

ALCUNI RISULTATI SULLA FATTORIZZAZIONE DI SEMIGRUPPI

F.Catino M.R.Dell'Anna M.M.Miccoli^(*)

Ricordiamo che un semigrupp $\textcircled{0}$ moltiplicativo S è detto fattorizzabile se e solo se esistono sottosemigrupp $\textcircled{0}$ propri A e B di S tali che $S = AB$. Se questo è possibile, AB è detta una fattorizzazione di S con primo fattore A e secondo fattore B .

E' stato considerato il seguente problema:
dati A e B elementi delle classi di semigrupp $\textcircled{0}$ P e Q , rispettivamente, (P e Q non necessariamente distinte) esiste un semigrupp $\textcircled{0}$ S fattorizzabile con primo fattore A e secondo fattore B ?

E' stato esaminato il caso in cui almeno una delle classi P e Q è la classe dei semigrupp $\textcircled{0}$ zero sinistri o destri e sono state caratterizzate le fattorizzazioni con zero semigrupp $\textcircled{0}$.

Teorema I

Non esiste alcun semigrupp $\textcircled{0}$ S fattorizzabile come $S = AB$, dove il secondo fattore B [primo fattore A] è un semigrupp $\textcircled{0}$ zero sinistro [destro].

Dim.

Per assurdo esista un semigrupp $\textcircled{0}$ S con una fattorizzazione AB con B semigrupp $\textcircled{0}$ zero sinistro. Considerato un qualsiasi elemento $s = ab \in S$ ($a \in A, b \in B$), essendo B un semigrupp $\textcircled{0}$ zero sinistro

$$sB = (ab)B = a(bB) = ab = s$$

in particolare $aB = a$ per ogni $a \in A$, quindi $AB = A$, in contraddizione con l'ipotesi $A \subset S$.

Analogamente se A è un semigrupp $\textcircled{0}$ zero destro.

Corollario I

Non esiste alcuna fattorizzazione di un semigrupp $\textcircled{0}$ S in cui almeno uno dei due

(*) Gli autori sono laureandi in Matematica presso la Facoltà di Scienze dell'Università di Lecce.

fattori ha ordine I.

Dim.

Per assurdo esista un semigrupp \bar{o} fattorizzabile $S = AB$ in cui almeno uno dei due fattori abbia ordine I, sia esso A ; allora A è un semigrupp \bar{o} zero destro, in contraddizione col Teor. I.

Il teorema seguente è un tentativo di generalizzazione del Teor. I,

Teorema 2

Non esiste alcun semigrupp \bar{o} S fattorizzabile come $S = AB$, dove A contiene unità sinistra e B contiene un sottosemigrupp \bar{o} zero sinistro B' non costituito da un solo elemento e con unità destra w per B .

Dim.

Per assurdo esista un semigrupp \bar{o} fattorizzabile : $S = AB$ con A e B soddisfacente le condizioni dell'enunciato. Allora w è una unità per S e quindi per ogni $b \in B'$,

$$b = bw = wb = w$$

in contraddizione con l'ipotesi che B' non sia costituito da un solo elemento.

Vale il duale del Teor. 2:

Non esiste alcun semigrupp \bar{o} fattorizzabile come $S = AB$, dove A contiene un sottosemigrupp \bar{o} zero destro A' non costituito da un solo elemento e con unità sinistra per A e B contiene unità destra.

Dim. (Analog \bar{a} alla precedente).

Osservazione I

Semigrupp \bar{i} che godono delle propriet \bar{a} di B del Teor. 2 sono i gruppi sinistri, eccetto i gruppi.

Osservazione 2

Nel Teor. 2, l'ipotesi che A contenga unità sinistra è essenziale. Infatti il semigrupp \bar{o} S

	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	c	c
b	0	b	b	d	d
c	0	c	c	a	a
d	0	d	d	b	b

è fattorizzabile come $S = AB$, dove $A = \{0, a, b\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$.

Lemma I

Dati due semigrupperi, A con unità destra e B con unità sinistra, esiste un semigruppero $S = AB$.

Dim.

E' Immediata, dal Teor. 5.I di [I].

Dal Teor. I discende che una fattorizzazione di un semigruppero mediante zero semigrupperi deve necessariamente avere come primo fattore un semigruppero zero sinistro e come secondo fattore un semigruppero zero destro. Inoltre vale il

Teorema 3

Dati A e B semigrupperi zero sinistro e zero destro, rispettivamente, esiste un semigruppero $S = AB$.

Dim.

Immediata dal Lemma I.

Proposizione I

Se S è un semigruppero e $S = AB$, con A sottosemigruppero zero sinistro e B sottosemigruppero zero destro, valgono le seguenti proprietà:

- 1) S è idempotente
- 2) S è senza zero

- 3) S è semplice
 4) ogni idempotente di S è primitivo
 5) per ogni $s \in S$ $sSs = s$

Dim.

Notiamo che

per ogni $a \in A$ e $b \in B$ $aSb = ab$ (°)

infatti $aSb = aSb = a(AB)b = (aA)(Bb) = ab$

d'altra parte $ab = (aa)(bb) = a(ab)baSb$.

- 1) Sia $s = ab \in S$ allora per la (°)
 $ss = (ab)(ab) = a(ba)b = ab = s$

- 2) Per assurdo S abbia zero e sia $0 = a'b'$,

per ogni $s = ab \in S$ $s = ab = (aa')(b'b) = a(a'b')b = a0b = 0$

quindi S avendo un solo elemento non è fattorizzabile perché non contiene sottosemigrupperi propri, in contraddizione con l'ipotesi.

- 4) Sia $s = ab \in S$, ($a \in A$, $b \in B$) per ogni $s' = a'b' \in S$ ($a' \in A, b' \in B$)
 $a'b' \leq ab \iff (a'b')(ab) = (ab)(a'b') = a'b' \iff a'(b'a)b =$
 $= a(ba')b' = a'b' \iff a'b = ab' = a'b'$

inoltre, essendo S idempotente,

$$a'b' = (ab')(a'b) = a(b'a')b = ab$$

perciò $s = ab$ è un idempotente primitivo.

- 3) Per ogni $s \in S$ $s = ab$ ($a \in A$, $b \in B$), applicando ripetutamente la (°), si ha

$$sSs = (AB)ab(AB) = (aBab)AB = AbAB = AB = S$$

- 5) Sia $s \in S$, $s = ab$ ($a \in A$, $b \in B$)

$$sSs = (ab)AB(ab) = a(bABa)b = ab = s .$$

Teorema 4

Un semigruppero S è fattorizzabile come $S = AB$, con A semigruppero zero sini-

stro e B semigrupp zero destro se e solo se S è completamente semplice non banale (né gruppo destro né gruppo sinistro) ed esiste un idempotente k tale che

$$kSk = k.$$

Dim.

Sia $S = AB$ con A semigrupp zero sinistro e B semigrupp zero destro, proviamo che esiste una fattorizzazione di S con primo fattore L , ideale minimale sinistro, e secondo fattore R , ideale minimale destro. S per 3) e 4) della Prop. I, è completamente semplice e inoltre, se k è un idempotente di S , $L = Sk$ è un ideale minimale sinistro di S , $R = kS$ è un ideale minimale destro di S e

$$LR = SkkS = ABkkAB = A(BkkA)B = AB = S$$

Quindi poiché S è senza zero e $S = LR$, per il Teor. 3.3.I di [I], S è completamente semplice non banale, inoltre per la 5) della Prop. I, esiste un idempotente k di S tale che $kSk = k$.

Viceversa, per il Teor. 3.3.I di [I], considerato l'idempotente k di S tale che $kSk = k$, $S = AB$ con $A = Sk$ ideale minimale sinistro e $B = kS$ ideale minimale destro. Inoltre A è un semigrupp zero sinistro, infatti per ogni

$$a = skeA \quad (s \in S) \quad aA = (sk)Sk = s(kSk) = sk = a$$

Analogamente si dimostra che B è un semigrupp zero destro.

Teorema 5

Sia S un semigrupp completamente semplice non banale con un idempotente k tale che $kSk = k$. S è fattorizzabile, come $S = AB$, se e solo se $A \cap R \neq \emptyset$ per ogni ideale minimale destro R di S , e $B \cap L \neq \emptyset$ per ogni ideale minimale sinistro L di S .

Dim.

Per il corollario 2.49 p. 78 [2], S è unione disgiunta di ideali minimali destri [sinistri]. Se $S = AB$, $A \cap R \neq \emptyset$ per ogni ideale minimale destro R perché, se esistesse R' tale che $A \cap R' = \emptyset$ posto $S' = S \setminus R'$, si avrebbe $S = AB \subseteq S' \subseteq S'$ e quindi $S = S'$, in contraddizione con fatto che $S' \subsetneq S$.

Analogamente per B.

Viceversa. Si deve provare che per ogni $s \in S$ esiste $a \in A$ e esiste $b \in B$ tale che $s = ab$. Sia $s \in S$, per 2.49 p.78 [2], esistono L ideale minimale sinistro ed R ideale minimale destro tali che $s \in R$ e $s \in L$, allora, per 2.31 p. 69 [2], $R = sS$ e $L = Ss$. Quindi, dati $a \in A \cap R$ e $b \in B \cap L$, $ab \in RL$ ma, per il Teor. 4 e la Prop. I, $RL = sSSs \subseteq sSs$, perciò $ab = s$.

Osservazione 3

Si dimostra che il sottosemigruppo $A[B]$ del teorema precedente è unione di di giunta di suoi sottosemigruppi zero destri sinistri, i quali sono anche ideali sinistri [destri] di $A[B]$.

Osservazione 4

Nella dimostrazione del Teor. 5 l'ipotesi che A, B sono sottosemigruppi di S non è necessaria.

Gli autori esprimono viva gratitudine al Prof.

F. Migliorini per aver suggerito la ricerca e per il suo costante incoraggiamento.

B I B L I O G R A F I A

- [1] Tolo, K *Factorizable semigroups, Pacific Journal of Mathematics Vol. 31, No. 2, 1969 pp. 523-535.*
- [2] Clifford, A.H. - Preston G.B. *The algebraic theory of semigroups, Vol. I, Providence, Amer. Math. Soc., 1961.*