

PREMESSA. -

In [3] Levine ha introdotto un metodo per ottenere raffinamenti di topologie detti estensioni semplici. Tali estensioni sono state studiate anche da Borges (cfr. [1]) e da Reynolds (cfr. [4]) e possono contribuire a risolvere problemi concernenti la determinazione di topologie massimali rispetto a determinate proprietà topologiche.

Ricordiamo che, dati uno spazio topologico (S, τ) e un sottoinsieme X di S , si dice estensione semplice di τ rispetto ad X la topologia su S

$$\tau(X) = \{A \cup (A' \cap X) / A, A' \in \tau\}.$$

Ovviamente non tutti i raffinamenti di una qualsiasi topologia τ si possono ottenere come estensioni semplici rispetto ad un opportuno sottoinsieme di S ; in questo lavoro stabiliamo un criterio per riconoscere se un raffinamento τ' di τ è un'estensione semplice di τ e per individuare un sottoinsieme X di S (che in generale non è unico come mostra la proposizione 1) tale che sia $\tau' = \tau(X)$.

Indicheremo con $cl_X(int X)$ la chiusura (la parte interna) di X nello spazio topologico (S, τ) ; con $cl_{\tau, X}(int_{\tau, X})$ la chiusura (la parte interna) di X rispetto ad una qualsiasi altra topologia τ' su S . $\tau(x)$ sarà l'insieme degli intorno aperti del punto x di S nella topologia τ . Se $X \subseteq S$, CX sarà il complementare di X in S mentre se $X \subseteq Y \subseteq S$, indicheremo con $C_Y X$ o anche con $Y-X$ il complementare di X in Y .

Definizione 1. -

Dato uno spazio topologico (S, τ) ed un sottoinsieme $X \subseteq S$, si dice estensione semplice di τ rispetto ad X la topologia

$$\tau(X) = \{A \cup (B \cap X) / A, B \in \tau\}.$$

Ovviamente una base di tale topologia è la famiglia

$$B(X) =_{\tau} U(\tau \cap X)$$

dove con $\tau \cap X$ si indica la topologia indotta da τ su X .

Ricordiamo che (cfr. [3] Lemma 1) se $\tau(X)$ è un'estensione semplice di (S, τ) e $B \subseteq S$, allora

$$\text{int}_{\tau(X)} B = \text{int} B \cup \text{int}_{\tau \cap X} (B \cap X).$$

Proviamo ora il seguente lemma.

Lemma 1. -

Sia $A \in \tau$, $X \supseteq Y$ due sottoinsiemi di S tali che $X - \text{int} X = Y - \text{int} Y = X'$ e $\text{cl}(X - Y) \cap X' = \emptyset$.

Posto $B = A - \text{cl}(A \cap X \cap CY)$ e τ si ha allora

- i) $A \cap \text{int} Y = B \cap \text{int} X$.
- ii) $A \cap X' = B \cap X'$.

Dimostrazione. i) sia $p \in A$ e $p \in \text{int} Y \subseteq \text{int} X$. Se fosse $p \in \text{cl}(A \cap X \cap CY) \subseteq \text{cl} A \cap \text{cl} X \cap \text{cl} CY$ sarebbe $p \in \text{cl} CY = C \text{int} Y$ da cui $p \notin \text{int} Y$ contro l'ipotesi. Allora risulta $p \in B \cap \text{int} X$.

Per provare l'inclusione inversa basta provare che $B \cap \text{int} X \subseteq B \cap \text{int} Y$ essendo $B \subseteq A$. D'altra parte si ha $B \cap \text{int} X = A \cap \text{int}(CA \cup CX \cup Y) \cap \text{int} X = A \cap \text{int}((CA \cap X) \cup Y) = A \cap \text{int}(CA \cup Y) \cap \text{int} X$ ed analogamente $B \cap \text{int} Y = A \cap \text{int}(CA \cup Y) \cap \text{int} Y$.

Sia allora $p \in A$ e $N \in \tau(p)$ con $N \subseteq A$, $N \subseteq CA \cup Y$ ed $N \subseteq X$; ovviamente $N \subseteq (CA \cup Y) \cap \text{int} X = (CA \cup \text{int} X) \cap (CA \cup Y) \cap \text{int} X$ quindi $N \subseteq CA \cup Y$ e poichè è anche $N \subseteq A$ risulta $N \subseteq \text{int} Y$ da cui $p \in A \cap \text{int}(CA \cup Y) \cap \text{int} Y$.

ii) $B \cap X' = \text{int} A \cap \text{int}(CA \cup CX \cup Y) \cap X' = \text{int}(A \cap (CX \cup Y)) \cap X' = A \cap \text{int}(CX \cup Y) \cap X'$.

Ma da $\text{cl}(X - Y) \cap X' = \emptyset$ si ricava $X' \subseteq \text{int}(CX \cup Y)$ da cui segue evidentemente la tesi. ■

Proposizione 1. -

Sia (S, τ) uno spazio topologico ed X, Y due parti di S . Allora $\tau(X) = \tau(Y)$ se e solo se

$$\begin{aligned} X - \text{int } X &= Y - \text{int } Y = X' \\ \text{cl}(X-Y) \cap X' &= \text{cl}(Y-X) \cap X' = \emptyset. \end{aligned}$$

Dimostrazione. - Proviamo che le condizioni date sono sufficienti. supponendo dapprima $Y \subseteq X$.

Si ha allora $B(X) \subseteq \tau(Y)$ infatti $A \in \tau \implies U = A \cap X = (A \cap \text{int } X) \cup U(A \cap Y) \in \tau(Y)$ quindi $\tau(X) \subseteq \tau(Y)$.

Si ha inoltre $B(Y) \subseteq B(X)$ poiché per il lemma 1 $A \in \tau \implies V = A \cap Y = (A \cap \text{int } Y) \cup (A \cap X') = (B \cap \text{int } X) \cup (B \cap X') = B \cap X \in B(X)$.

Nel caso generale, posto $Z = X \cap Y$ si ha $Z - \text{int } Z = (X \cap Y) \cap C(\text{int } X \cap \text{int } Y) = (X \cap Y \cap C \text{ int } X) \cup (X \cap Y \cap C \text{ int } Y) = (Y \cap X') \cup (X \cap X') = X'$; inoltre $\text{cl}(X-Z) \cap X' = \text{cl}(X \cap (CX \cup CY)) \cap X' = \text{cl}((X \cap CX) \cup (X \cap CY)) \cap X' = \text{cl}(X-Y) \cap X' = \emptyset$ ed analogamente $\text{cl}(Y-Z) \cap X' = \emptyset$. Si ha quindi $\tau(X) = \tau(Z) = \tau(Y)$.

Viceversa, supponiamo che $\tau(X) = \tau(Y)$ e sia $p \in Y - \text{int } Y$.

Sia $p \notin X$, posto $Y = A \cup (B \cap X)$ con $A, B \in \tau$ risulta $p \in A \subseteq Y$ cioè $p \in \text{int } Y$ contro l'ipotesi.

Se $p \in \text{int } X$ e $p \in N \subseteq X$ con $N \in \tau(p)$ si ha $p \in \text{int}_{\tau(X)}(N \cap Y) = \text{int}(N \cap Y) \cup \text{int}_{\tau \cap X}(N \cap Y \cap X) = (\text{int } N \cap \text{int } Y) \cup \text{int}_{\tau \cap X}(N \cap Y \cap X)$.

Poiché $p \notin \text{int } Y$, si ha $p \in \text{int}_{\tau \cap X}(N \cap Y \cap X) = \text{int}_{\tau \cap X} N \cap \text{int}_{\tau \cap X} Y \cap \text{int}_{\tau \cap X} X$.

In particolare $p \in \text{int}_{\tau \cap X} Y$ ed esiste $N' \in \tau(p)$ tale che $p \in N' \cap X \subseteq Y$.

Ma $p \in N \cap N' \subseteq N' \cap X \subseteq Y$ da cui $p \in \text{int } Y$ contro l'ipotesi.

Risulta quindi $Y - \text{int } Y \subseteq X - \text{int } X$ ed in modo analogo si prova l'inclusion

ne inversa per cui si conclude che $Y - \text{int } Y = X - \text{int } X$.

Sempre nell'ipotesi che $\tau(X) = \tau(Y)$ proviamo che $\text{cl}(X-Y) \cap X' = \emptyset$.

Se infatti esistesse $p \in \text{cl}(X-Y) \cap X'$ e fosse $p \in N \in \tau$ allora per ogni aperto $O = A \cup (B \cap X)$ di $\tau(X)$ contenente p si avrebbe:

se $p \in A$ $O \cap (X-Y) \supseteq A \cap (X-Y) \neq \emptyset$

se $p \in B$ $O \cap (X-Y) \supseteq B \cap X \cap (X-Y) = B \cap X \cap CY = B \cap (X-Y) \neq \emptyset$

quindi in ogni caso $O \cap (X-Y) \neq \emptyset$.

Poiché, al contrario, l'aperto di $\tau(Y)$, $N \cap Y$, non intersecherebbe $X-Y$, si avrebbe evidentemente che $N \cap Y \neq \emptyset$ per ogni $O \in \tau(X)$ e $\tau(Y) \not\subseteq \tau(X)$ contro l'ipotesi.

Analogamente si prova che $\text{cl}(Y-X) \cap X' = \emptyset$. ■

Corollario 1. -

Sia (S, τ) uno spazio topologico, X e Y due parti di S , $\text{int} X = \text{int} Y = \emptyset$.

Allora

$$\tau(X) = \tau(Y) \iff X = Y$$

Dimostrazione. $X \in \tau(Y) \implies X = A \cup (B \cap Y)$ con $A, B \in \tau \implies$

$$\implies \emptyset = \text{int } X \supseteq \text{int } A \cup \text{int } (B \cap Y) \implies A = \text{int } A = \emptyset \implies X \subseteq Y.$$

Analogamente $Y \subseteq X$. ■

Corollario 2. -

Sia (S, τ) uno spazio topologico $X, Y \subseteq S$ e sia $X' = X - \text{int } X$.

Allora

$$Y = X - F \text{ con } \text{cl } F = F \text{ ed } F \cap X' = \emptyset \implies \tau(X) = \tau(Y)$$

Dimostrazione. - Si verificano facilmente le condizioni della proposizione 1.

$$\begin{aligned} Y - \text{int } Y &= Y \cap C F \cap C(\text{int } X \cap C F) = X \cap C F \cap (C \text{int } X \cup F) = \\ &= (X \cap C F \cap C \text{int } X) \cup (X \cap C F \cap F) = X' \cap C F = X'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cl}(X-Y) \cap X' &= \text{cl}(X \cap (C X \cup F)) \cap X \cap C \text{int } X = \text{cl}(X \cap F) \cap X \cap C \text{int } X \subseteq \\ &\subseteq \text{cl } X \cap F \cap X \cap C \text{int } X = F \cap X' = \emptyset. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corollario 3. -

Sia (S, τ) uno spazio topologico, X e Y due parti di S e sia $X' = X - \text{int } X$. Allora $Y = X \cup 0, 0 \in \tau, \text{cl } 0 \cap X' = \emptyset \implies \tau(X) = \tau(Y)$.

Dimostrazione.- Poniamo $F = \text{cl } 0 - X$. Sono allora verificate le condizioni del corollario 2 come segue.

$$Y - F = Y \cap (\text{cl } 0 \cap CX) = (Y \cap \text{cl } 0) \cup (Y \cap X) = (X \cap \text{cl } 0) \cup X = X.$$

$$F \text{ è chiuso infatti } \text{cl } F = \text{cl}(\text{cl } 0 \cap CX) \subseteq \text{cl } 0 \cap \text{cl } CX = \text{cl } 0 \cap \text{cl } \text{int } X = \\ = \text{cl } 0 \cap (CX' \cap X) = \text{cl } 0 \cap (X' \cup CX) = \text{cl } 0 \cap CX = F.$$

Poiché, come si verifica facilmente, $\text{int } Y = \text{int } X \cup 0$, risulta anche

$$Y' = Y - \text{int } Y = (X \cup 0) \cap (\text{int } X \cup 0) = (X \cap \text{int } X \cap 0) \cup (0 \cap \text{int } X \cap 0) = \\ = X' \cap 0 = X'$$

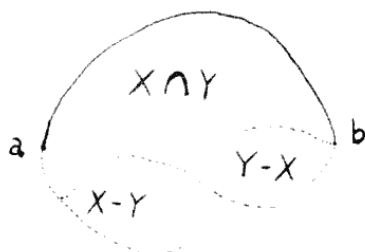
Infine risulta $(\text{cl } 0 - X) \cap Y' = \text{cl } 0 \cap X \cap X' = \emptyset$. ■

Osservazione 1. - Dai corollari 2 e 3 segue che, dati uno spazio topologico (S, τ) e una parte $X \subseteq S$ che abbia punti interni rispetto a τ , non esistono né un sottoinsieme massimale $M \subseteq S$ né un sottoinsieme minimale $N \subseteq S$ tali che $\tau(M) = \tau(X)$ o $\tau(N) = \tau(X)$.

Il risultato della proposizione 1 è illustrato dagli esempi riportati in figura, nei quali lo spazio topologico è il piano con la topologia naturale.

Nelle figure il tratto continuo indica l'appartenenza dei punti di frontiera agli insiemi disegnati.

Esempio 1. - Evidentemente le condizioni della proposizione 1 sono verificate e $\tau(X) = \tau(Y)$.



$X' = X - \text{int } X = Y - \text{int } Y$
 $a \in X'$
 $b \notin X'$

fig. 1

Esempio 2. - Non è verificata la condizione $X - \text{int } X = Y - \text{int } Y$ e chiaramente l'aperto U' e $\tau(Y)$ disegnato in figura non appartiene a $\tau(X)$; dunque $\tau(X) \neq \tau(Y)$.

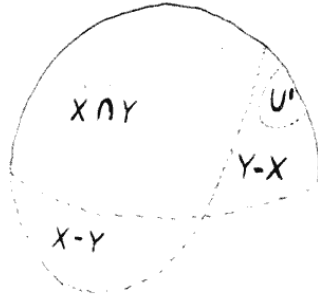
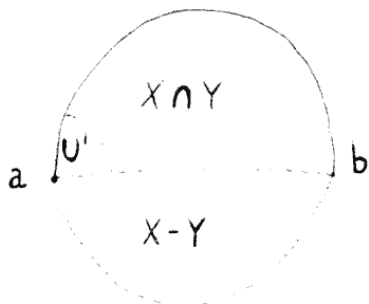


Fig. 2

Esempio 3. - È verificata la condizione $X - \text{int } X = Y - \text{int } Y = X'$ ma risulta $\text{cl}(X - Y) \cap X' = \{a\} \neq \emptyset$. Anche nella figura 3 è disegnato un aperto U' di $\tau(Y)$ non appartenente a $\tau(X)$; evidentemente $\tau(X) \neq \tau(Y)$.



$a \in X', b \notin X'$
 $a \in U'$

Fig. 3

Proposizione 2.

Dati due spazi topologici (S, τ) ed (S, τ') con τ' estensione semplice di τ , cioè $\tau' = \tau(X)$ con $X \subseteq S$, risulta che $X - \text{cl}(\text{int } X)$ è l'unione degli aperti di τ' non contenenti aperti non vuoti di τ .

Dimostrazione. - Sia $p \in X - \text{cl}(\text{int } X)$ ed $N \in \tau(p)$ tale che $N \cap \text{cl}(\text{int } X) = \emptyset$.

Posto $N' = N \cap X \in \tau'$, l'unico aperto di τ contenuto in N' è \emptyset .
Ne segue che $X - \text{cl}(\text{int } X)$ è contenuto nell'unione degli aperti di τ' non contenenti aperti non vuoti di τ .

Viceversa sia $U' = A \cup (B \cap X) \in \tau'$ con $A, B \in \tau$ e sia $U' \neq \emptyset$.
Se U' non contiene aperti non vuoti di τ , deve essere $A = \emptyset$, cioè $U' = B \cap X$. Se poi fosse $U' \cap C(X - \text{cl}(\text{int } X)) \neq \emptyset$ sarebbe $B \cap X \cap \text{cl}(\text{int}(X)) \neq \emptyset$ quindi $B \cap \text{int } X$ sarebbe un aperto non vuoto di τ contenuto in U' il che è impossibile.

Quindi $U' \subseteq X - \text{cl}(\text{int } X)$ da cui la tesi. ■
Ovviamente si ha il seguente corollario.

Corollario 4. -

Se (S, τ') è un'estensione semplice di (S, τ) , $\tau' = \tau(X)$ con $X \subseteq S$ e se $\text{int } X = \emptyset$, allora X è l'unione degli aperti di τ' non contenenti aperti non vuoti di τ . ■

Proposizione 3. -

Se (S, τ') è un'estensione semplice di (S, τ) , $\tau' = \tau(X)$, risulta

$$X' = X - \text{int } X = \bigcup_{U' \in \tau'} (U' - \text{int } U').$$

Dimostrazione. - Se $p \in X'$ ed $N \in \tau(p)$, posto $N' = N \cap X \in \tau'$ si ha $\text{int } N' = N \cap \text{int } X$ quindi $p \in N' - \text{int } N'$.

Viceversa sia $U' = A \cup (B \cap X) \in \tau'$ con $A, B \in \tau$. Si ha allora
 $U' - \text{int } U' = [(A \cup B) \cap (A \cup X)] \cap C[(A \cup B) \cap \text{int}(A \cup X)] =$
 $= (A \cup B) \cap (A \cup X) \cap C \text{int}(A \cup X).$

Sia ora $p \in U' - \text{int } U'$;
se $p \notin X$ allora $p \in A$ quindi $p \in \text{int}(A \cup X)$ e $p \notin U' - \text{int } U'$ contro l'ipotesi;

se $p \in \text{int } X$ allora $p \in \text{int}(A \cup X)$ quindi $p \notin U' - \text{int } U'$ contro l'ipotesi.

In definitiva $p \in X - \text{int } X$. ■

Proposizione 4. -

Sia (S, τ) uno spazio topologico, $X \subseteq S$ e $X' = X - \text{int } X$.

Sia inoltre F un chiuso di τ tale che $F \cap X = X'$, $\text{cl}(F - X') = F$ ed $X' \subseteq \text{int}(F \cup X)$. Posto $Y = CF \cup X'$ si ha allora

$$\tau(Y) = \tau(X).$$

Dimostrazione. - Osservato che $Y = CF \cup X' = (CF \cup X) \cap (CF \cup C \text{int} X) = CF \cup X$, si ha $Y - \text{int } Y = (CF \cup X) \cap \text{cl}(F \cap CX') = (CF \cup X) \cap F = X \cap F = X'$.

Inoltre $\text{cl}(Y - X) \cap X' = \text{cl}(CF \cap CX) \cap X' = C \text{int}(F \cup X) \cap X' = \emptyset$ e

$\text{cl}(X - Y) \cap X' = \text{cl}(X \cap F \cap CX') \cap X' = \text{cl}(F \cap \text{int } X) \cap X' = \emptyset$ in quanto $F \cap \text{int } X = \emptyset$.

Per la proposizione 1 si ha la tesi. ■

Proposizione 5. -

Siano τ e τ' due topologie su S con $\tau \subseteq \tau'$ e sia $X' = \bigcup_{U' \in \tau'} (U' - \text{int } U')$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché τ' sia un'estensione semplice di τ è che esista un chiuso F di τ contenente X' e tale che

- 1) $\text{cl}(F - X') = F$
- 2) $\forall p \in X'$ e $\forall N' \in \tau'(p) \exists N \in \tau(p)$ tale che $N \cap (CF \cup X') \in \tau'(p)$ e $N \cap (CF \cup X') \subseteq N'$.

In tal caso si ha, inoltre, $\tau' = \tau(X)$ con $X = CF \cup X'$.

Dimostrazione. - Sufficienza. Sia F un chiuso verificante le condizioni

1) e 2) e sia $X = CF \cup X'$. Si ha allora

$\tau' \subseteq \tau(X)$, infatti se $N' \in \tau'$ e $N' \cap X' = \emptyset$ risulta $N' - \text{int } N' = \emptyset$ cioè

$N' \in \tau \subseteq \tau(X)$; se invece $N' \cap X' = L \neq \emptyset$ e se $p \in L$, esiste $N_p \in \tau(p)$

con $N_p \cap X \subseteq N'$ e $N_p \cap X \in \tau'(p)$. Posto allora $N = \bigcup_{p \in L} N_p$ si ha $N \in \tau$,

$L \subseteq N$ ed $N \cap X \subseteq N'$ e pertanto $N' = L \cup \text{int } N' = \text{int } N' \cup (N \cap X) \in \tau(X)$.
 Si ha inoltre $\tau \cap X \subseteq \tau'$ poiché, osservato che $X - \text{int } X = (CF \cup X') \cap F = X'$ risulta:

se $N \in \tau$ ed $N \subseteq X$ allora $N \cap X = N \in \tau'$;

se $N \in \tau$ ed $N \cap CX \neq \emptyset$ ed $N \cap X' = \emptyset$ allora $N \cap X \subseteq \text{int } X$ da cui $N \cap X \in \tau \subseteq \tau'$;

se $N \in \tau$ ed $N \cap X' = L \neq \emptyset$ si ha $N \cap \text{int } X \in \tau \subseteq \tau'$ e per ogni $p \in L$ esiste $N_p \in \tau(p)$ con $N_p \subseteq N$ ed $N_p \cap X \in \tau'(p)$; posto in tal caso $N' = \bigcup_{p \in L} N_p \cap X \in \tau'$ si ha $N \cap X = (N \cap \text{int } X) \cup N' \in \tau'$.

In definitiva $\tau' = \tau(A)$.

Che la condizione sia necessaria segue evidentemente dalle proposizioni 3e4. ■

Osservazione 2. -

Una condizione necessaria perché un raffinamento τ' di τ sia un'estensione semplice è che l'insieme $X' = \bigcup_{U' \in \tau'} (U' - \text{int } U')$ sia privo di punti interni in τ . (Si deduce evidentemente dalla proposizione 3).

Osservazione 3. - Nelle ipotesi della proposizione 5, se l'insieme $X' = \bigcup_{U' \in \tau'} (U' - \text{int } U')$ è un aperto di τ' privo di punti interni, il chiuso S verifica le condizioni 1) e 2) e dunque $\tau' = \tau(X')$.

Concludiamo con due esempi in cui riconosciamo che un raffinamento τ' di uno spazio topologico (S, τ) è un'estensione semplice di τ .

Esempio 4. - Sia $S = \{a, b, c, d, f\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{d, f\}, \{a, b\}, \{a, d, f\}, \{b, d, f\}, \{a, b, d, f\}, S\}$ è una topologia su S . $\tau' = \tau \cup \{\{d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, d\}, \{c, d, f\}, \{a, b, c, d\}, \{a, c, d, f\}, \{b, c, d, f\}\}$ è un raffinamento di τ e risulta $X' = \bigcup_{N' \in \tau'} (N' - \text{int } N') = \{c, d\}$.

Poiché risulta $X' \in \tau'$ ed $\text{int } X' = \emptyset$ si ha, per l'osservazione 3, $\tau' = \tau(X')$.

Esempio 5. - $S = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, S\}$; $\tau' = \tau \cup \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ è un raffinamento di τ e risulta $X' = \bigcup_{N' \in \tau'} (N' - \text{int } N') = \{c\}$.

Si verifica poi facilmente che considerato il chiuso $F = \{c,d\}$ contenente X' si ha $\text{cl}(F-X') = F$; inoltre per ogni $N' \in \tau'(c)$ si ha che l'intorno aperto $N = \{c,d\} \in \tau(c)$ interseca $CF \cup X' = \{a,b,c\}$ secondo l'intorno $\{c\} \in \tau'(c)$ contenuto in N' .

Per la proposizione 5 si ha allora $\tau' = \tau(\{a,b,c\})$.

B I B L I O G R A F I A

- [1] Borges C.J.R., *On extensions of topologies*, *Canad. J. Math.* 19(1967), 474-487.
- [2] Kelley J.L., *General topology*, Van Nostrand, New York 1955.
- [3] Levine N.L., *Simple extensions of topologies*, *Amer. Math. Monthly* 71 (1964), 22-25.
- [4] Reynolds D.F., *Simple extensions of topologies*, *Topology* (Proc. Ninth Annual Spring Topology Conf., Memphis 1975), *Lect. Notes in Pure and Appl. Math.*, vol. 24, Dekker, New York, 1976.