker, New York,1976.