

DEFINIZIONE E STUDIO DI UNA NUOVA CLASSE DI FUNZIONI, CHE PERMETTONO UNA PRESENTAZIONE DIVERSA DELLE FUNZIONI ELLITTICHE.

E. FERRARI

Istituto di Fisica dell'Università, Roma.

INTRODUZIONE.

Si vogliono studiare le proprietà di una classe di funzioni di una variabile  $A_n(x)$ ,  $T_n(x)$ , dipendenti da un parametro reale  $n$ , che in un certo senso generalizzano le proprietà delle funzioni trigonometriche  $\sin x$ ,  $\cos x$ , e per questo verranno chiamate "funzioni trigonometriche generalizzate" (FTG), anche se, come si vedrà, gli esempi più interessanti saranno connessi alle funzioni ellittiche.

Le funzioni trigonometriche corrispondono al caso particolare  $n = 2$ , perché questo valore figura come esponente nella relazione

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (1)$$

Si vuole infatti che, per  $n$  generico,  $A_n(x)$  e  $T_n(x)$  soddisfino la relazione

$$[A_n(x)]^n + [T_n(x)]^n = 1 \quad (2)$$

E' chiaro che la sola condizione (2) è del tutto insufficiente per definire tali funzioni. Si deve ricorrere a un'altra fondamentale generalizzazione, concernente le relazioni differenziali

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad (3)$$

che, per  $n$  generico, diventano

$$\frac{d}{dx} A_n(x) = [T_n(x)]^{n-1} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx} T_n(x) = -[A_n(x)]^{n-1}$$

In modo completamente analogo (cambiando un segno nella (2) e nella

seconda delle (4) si può definire la classe delle funzioni iperboliche generalizzate (FTG) che, per  $n=2$  si riducono a  $\sinh x$ ,  $\cosh x$ .

Il lavoro che segue sarà articolato in tre parti. La prima studia le proprietà delle FTG come funzioni di variabile reale, riportando la definizione originale di queste funzioni<sup>(1)</sup>, in base a cui possono essere dedotte le (4), e ricavando alcune importanti proprietà delle funzioni suddette sull'asse reale. In linea di principio, questa parte potrebbe sembrare superflua (in quanto contenuta nella seconda parte, ove le FTG sono studiate come funzioni di variabile complessa); tuttavia essa fornisce utili indicazioni per lo studio di tali funzioni nel campo complesso, come del resto verrà constatato negli esempi che saranno discussi in seguito.

Benché in linea di principio il parametro  $n$  (chiamato anche "ordine" delle FTG) possa essere arbitrario, è evidente che i casi di maggior interesse, sui quali verrà concentrata l'attenzione, sono quelli in cui  $n$  è intero e positivo. Si può anticipare qui che la soluzione quando  $n=1$  e  $2$  è banale, mentre per  $n = 3, 4$  e  $6$  essa si può ottenere mediante particolari tipi di funzioni ellittiche. Invece gli altri casi con  $n$  intero ( $n = 5, 7, 8, 9 \dots$ ) sembrano richiedere una difficile indagine nel campo delle funzioni a più valori di variabile complessa, che l'autore della presente nota non è in grado di svolgere: a proposito di questi casi, si potrà soltanto delineare l'impostazione del problema, con la presentazione delle difficoltà che si incontrano.

La terza parte del lavoro è forse la più interessante dal punto di vista matematico: in essa, visto la corrispondenza tra FTG con  $n = 3, 4, 6$  e particolari funzioni ellittiche, si cerca di estendere la classe delle FTG,

---

1) Questa definizione, e le proprietà che ne derivano, sono state presentate dallo scrivente come tesina (relatori i Proff. A. Ghizzetti e E. De Giorgi), in occasione della seduta di laurea in Fisica tenutasi il 19-7-1957 presso l'Istituto di Fisica dell'Università di Roma.

con opportune modifiche alle formule (2) e (4), in modo da introdurre una dipendenza da un parametro addizionale e descrivere così l'intera classe delle funzioni ellittiche (con speciale attenzione verso quelle a invarianti reali). Questi sviluppi porteranno a risultati soddisfacenti, tali da poter parlare di un nuovo modo di presentare le funzioni ellittiche.

## P A R T E I

### LE FTG COME FUNZIONI DI VARIABILE REALE

#### I - Definizione delle FTG.

Per la definizione delle FTG come funzioni di una variabile reale  $x$  si generalizza una delle possibili definizioni delle funzioni  $\sin x$ ,  $\cos x$  nella seguente maniera:

Si dicono  $A_n(x)$  e  $T_n(x)$  rispettivamente l'ordinata e l'ascissa di un punto della curva  $\xi^n + \eta^n = 1$  (giacente nel piano cartesiano  $\xi\eta$ ), tale che il raggio vettore per quel punto, il semiasse positivo  $\xi$  e la curva in questione delimitino un settore di area  $\frac{1}{2}x$ .

Affinché la definizione data abbia senso,  $n$  deve essere positivo. In tal caso, la curva nel piano  $\xi\eta$  (che sarà chiamata "curva parametrica") passa per i punti  $(1,0)$  e  $(0,1)$ , ed è certamente definita nel primo quadrante. Le funzioni possono quindi essere sempre definite in un intervallo della variabile  $x$  compreso tra  $x = 0$  (ove  $A_n = 0, T_n = 1$  per ogni  $n > 0$ ) e un valore positivo di  $x$ , dipendente da  $n$  e chiamato  $m_n$ , uguale al doppio dell'area (finita) delimitata dalla curva parametrica nel primo quadrante. E' evidentemente  $A_n(m_n) = 1, T_n(m_n) = 0$ . Il valore di  $m_n$  è facilmente calcolabile: si ha

$$m_n = 2 \int_0^1 (1-\xi^n)^{1/n} d\xi = \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)} \quad (5)$$

Casi particolari:  $m_1=1, m_2=\pi/2, m_3 = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 \Gamma^{-3}\left(\frac{2}{3}\right),$

$$m_4 = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right), m_6 = 2^{-2/3} 3^{1/2} m_3, \lim_{n \rightarrow 0} m_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} m_n = 2 \quad 2)$$

Come nel caso delle funzioni trigonometriche, in tale intervallo vale la relazione

$$A_n(x) = T_n(m_n - x) \quad (6)$$

a causa della simmetria della curva parametrica rispetto alla bisettrice del primo quadrante.

Tuttavia è chiaro che i valori di  $n$  per cui le FTG sono definibili solo in un intervallo limitato dell'asse reale hanno scarso interesse. E' bene quindi concentrare l'attenzione sui valori di  $n$  per cui la curva parametrica può estendersi al di fuori del primo quadrante, in modo da permettere la definizione delle FTG possibilmente per tutti i valori di  $x$ . Tutti i valori interi positivi di  $n$  permettono questa estensione. La cosa è anche possibile per  $n$  razionale con denominatore dispari, se per  $\xi$  reale, si assume la definizione  $(-\xi)^{1/q} = -\xi^{1/q}$  ( $q$  dispari). Tuttavia, per evitare inutili appesantimenti, la discussione verrà portata avanti solo per  $n$  intero positivo <sup>3)</sup>, salvo che in alcuni passi facilmente riconoscibili.

Si vede immediatamente che le due sottoclassi con  $n$  pari e dispari presentano un andamento completamente diverso. Con  $n$  pari, la curva parametrica è chiusa, e le funzioni sono immediatamente definibili per ogni  $x$ : esse risultano periodiche di periodo  $4m_n$ , e per esse valgono relazioni analoghe a quelle che sono soddisfatte dalle funzioni trigonometriche nel caso di archi supplementari, esplementari, etc. <sup>4)</sup> E' pure immediato controllare

- 
- 2) Questi limiti, come pure i valori di  $m_1$  e  $m_2$ , si possono trovare direttamente dall'esame della curva parametrica, che in tali casi assume forme tali da consentire un calcolo immediato delle aree.
- 3) Se  $n=p/q > 0$  ( $q$  dispari), le considerazioni svolte a proposito della parità di  $n$  si applicano alla parità di  $p$ .
- 4) La (6) è invece valida per tutti gli  $n$ , per la simmetria della curva parametrica rispetto alla retta  $\eta - \xi = 0$ .



che  $A_2(x) = \sin x$ ,  $T_2(x) = \cos x$ .

Per  $n$  dispari, invece, la curva parametrica è aperta e si estende sino all'infinito, mantenendosi sempre alla destra della retta  $\eta + \xi = 0$  che, quando  $n > 1$ , rappresenta il suo asintoto.<sup>5)</sup> Nei casi in cui l'area compresa tra la curva parametrica e tale retta sia infinita, mentre il punto rappresentativo percorre la curva parametrica la variabile  $x$  assume tutti i valori reali tra  $-\infty$  e  $+\infty$ , e le funzioni  $A_n(x)$  e  $T_n(x)$  risultano monotone e divergenti all'infinito.<sup>6)</sup> Ciò accade certamente per  $n \leq 1$ . Il caso  $n=1$  è di immediata soluzione: si ottiene infatti

$$\begin{aligned} A_1(x) &= x \\ T_1(x) &= 1-x \end{aligned} \tag{7}$$

Nei casi in cui invece la superficie compresa tra la curva parametrica e la retta  $\eta + \xi = 0$  sia di area finita, la definizione delle FTG è limitata all'intervallo  $-b_n < x < m_n + b_n$ , in cui  $b_n > 0$  è il doppio dell'area di quella parte della superficie predetta contenuta nel secondo (o nel quarto) quadrante del piano  $\xi\eta$ . I punti  $x = -b_n$  e  $x = m_n + b_n$  sono certamente punti di singolarità per le funzioni  $A_n$  e  $T_n$ . Tuttavia in questi casi si può pensare di "periodare" tali funzioni supponendo che il punto rappresentativo possa percorrere ripetutamente la curva parametrica passando attraverso il punto all'infinito di tangenza con l'asintoto (cioè uscendo dal ramo superiore della curva per rientrare da quello inferiore). In tal caso le FTG con  $n$  dispari risulteranno periodiche con periodo  $m_n + 2b_n$  e presenteranno lo stesso tipo di singolarità nei punti  $x = -b_n + k(m_n + 2b_n)$  con  $k$  intero.

---

5) Come esempio di curva di questo tipo, si veda quello per  $n=3$  riportata più avanti in Fig. 1.

6) Si è tacitamente supposto che le funzioni ottenute siano continue per tutti i valori di  $x$  per i quali il punto rappresentativo è contenuto all'interno della curva parametrica, essendo la cosa piuttosto intuitiva. Tuttavia è possibile dare una dimostrazione rigorosa di questo fatto.

Resta da determinare:

- 1) per quali valori di  $n$  l'area tra la curva e l'asintoto è finita,
- 2) quale è il valore di  $b_n$ .

La risposta a queste domande si ottiene scrivendo materialmente l'espressione per l'area corrispondente a  $b_n$  nel quarto quadrante. Tenendo presente la struttura della curva quale è mostrata in Fig. 1, si ha

$$\frac{1}{2} b_n = \frac{1}{2} + \int_1^{\infty} [(1-\xi^n)^{1/n} + \xi] d\xi = \frac{1}{2} + \int_1^{\infty} \xi [1 - (1-\xi^{-n})^{1/n}] d\xi$$

Nel secondo integrale, la parte in parentesi quadra tende a zero come  $\xi^{-n}$  per  $\xi \rightarrow \infty$ ; ne segue che la condizione di convergenza dell'integrale è  $n > 2$ . Quindi le FTG con  $n$  dispari  $> 2$  risulteranno periodiche, con infinitesingularità sull'asse reale.

Il calcolo esplicito dell'integrale sopra riportato fornisce (per  $n > 2$ ):

$$b_n = \frac{1}{n} B\left(1 - \frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \quad (8)$$

Confrontando con la (5), e sfruttando le proprietà della funzione  $\Gamma$ , si ottiene:

$$\frac{b_n}{m_n} = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{n}} \quad (8')$$

Si trova l'importante risultato  $b_3 = m_3$ : le FTG di ordine 3 sono periodiche con periodo  $3m_3$ . Una valutazione numerica di questa costante mostra che essa è ottimamente approssimata dal numero decimale 5.3; si ha infatti  $3m_3 = 5.29991625\dots$

## I.2. Il sistema differenziale delle FTG.

Dobbiamo ora ricavare il sistema differenziale (4), che costituisce la proprietà più interessante delle FTG, a partire dalla definizione data nel precedente paragrafo. Esso si ottiene immediatamente applicando il teorema di Dini al seguente sistema di due equazioni, che definiscono implicitamen

te le due funzioni  $A_n, T_n$  aventi per argomento la variabile  $x$ :

$$\begin{aligned} [A_n]^n + [T_n]^n &= 1 \\ \frac{1}{2} A_n T_n + \int_{T_n}^1 (1-\xi^n)^{1/n} d\xi &= \frac{1}{2} x \end{aligned} \tag{9}$$

La prima equazione non è che la (2), ed esprime il fatto che il punto rappresentativo in base al quale sono definite le funzioni  $A_n$  e  $T_n$  giace sulla curva parametrica: la seconda equazione afferma che l'area del settore richiamato nella definizione di tali funzioni vale proprio  $\frac{x}{2}$ .<sup>7)</sup>

Qualunque scelta di  $x, A_n, T_n$  ottenuta collocando il punto rappresentativo all'interno della curva parametrica fornisce un "punto soluzione"; lo jacobiano delle equazioni (9) rispetto a  $A_n$  e  $T_n$  vale  $\frac{n}{2}$ , e quindi è sempre non nullo, garantendo così l'esistenza e l'unicità della soluzione in un intorno di ciascuno di essi.<sup>8)</sup>

---

7) La cosa è evidente quando il punto rappresentativo giace sulla porzione della curva parametrica contenuta nel primo quadrante; ma è facile controllare che, nei casi in cui la curva si può estendere al di fuori di esso, le (9) restano valide entro tutto l'intervallo proprio di definizione [che risulta, per le funzioni periodabili,  $(-2m_n, 2m_n)$  per quelle di ordine pari,  $(-b_n, m_n + b_n)$  per quelle di ordine dispari].

Per  $n < 1$  non possono essere presi come punti soluzione le scelte  $x=0, A_n=0, T_n=1$  e  $x=m_n, A_n=1, T_n=0$ , perché in essi le derivate parziali delle (9) rispetto a  $A_n$  o  $T_n$  divergono; tuttavia le funzioni possono essere definite anche in questi casi con un procedimento di limite.

8) Nel calcolo dello jacobiano, e in genere nel calcolo di tutte le derivate connesse al sistema (9), si deve tener conto, quando è necessario, della prima di tali equazioni (p.es., si può identificare  $(1-T_n^n)^{1/n}$  con  $A_n$  perché ciò è verificato per tutti i punti soluzione che ci interessano).

L'applicazione del teorema di Dini, come già detto, permette di ricavare dal sistema (9)  $\frac{dA_n}{dx}$  e  $\frac{dT_n}{dx}$ , per cui si ottengono le espressioni (4).

Introducendo ora la funzione  $S_n(x) = A_n(x)/T_n(x)$  e il suo inverso  $1/S_n(x)$  (che, per  $n = 2$ , si riducono rispettivamente a  $\text{tg } x$  e  $\text{cotg } x$ ) si ricava immediatamente

$$\frac{dS_n(x)}{dx} = \frac{1}{[T_n(x)]^2} \tag{10}$$
$$\frac{d[1/S_n(x)]}{dx} = - \frac{1}{[A_n(x)]^2}$$

E' interessante notare che i secondi membri delle (10) hanno lo stesso aspetto qualunque sia l'ordine  $n$ .

Una prima considerazione da fare a proposito del sistema (4) è che, quando  $n$  non è intero, effettuando un numero opportuno di derivate successive delle funzioni  $A_n$  e  $T_n$ , si arriva sempre a potenze di tali funzioni con esponenti negativi: quindi i punti  $x = 0$  e  $x = m_n$ , in cui una delle due funzioni si annulla, devono necessariamente essere dei punti di singolarità delle funzioni (e di ciò si dovrà tener conto per una eventuale estensione delle funzioni al campo complesso). Invece, quando  $n$  è intero, le derivate successive di  $A_n$  e  $T_n$  di ordine comunque elevato saranno sempre dei polinomi in  $A_n$  e  $T_n$ ; quindi in particolare il punto  $x = 0$  sarà un punto di regolarità delle funzioni, e in un intorno opportuno di tale punto esse potranno essere sviluppate in serie di potenze con applicazione della formula di Taylor.

A proposito di tale sviluppo è facilmente dimostrabile il seguente teorema, che pone in luce un'altra notevole analogia con le funzioni trigonometriche:

Lo sviluppo in serie di Taylor delle FTG di ordine intero  $n$  nel punto  $x = 0$  procede per potenze di  $x^n$ ; in particolare si ha

$$\begin{aligned} T_n(x) &= 1 + \alpha_1 x^n + \alpha_2 x^{2n} + \dots \\ A_n(x) &= x(1 + \beta_1 x^n + \beta_2 x^{2n} + \dots) \end{aligned} \quad (11)$$

Nella dimostrazione di queste formule, supponendo fissato una volta per tutte il valore di  $n$ , sopprimiamo per ragioni di semplicità l'indice  $n$  dai simboli delle funzioni <sup>9)</sup>. Iniziamo a considerare un'espressione del tipo  $A^k P(T)$ , in cui l'intero  $k$  soddisfa  $0 < k < n$ , e  $P(T)$  indica un polinomio in  $T$ . Derivando tale espressione rispetto a  $x$ , e utilizzando le

(4) si ottiene  $(P'(T) = \frac{dP(T)}{dT})$  :

$$\frac{d}{dx} A^k P(T) = k A^{k-1} T^{n-1} P(T) - A^k P'(T) A^{n-1} = A^{k-1} P_1(T)$$

in cui  $P_1(T)$  è di nuovo un polinomio in  $T$ , definito da

$$P_1(T) = k T^{n-1} P(T) - (1 - T^n) P'(T) .$$

Supponiamo ora che una certa derivata di  $A$  o  $T$  sia riconducibile a un polinomio in  $T, Q(T)$ . La derivata successiva sarà data da  $A^{n-1} Q'(T)$ .

Per il risultato ottenuto in precedenza, derivando una seconda volta, una terza... si ottengono sempre espressioni del tipo  $A^k P(T)$ , in cui l'esponente di  $A$  diminuirà di 1 a ogni passo. Dopo  $n$  derivazioni si arriverà nuovamente a un polinomio in  $T$ .

Ma un'espressione come  $A^k P(T)$  ( $k > 0$ ) calcolata in  $x = 0$  è sempre

---

9) Questa soppressione verrà effettuata spesso in questo lavoro senza timore di generare confusione. Infatti, a differenza delle classi di altre funzioni dipendenti da un parametro (come p.es. le funzioni di Bessel) per cui esistono relazioni di ricorrenza e differenziali che legano tra loro funzioni aventi valori diversi di tale parametro, per le FTG di un dato ordine  $n$  tutte le relazioni che legano tali funzioni restano all'interno dell'ordine  $n$ , così che solo in casi particolari è necessario specificarne esplicitamente il valore nei simboli.

nulla. Quindi si vede che, partendo da un qualunque polinomio in  $T$ , le successive  $n-1$  derivate saranno nulle in  $x = 0$ , e solo l' $n$ -esima derivata potrà essere non nulla; e, a partire da essa, il discorso si ripete. Ma la funzione  $T$  è essa stessa un polinomio in  $T$  (che per  $x = 0$  vale 1), mentre per la funzione  $A$  la derivata prima è un polinomio in  $T$  (che per  $x = 0$  vale 1). In questo modo l'applicazione della formula di Taylor porta al risultato (11).

Quanto al valore dei coefficienti  $\alpha_h$  e  $\beta_h$  ( $h=1,2,\dots$ ) l'autore della presente nota non è riuscito a trovare una formula che li esprima (neppure di tipo ricorrente) anche nel caso non banale più semplice ( $n=3$ ). Tuttavia, considerando separatamente gli sviluppi (11) ordine per ordine, è possibile ricavare alcune proprietà dei coefficienti suddetti che mostrano notevoli analogie con il caso degli sviluppi di  $\sin x$  e  $\cos x$ . In particolare, si può mostrare che i coefficienti della (11) sono tutti non nulli e di segno alternato; e che, se si definiscono le funzioni iperboliche generalizzate (a cui si è già accennato nell'introduzione) prendendo come curva parametrica la  $\xi^n - \eta^n = 1$ , si ottengono ancora sviluppi di tipo (11) con gli stessi coefficienti, però tutti con il segno positivo. Per non appesantire il presente lavoro, i risultati di queste indagini verranno riportati in una pubblicazione a parte.

### I.3. Alcune proprietà delle funzioni di ordine 3.

Le funzioni di ordine 3, come già ricordato, costituiscono il più semplice esempio non banale di FTG, e godono di numerose e interessanti proprietà di simmetria, alcune delle quali non riscontrate per nessun altro ordine. Molte di queste proprietà possono essere ricavate mediante lo studio delle funzioni sull'asse reale, e servire di utile indicazione per l'estensione della loro definizione a tutto il piano complesso. Riteniamo utile riportare i risultati più interessanti, che poi varranno ripresi nella Parte II. Naturalmente per gli altri ordini trattati in questo lavoro le funzioni saranno direttamente prese in esame nel campo complesso (Parte II).

Nelle Figure qui annesse sono riportati i grafici più interessanti connessi a tali funzioni. Fig. 1 riporta la curva parametrica  $\xi^3 + \eta^3 = 1$  in base a cui le funzioni sono definite, con alcune indicazioni connesse alla procedura di definizione. Fig. 2 mostra l'andamento delle funzioni  $A, T, S, 1/S, 1/A, 1/T$  <sup>10)</sup> su un periodo, scelto tra due singolarità successive (le singolarità delle funzioni sono  $-m+3km$  per  $A$  e  $T$ ,  $3km$  per  $1/A$  e  $1/S$ ,  $m+3km$  per  $1/T$  e  $S$ , con  $k$  intero qualsiasi). Il fatto che  $S$  e  $\frac{1}{S}$  siano continue nei punti in cui  $A$  e  $T$  divergono, e valgano ivi  $-1$ , è di immediata verifica: dalla definizione data si vede infatti che  $S$  e  $\frac{1}{S}$  sono rispettivamente la tangente e la cotangente dell'angolo  $\phi$  mostrato in Fig. 1.

La cosa che attira subito l'attenzione è l'apparente identità delle sei curve rappresentative mostrate in Fig. 2, a meno di traslazioni o cambiamenti di segno. In realtà questo fatto esprime una proprietà caratteristica delle FTG di ordine 3, che è tipica solo di quest'ordine: e cioè che le sei funzioni  $A, T, -S, 1/A, 1/T, -1/S$  si trasformano l'una nell'altra sotto un'opportuna traslazione, o per cambiamento di segno della variabile, o per entrambe le cose. (Per gli altri ordini, attraverso la (6) e le formule analoghe, le funzioni sono riconducibili in tal modo l'una all'altra soltanto a coppie). Valgono cioè le formule collegative che permettono di esprimere in modo immediato, p.es., l'effetto che produce sulle funzioni il cambiamento di segno della variabile  $x$ :

$$A(-x) = -S(x) \quad (12)$$

$$T(-x) = 1/T(x) \quad (13)$$

combinando la (12) e la (13) con la (6) e con le formule da essa derivate si arriva alla seguente tabella I, che permette di passare da una ad un'altra qualsiasi delle sei funzioni in questione:

---

10) Anche in questo paragrafo verrà sistematicamente soppresso l'indice 3 che designa l'ordine delle funzioni.

	A	T	-S	1/A	1/T	-1/S
$A(x) =$	$x$	$m-x$	$-x$	$2m-x$	$x-m$	$x+m$
$T(x) =$	$m-x$	$x$	$x-m$	$x+m$	$-x$	$2m-x$
$-S(x) =$	$-x$	$m+x$	$x$	$x-m$	$2m-x$	$m-x$
$1/A(x) =$	$2m-x$	$x-m$	$x+m$	$x$	$m-x$	$-x$
$1/T(x) =$	$m+x$	$-x$	$2m-x$	$m-x$	$-x$	$x-m$
$-1/S(x) =$	$x-m$	$2m-x$	$m-x$	$-x$	$x+m$	$x$

TABELLA I

Nella compilazione della Tabella si è talvolta tenuto conto della periodicità  $3m$  di tutte le funzioni, p.es. sostituendo  $x+m$  a  $x-2m$ . L'esistenza delle formule collegative è sostanzialmente dovuta al fatto che (a parte il segno) la derivata di ciascuna delle sei funzioni in questione è data dal quadrato di un'altra. Infatti, alle (4) che ora si scrivono (indicando la derivata con un apice):

$$\begin{aligned} A' &= T^2 \\ T' &= -A^2 \end{aligned} \quad (14)$$

si aggiungono le (10)

$$\begin{aligned} S' &= \left(\frac{1}{T}\right)^2 \\ \left(\frac{1}{S}\right)' &= -\left(\frac{1}{A}\right)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

e le seguenti due formule, immediatamente deducibili

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{T}\right)' &= S^2 \\ \left(\frac{1}{A}\right)' &= -\left(\frac{1}{S}\right)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

Dato che l'esponente a secondo membro delle (10) è fisso, è evidente che questa proprietà si può verificare solo per l'ordine 3.

La dimostrazione delle (12) e (13) può essere fatta a partire da quanto



è stato sinora acquisito <sup>11)</sup>. Sfruttando le formule

$$A = (1-T^3)^{1/3} \quad T = (1+S^3)^{-1/3} \quad (17)$$

si possono trovare le derivate delle funzioni inverse di A e S che verranno impropriamente denominate arcA, arcS:

$$\frac{d}{dx} \text{arcA}(x) = (1-x^3)^{-2/3} \quad \frac{d}{dx} \text{arcS}(x) = (1+x^3)^{-2/3} \quad (18)$$

Consideriamo ora la funzione  $\text{arcA}[-S(x)]$ , la cui derivata, applicando la legge della derivazione delle funzioni composte, risulta (cfr. eq.(17))

$$\frac{d}{dx} \text{arcA}[-S(x)] = (1+S^3)^{-2/3} \left[ -\frac{1}{T^2} \right] = -1$$

da cui  $\text{arcA} [-S(x)] = -x + \text{cost.}$

e la costante si trova essere nulla ponendo  $x = 0$  e ricordando che  $\text{arcA}(0) = 0$ . <sup>12)</sup>

E' così dimostrata la (12). La (13) ed eventuali altre formule dello stesso tipo si possono dimostrare nello stesso modo.

Visto che la funzione  $1/A$  nel suo punto di singolarità  $x=0$  si comporta come  $1/x$  (v. lo sviluppo (11)), le formule collegative mostrano che tutte le sei funzioni considerate nei loro punti singolari hanno delle singolarità di primo ordine. Inoltre le (12) e le (13) permettono di ricostruire immediatamente da gli sviluppi (11) (con  $n=3$ ) gli sviluppi delle funzioni  $S(x)$  e  $1/T(x)$ . <sup>13)</sup>

---

11) E' possibile anche una dimostrazione che fa uso delle funzioni ellittiche (v. Parte II); ma essa risulta molto più complicata.

12) Lo stesso risultato si ottiene anche a partire dalla funzione  $\text{arcS}[-A(x)]$

13) Essendo i coefficienti degli sviluppi (11) a segno alternato, si vede che per  $n=3$  gli sviluppi di  $S(x) = -A(-x)$  e  $1/T(x) = T(-x)$  hanno gli stessi coefficienti, tutti con segno positivo; e, per quanto detto alla fine del §I.2, S e  $1/T$  si possono identificare con le funzioni iperboliche generalizzate (che indicheremo con i simboli  $A_h, T_h$ ). Questa relazione tra FTG e funzioni iperboliche può essere provata anche direttamente dalla definizione.

Mentre per le funzioni trigonometriche ordinarie le combinazioni (di tipo simmetrico o antisimmetrico)  $\sin x \cos x$ ,  $\sin x \pm \cos x$  sono riconducibili a  $\sin x$  e  $\cos x$  attraverso le formule di duplicazione e prostaferesi, per l'ordine 3 le corrispondenti funzioni di  $A$  e  $T$ , e cioè  $AT$ ,  $A \pm T$  hanno un andamento radicalmente diverso. Si tratta di funzioni che presentano una simmetria rispetto a  $\frac{m}{2}$ : i loro diagrammi sono riportati in Fig. 3. La funzione  $A+T$  è limitata tra zero e  $2^{2/3}$ , e nei punti  $-m+3km$  ove  $A$  e  $T$  divergono si annulla con uno zero doppio <sup>14)</sup>. Ma la proprietà più interessante delle combinazioni simmetriche  $AT, A+T$  è che le loro funzioni inverse (che verranno impropriamente denominate  $\text{arc}AT, \text{arc}(A+T)$ ) hanno per derivate delle espressioni che contengono radici quadrate anziché radici cubiche (come in (18)). Precisamente, sfruttando le relazioni

$$(T^3 - A^3)^2 = 1 - 4A^3 T^3 \quad (18')$$

$$(T-A)^2 = \frac{4 - (A+T)^3}{3(A+T)} \quad (18'')$$

(che discendono direttamente dalla  $T^3 + A^3 = 1$ ), si ottiene <sup>15)</sup>

$$\frac{d}{dx} \text{arc} AT(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{1-4x^3}} \quad (19)$$

$$\frac{d}{dx} \text{arc}(A+T)(x) = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x(4-x^3)}} \quad (20)$$

14) Se non si vuole ricorrere alle funzioni ellittiche, questo si può mostrare scrivendo  $A(x)+T(x) = T(x) [1+S(x)] = \frac{1}{A(m+x)} [1-T(m+x)]$  (v. Tabella I) Per  $x \rightarrow -m$ , ricordando gli sviluppi (11) si arriva subito al risultato.

15) Il doppio segno deriva dal fatto che, per ogni  $x$  appartenente all'intervallo di definizione delle funzioni  $\text{arc} AT(x)$  e  $\text{arc}(A+T)(x)$ , esistono due valori di tali funzioni compresi nell'intervallo di un periodo  $(-m, 2m)$ , e situati simmetricamente rispetto a  $\frac{m}{2}$ . Per determinare univocamente le funzioni, si deve specificare se i loro valori cadono in  $(-m, \frac{m}{2})$  [e in questo caso si deve prendere il segno + in (19) e (20)] , oppure in  $(\frac{m}{2}, 2m)$  [e in questo caso si deve prendere il segno -].

il che implica ovviamente le restrizioni  $x \leq 2^{-2/3}$  per  $\text{arcAT}(x)$  e  $0 \leq x \leq 2^{2/3}$  per  $\text{arc}(A+T)(x)$ , come del resto è evidente dai diagrammi di Fig. 3.

Le formule (19) e (20) mostrano in modo indiscutibile che le FTG di ordine 3 sono strettamente legate a un tipo particolare di funzioni ellittiche (cioè quelle le cui inverse sono connesse agli integrali dei secondi membri di (19) e (20)). L'argomento verrà ripreso e trattato a fondo nella Parte II.

Per concludere questa rapida rassegna delle proprietà più interessanti delle FTG di ordine 3 nel campo reale, si possono citare alcune proprietà relative agli integrali delle FTG e agli sviluppi in serie.

La somiglianza di comportamento tra FTG e funzioni trigonometriche dà luogo a una notevole flessibilità nell'integrazione delle combinazioni di tali funzioni. Di fatto, sono stati trovati gli integrali di numerosissime tali combinazioni (tra cui quasi tutti i monomi, inclusi quelli con esponenti negativi)<sup>16)</sup>, sfruttando anche relazioni di ricorrenza, ecc. Tali tabelle di integrali possono essere utilizzate per l'integrazione (per sostituzione) di svariate altre funzioni, p.es. contenenti radici cubiche. Per il suo carattere essenzialmente applicativo, e per la sua pesantezza, la trattazione dettagliata di tale argomento è rimandata ad una pubblicazione a parte.

Riportiamo qui l'espressione esplicita dei primi termini degli sviluppi in serie (11) di A e T:

$$A(x) = x - \frac{x^4}{6} + \frac{2x^7}{63} - \frac{13x^{10}}{2268} + \frac{23x^{13}}{22113} - \frac{2803x^{16}}{14859936} + \frac{21733x^{19}}{635262264} - \dots$$

$$T(x) = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{18} - \frac{23x^9}{2268} + \frac{25x^{12}}{13608} - \frac{619x^{15}}{1857492} + \frac{8083x^{18}}{133739424} - \dots$$

---

16) Si può anticipare che i soli monomi non integrabili in termini delle FTG e delle trascendenti elementari sono quelli che si riducono a una funzione ellittica  $\Phi u$  di Weierstrass o comunque si ricollegano all'integrale  $\int \Phi u du$ , che, come è noto, necessita l'introduzione di una nuova trascendente.

Come già detto, gli sviluppi di  $S(x)$  e  $1/T(x)$  si ottengono cambiando in segni tutti i segni delle precedenti formule.

Diamo pure uno sviluppo in serie per  $m$ , rapidamente convergente:

$$m = \sqrt{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{2^{2k} (6k+1)}$$

Come già detto, ulteriori dettagli su questi argomenti verranno forniti in una pubblicazione a parte.

## P A R T E II

### LE FTG COME FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA.

#### II.1 Definizione e prime proprietà.

E' evidente che, per estendere le FTG nel piano complesso, la definizione data nel § I.1 non è più applicabile. Pur tuttavia, discendendo da tale definizione le importanti proprietà differenziali espresse dal sistema (4), tale sistema può essere ora usato per la definizione delle funzioni. Quindi si assumono come  $A_n(x)$ ,  $T_n(x)$  le soluzioni del sistema: <sup>17)</sup>

$$\begin{aligned} A_n' &= T_n^{n-1} \\ T_n' &= -A_n^{n-1} \end{aligned} \tag{21}$$

con opportune condizioni al contorno, in modo tale da identificare (per quanto è possibile) sull'asse reale tali funzioni con quelle già incontrate nella Parte I.

---

17) Si suppone sempre che l'ordine  $n$  sia reale (anche se, in linea di principio, è possibile considerare il caso di  $n$  complesso).

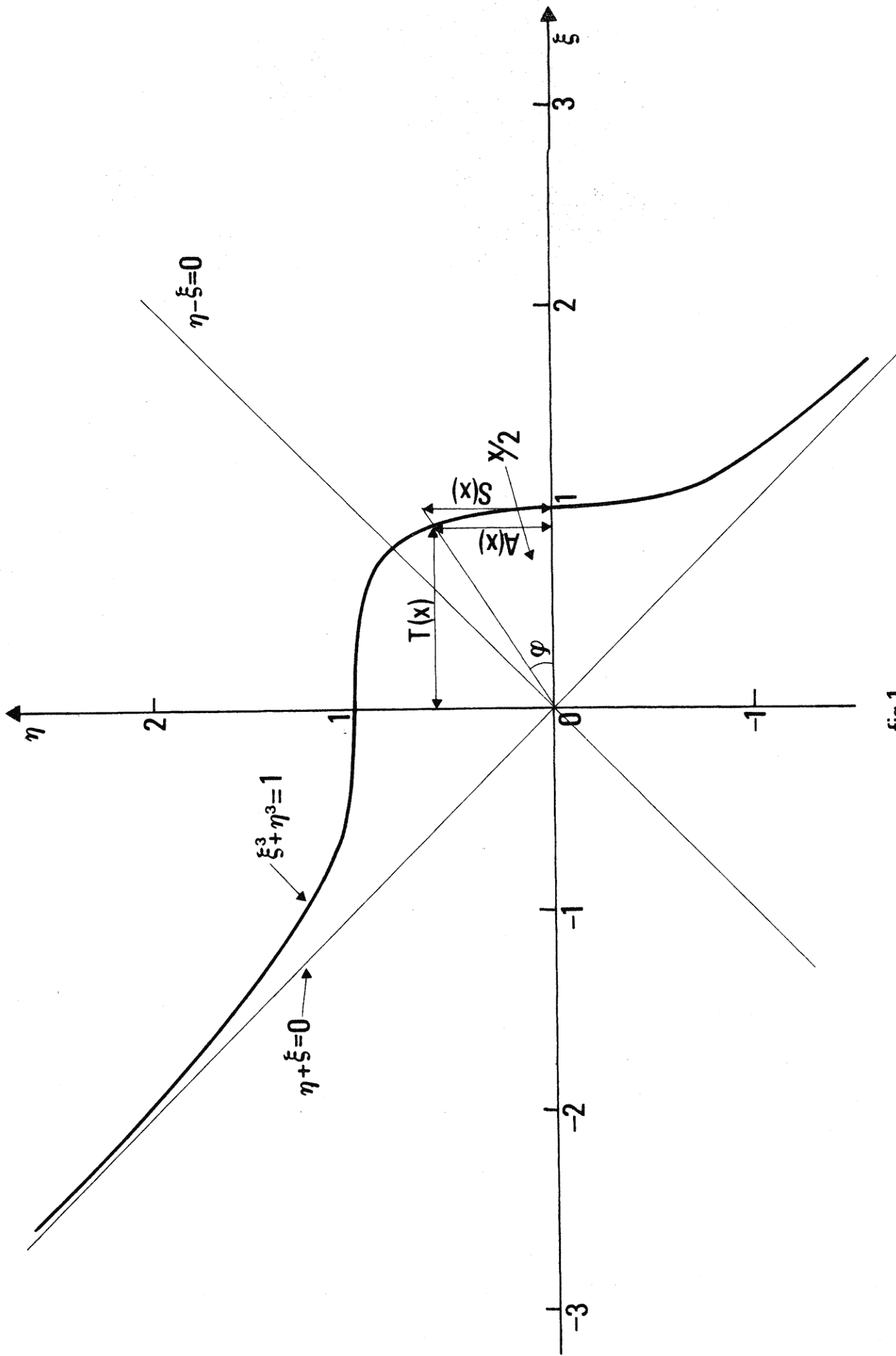


fig.1

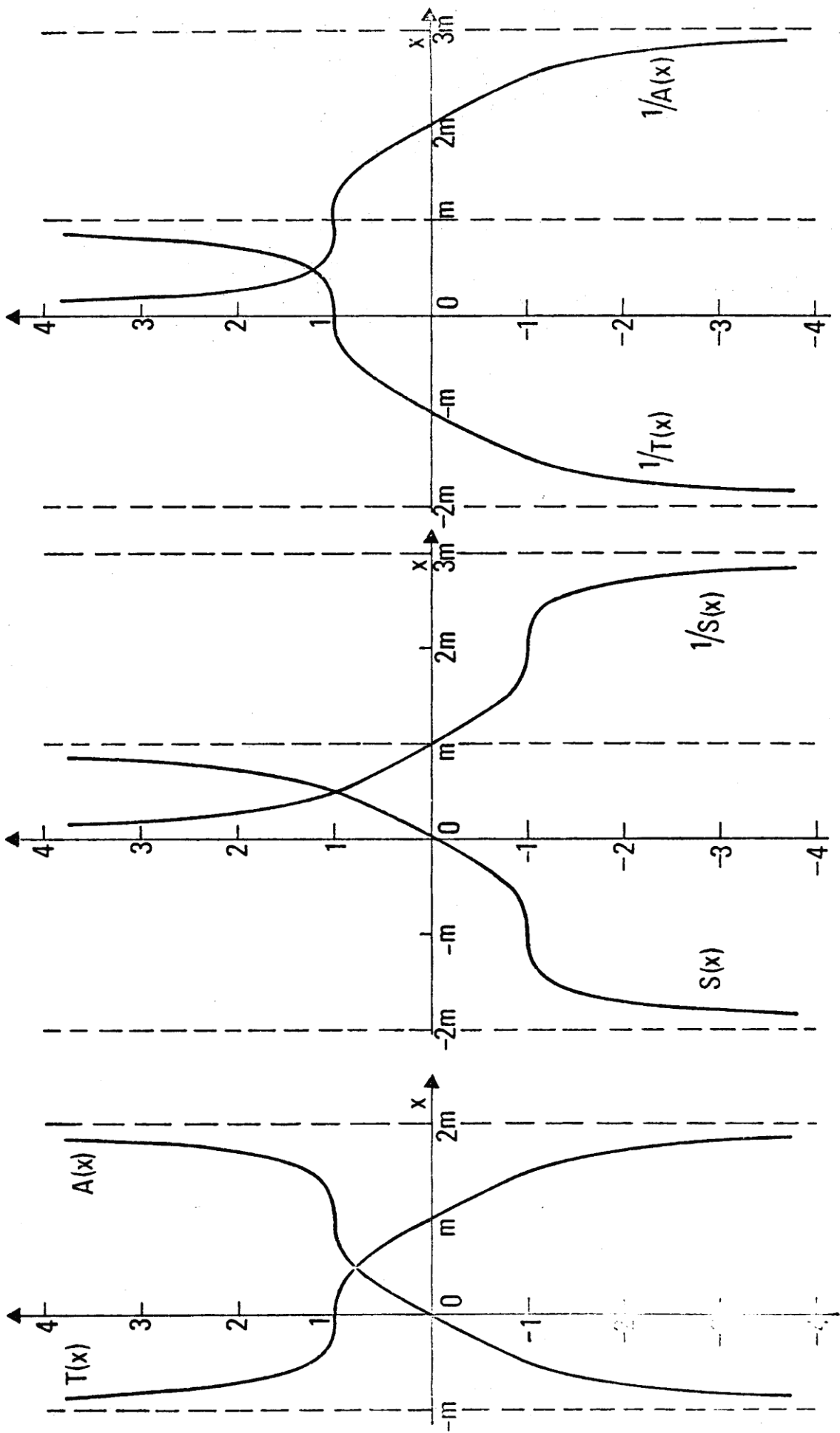


fig. 2

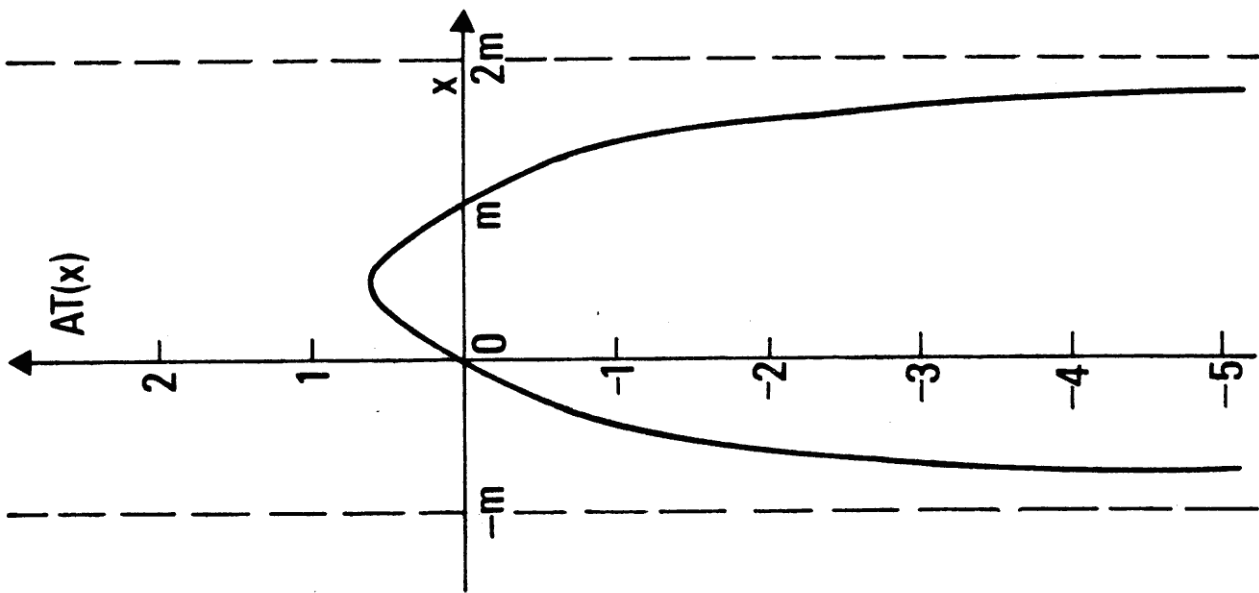
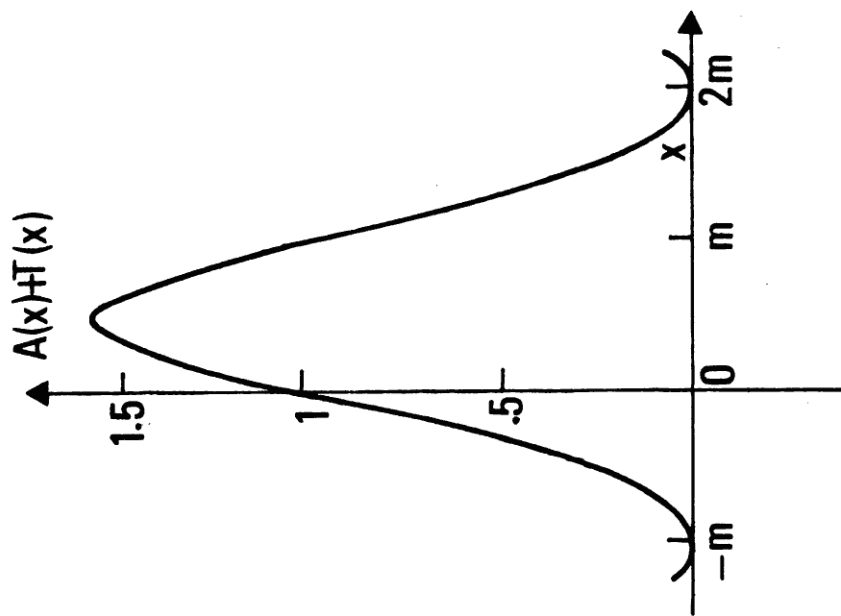
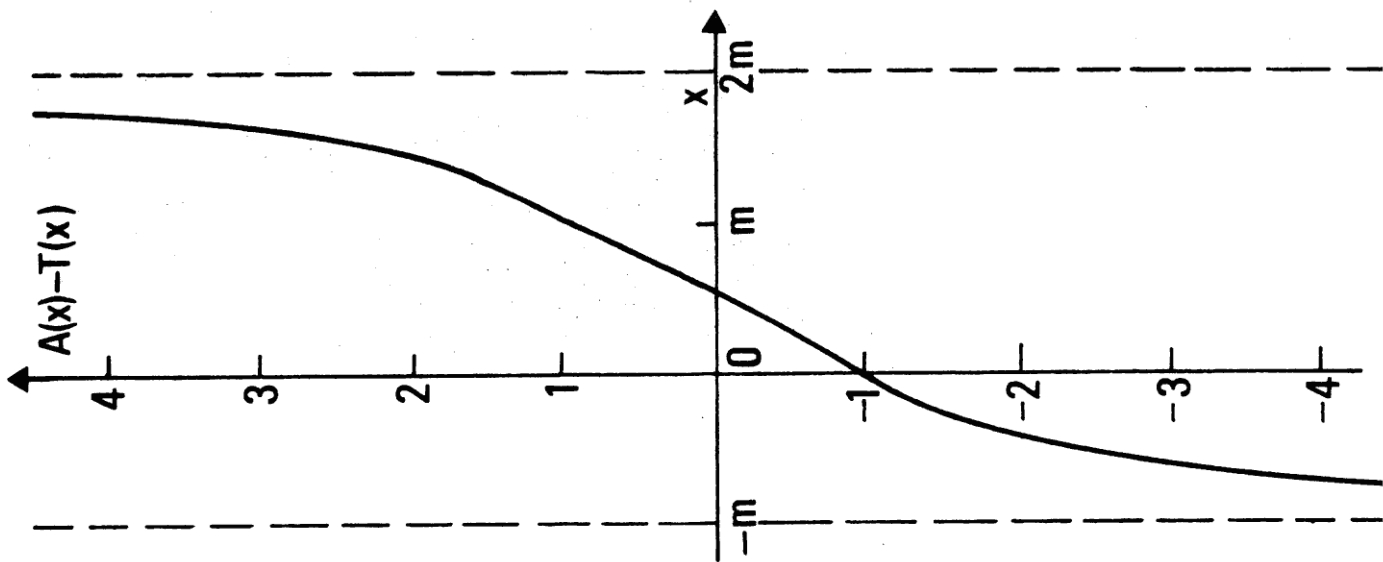


fig. 3

Come già detto, gli sviluppi di  $S(x)$  e  $1/T(x)$  si ottengono cambiando in segni tutti i segni delle precedenti formule.

Diamo pure uno sviluppo in serie per  $m$ , rapidamente convergente:

$$m = \sqrt{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{2^{2k} (6k+1)}$$

Come già detto, ulteriori dettagli su questi argomenti verranno forniti in una pubblicazione a parte.

## P A R T E      I I

### LE FTG COME FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA.

#### II.1 Definizione e prime proprietà.

E' evidente che, per estendere le FTG nel piano complesso, la definizione data nel § I.1 non è più applicabile. Pur tuttavia, discendendo da tale definizione le importanti proprietà differenziali espresse dal sistema (4), tale sistema può essere ora usato per la definizione delle funzioni. Quindi si assumono come  $A_n(x)$ ,  $T_n(x)$  le soluzioni del sistema: <sup>17)</sup>

$$\begin{aligned} A_n' &= T_n^{n-1} \\ T_n' &= -A_n^{n-1} \end{aligned} \tag{21}$$

con opportune condizioni al contorno, in modo tale da identificare (per quanto è possibile) sull'asse reale tali funzioni con quelle già incontrate nella Parte I.

---

17) Si suppone sempre che l'ordine  $n$  sia reale (anche se, in linea di principio, è possibile considerare il caso di  $n$  complesso).



Se  $n$  è intero (anche negativo) il sistema (21) non presenta difficoltà interpretative.

Se  $n$  non è intero, bisogna chiarire che cosa si intende per potenza  $n$ -esima delle funzioni.

Lasciando da parte questo punto per il momento, notiamo che, per  $n \neq 0$ , le (21) implicano una relazione del tipo (da ora in poi si eliminerà l'indice delle funzioni quando non è strettamente necessario)

$$A^n + T^n = \text{cost.} \quad (22)$$

Le FTG vengono definite imponendo uguale a 1 la costante che figura nella (22). Per  $n > 0$ , si può assumere quindi la condizione al contorno  $A(0) = 0, T(0) = 1$ . Per  $n < 0$  questa scelta non è più possibile, e bisogna farne un'altra. Una possibile condizione al contorno potrebbe essere  $A(0) = T(0) = 2^{-1/n}$  (reale  $> 1$ ): tuttavia in generale il problema degli  $n$  non interi positivi sembra avere un interesse limitato, e in questo lavoro verrà discusso solo marginalmente.

A questo punto è bene aggiungere che, cambiando il segno - in segno + nella seconda delle (21), si possono definire in modo del tutto analogo le funzioni iperboliche generalizzate (FIG)  $Ah_n, Th_n$ , attraverso il sistema

$$\begin{aligned} Ah' &= Th^{n-1} \\ Th' &= Ah^{n-1} \end{aligned} \quad (23)$$

L'analogia della (22) (per  $n \neq 0$ )<sup>18)</sup> è data da

---

18) Nel caso (sinora escluso) di  $n=0$ , la (22) e la (24) si sostituiscono con  $A_0 T_0 = \text{cost}, Ah_0/Th_0 = \text{cost}$ . Ponendo queste costanti uguali a 1, e assumendo le condizioni al contorno  $A_0(0) = T_0(0) = Ah_0(0) = Th_0(0) = 1$ , si trova  $A_0 = e^x, T_0 = e^{-x}, Ah_0 = Th_0 = \sqrt{2x+1}$ . E' questo l'unico caso (del resto, di scarso interesse) in cui le FTG e le FIG dello stesso ordine non sono riconducibili le une alle altre nel piano complesso (v. più avanti).

$$Th^n - Ah^n = \text{cost.} = 1 \quad (24)$$

Le condizioni al contorno per  $n > 0$  saranno le stesse che per  $A$  e  $T$   $n < 0$  andranno specificate in modo opportuno.

Come già menzionato, per  $n$  non intero è necessario specificare il significato delle elevazioni a potenza che figurano nelle formule (21) e (22). Per  $n$  positivo, si sceglie tale specificazione in modo che, nell'intervallo dell'asse reale  $0 < x < m$  (in cui sia  $A$  che  $T$  risultano reali e positivi), anche le loro elevazioni a potenza diano un risultato reale e positivo. Anche per  $n$  negativo, pur non essendo applicabile la definizione data nella Parte I, può essere utilizzato tale criterio in un opportuno intervallo dell'asse  $x$  intorno a  $x = 0$ .<sup>19)</sup>

I casi di  $n$  non intero positivo più interessanti sono chiaramente quelli di  $n$  razionale. In tali casi si può dimostrare che, conoscendo le funzioni  $A_n, T_n$  con  $n$  intero e positivo, è possibile determinare la soluzione del problema con  $n = p/q$  attraverso un processo di quadratura e di inversione. ( $p, q$  sono entrambi interi: si suppone  $p > 0$ , mentre  $q$  può essere anche negativo). Si ponga infatti

$$\begin{aligned} A_n(x) &= [A_p(\phi)]^q \\ T_n(x) &= [T_p(\phi)]^q \end{aligned} \quad (25)$$

Con le prescrizioni date precedentemente, la (22) è soddisfatta. Inserendo le espressioni (25) nel sistema (21) si ottiene

$$q [A_p(\phi) T_p(\phi)]^{q-1} d\phi = dx \quad (26)$$

---

19) Per le FIG con  $n > 0$ , il discorso si può ripetere esattamente. Per le FIG con  $n < 0$ , occorre specificare prima le condizioni al contorno compatibili con la (24).

La (26) si integra con la condizione al contorno  $\phi(x_0) = \phi_0$  (per  $q > 0$ ,  $x_0 = \phi_0 = 0$ ):

$$q \int_{\phi_0}^{\phi} [A_p(\phi') T_p(\phi')]^{q-1} d\phi' = x - x_0 \quad (27)$$

La (27) definisce una funzione  $x(\phi)$ , che può essere invertita in modo da ottenere la  $\phi(x)$ ; sostituendo quest'ultima espressione nella (25) si vede come, in linea di principio, la conoscenza delle FTG con  $n$  intero positivo permetta di risalire a tutte le FTG con  $n$  razionale (anche se in pratica il procedimento, e in particolare l'inversione della  $x(\phi)$ , possono creare difficoltà).<sup>20)</sup>

Come esempio, mostriamo un caso in cui l'applicazione del metodo è piuttosto diretta, corrispondente a  $n=-2$ ,  $p=2$ ,  $q=-1$ . Con le condizioni al contorno prima accennate ( $A_{-2}(0) = T_{-2}(0) = \sqrt{2}$ ) si ottiene

$$\begin{aligned} A_{-2}(x) &= \sqrt{\frac{2\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{4+x^2} + x}} \\ T_{-2}(x) & \end{aligned}$$

Le funzioni presentano due punti di diramazione in  $x = \pm 2i$  (ove esse si annullano), da cui si possono far partire due tagli che arrivano fino all'infinito lungo l'asse immaginario. Attraversando un taglio da sinistra a destra la funzione  $A_{-2}$  passa da un valore reale a uno immaginario puro. Le due funzioni vanno l'una nell'altra sotto lo scambio  $x \rightarrow -x$ .

Anche se l'inversione della (27) non è effettuabile in modo diretto, i punti di singolarità della funzione  $\phi(x)$  sono immediatamente determinati attraverso la condizione

---

20) E' chiaro che lo stesso procedimento è applicabile alle FIG con  $n$  razionale.

$$[A_p(\phi) T_p(\phi)]^{q-1} = 0 \quad (27')$$

Trovati i valori di  $\phi$  che soddisfano questa relazione, si inseriscono nella (27) e si trovano i corrispondenti valori di  $x$ . Per  $n$  positivo non intero ( $q > 1$ ) è confermato che il punto  $x=0$  è sempre un punto di singolarità per le FTG. Sono anche punti di singolarità di  $\phi(x)$  tutti gli  $x$  soddisfacenti la condizione  $\phi(x) = m_p$ ; inserendo questa equazione nelle (25), si vede subito che (sempre per  $n$  positivo) tale classe comprende certamente il punto  $x = m_n$  (oltre eventualmente ad altri), che quindi è, come già fatto notare nella Parte I, un punto di singolarità delle funzioni. Naturalmente in generale le singolarità di  $\phi(x)$  non sono le sole singolarità delle FTG di ordine non intero: ad esse vanno aggiunte le eventuali singolarità di  $A_p$  e  $T_p$ .

## II.2. Le singolarità delle FTG di ordine intero positivo.

Data la particolare importanza rivestita dalle funzioni con  $n$  intero e positivo, cerchiamo di ricavare delle indicazioni sulla natura delle loro singolarità; e, in particolare, vediamo di determinare come si comportano tali funzioni nelle vicinanze di quei punti (se ne esistono), che indicheremo con  $x_0$ , nei quali esse divergono con un andamento a potenza. Poiché chiaramente la (22) deve mantenersi valida come limite anche quando  $x \rightarrow x_0$ , ne segue che in tale limite entrambe le funzioni  $A$  e  $T$  de von o div er g e r e, e devono divergere nella stessa maniera. Più precisamente, se è verificata la relazione

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^p T(x) = K$$

ove  $p$  è un numero reale positivo e  $K$  una costante finita e non nulla, si deve anche avere

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^p A(x) = \eta K$$

ove  $\eta$  è una radice  $n$ -esima di  $-1$ . Se  $p$  è intero, le formule preceden

ti non presentano ambiguità. Se  $p$  non è intero (cioè se il punto  $x_0$  è un punto di diramazione) i limiti soprariportati hanno senso soltanto se si specifica la struttura dei tagli e i valori lungo di essi delle funzioni che vi figurano. Per quanto riguarda  $A$  e  $T$ , questo non è un problema: dagli esempi che verranno trattati in seguito si vedrà che la struttura dei tagli (la stessa per le due funzioni) e il valore di  $A$  e  $T$  lungo essi sono praticamente fissati dalle proprietà di simmetria che si vuole siano soddisfatte dalle FTG. Invece per  $(x-x_0)^p$  non c'è nessun criterio che possa fissare a priori quale valore debba assumere tale funzione nelle vicinanze degli stessi tagli: se p.es.  $p$  è della forma  $1/r$  (con  $r$  intero) per ogni singolarità  $x_0$  vi saranno  $r$  caratterizzazioni possibili di  $(x-x_0)^p$  e quindi  $r$  valori distinti di  $K$ , che vanno l'uno nell'altro per moltiplicazione per una radice  $r$ -esima dell'unità.

Con queste premesse, determiniamo i valori di  $p$  e  $K$ . Per  $x$  sufficientemente prossimo a  $x_0$ , nel sistema (21) si può sostituire  $T$  con  $K(x-x_0)^{-p}$  e  $A$  con  $\eta K(x-x_0)^{-p}$ , ottenendo per le quantità suddette le espressioni seguenti:

$$p = \frac{1}{n-2} \quad K = \left[ \frac{-\eta}{n-2} \right] \frac{1}{n-2} \quad (28)$$

Dalle (28) si apprende che, affinché le FTG di ordine intero positivo abbiano al finito delle singolarità di questo tipo, deve essere  $n > 2$ . Per le funzioni di ordine 3 ci si aspettano dei poli semplici, con residuo  $K$  per  $T$  ed  $\eta K$  per  $A$ ; per quelle di ordine 4 dei punti di diramazione di tipo radice quadrata, e così via. Si vede che per la seconda delle (28) i possibili valori di  $K$  sono  $n(n-2)$ : si hanno infatti  $n$  scelte distinte per  $\eta$ , e  $(n-2)$  modi di estrarre la radice  $(n-2)$ -esima nella seconda delle (28). Come detto in precedenza, per  $n > 3$  questi  $(n-2)$  valori di  $K$  sono tutti associabili alla stessa singolarità, mentre invece il valore di  $\eta$  (che non è arbitrario, in quanto corrisponde al valore

di  $S(x_0)$ ) può servire a "distinguere" tra le varie singolarità.

Lo stesso risultato, sostituendo  $n$  con  $e$ =radice  $n$ -esima di 1, e togliendo il segno meno nella seconda delle (28), si ha per le FIG. E' chiaro che il ragionamento fatto non garantisce che le singolarità trovate esistano effettivamente, e non esclude che vi siano singolarità di tipo diverso (divergenti a potenza con un valore minore di  $p$ , e sovrapposte alle singolarità dominanti; oppure punti di diramazione in cui le funzioni non divergono, situati in qualunque punto del piano complesso).

Nei casi di FTG esplicitamente studiati in questo lavoro ( $n=3,4,6$ ) si troveranno le singolarità dominanti di  $A$  e  $T$  previste dal ragionamento precedente, ma per  $n=6$  si troveranno anche alcune singolarità aggiuntive, dei tipi sopradescritti, sia in  $A$  e  $T$  che in  $S$  (funzione che, per  $n=4$ , non ha punti di diramazione, e invece li acquista per  $n=6$ ). Quanto ai valori possibili per  $n$ , si trova che nei casi studiati essi sono tutti presenti. Una conclusione generale valida per  $n$  qualsiasi sembra piuttosto difficile da raggiungere.

Pur con le opportune cautele nella definizione delle funzioni, è chiaro che il discorso precedente si può estendere anche ai valori di  $n$  non intero <sup>21),22)</sup>. Le FTG con  $n$  positivo  $< 2$ , che per il ragionamento visto non possono divergere al finito, devono allora divergere all'infinito, se non altro lungo un cammino particolare (per le funzioni con  $n$  razionale con numeratore e denominatore dispari, come mostrato nel § I.1, ciò avviene lungo l'asse reale). Lo stesso ragionamento può essere dunque ripetuto supponendo che per  $x \rightarrow \infty$  lungo una certa direzione la funzione  $T$  diverga come  $K x^p$ . Di nuovo si trova un risultato del tipo (28), con  $2-n$  al posto di  $n-2$ : tale risultato trova conferma immediata per le FTG

---

21) A questo proposito dovrebbe essere interessante lo studio delle funzioni di ordine  $\frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \dots$ , per cui ci si aspetta di trovare dei poli di ordine 2,3,4.....

22) Si noti che per  $n$  non intero si hanno altre singolarità non divergenti nei punti  $x=0, x=m$  e simili, come mostrato alla fine del precedente paragrafo.

con  $n=1$  (eq.(7)). Nel caso limite  $n=2$  la prima delle (28) mostra che le singolarità (ovunque esse siano) devono essere singolarità essenziali, con una divergenza più forte che qualsiasi andamento a potenza: il che è confermato dal noto andamento di  $\sin x, \cos x$  lungo l'asse immaginario.

Per  $n$  negativo il ragionamento precedente non si può estendere perché non è più vero che la divergenza di una funzione implica la divergenza dell'altra. Il procedimento può invece essere applicato agli zeri delle funzioni: imponendo che  $\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^{-p} T(x) = K$  (con  $p > 0$ ) si ottiene  $p = \frac{1}{2-n}$ , e di nuovo questo risultato trova riscontro nel caso precedentemente trattato delle funzioni di ordine  $-2$ , in cui gli unici zeri delle funzioni sono punti di diramazione di tipo radice quarta.

### II.3. Proprietà di simmetria delle FTG di ordine intero e positivo.

Per discutere questo argomento è necessario far notare preliminarmente che il sistema differenziale (21), quando  $n$  è intero e positivo, soddisfa, nelle vicinanze del "punto iniziale"  $x=0$ , la condizione di Lipschitz che garantisce l'unicità della soluzione. (Lo stesso discorso si può ripetere per il sistema (23) che definisce le FIG.) Quindi, se si trovano due soluzioni che soddisfano la (21) con la stessa condizione al contorno, le due soluzioni devono coincidere, cioè di fatto rappresentano la stessa coppia di funzioni.

Questo fatto può essere sfruttato per dimostrare un'importante proprietà di simmetria delle FTG (e delle FIG) con  $n$  intero positivo. Detto  $\epsilon = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$  ( $k=0,1,\dots,n-1$ ) una radice  $n$ -esima dell'unità, consideriamo le due funzioni  $\hat{A}(x) = \frac{1}{\epsilon} A(\epsilon x)$ , e  $\hat{T}(x) = T(\epsilon x)$ . È immediato verificare che tali funzioni verificano la (21), la (22) (con la costante uguale a 1), e la condizione al contorno  $\hat{A}(0) = 0$ ,  $\hat{T}(0) = 1$ . Per quanto detto, si potrà quindi identificare

$$\begin{aligned} A(\epsilon x) &= \epsilon A(x) \\ T(\epsilon x) &= T(x) \end{aligned} \tag{29}$$

Poiché nel piano complesso la moltiplicazione per  $e^{2\pi i \frac{k}{n}}$  equivale a una rotazione di un angolo di  $\frac{2\pi k}{n}$  del raggio vettore, si vede che le FTG (e analogamente le FIG), una volta conosciute nel settore del piano complesso delimitato dai raggi vettori corrispondenti agli argomenti  $\phi = 0$  e  $\phi = \frac{2\pi}{n}$ , si possono estendere, attraverso le (29), all'intero piano. In particolare, lungo tutti i raggi vettori determinati da  $\phi = \frac{2\pi k}{n}$  le funzioni replicano (a meno di una moltiplicazione di A per  $\epsilon$ .) i valori assunti sul semiasse reale positivo <sup>23)</sup>. Se n è pari, ne segue immediatamente che sull'asse reale A è dispari e T è pari (come risulta anche dalla definizione data nella Parte I). Se n è dispari, invece i valori sul semiasse reale negativo non sono semplicemente legati a quelli assunti nel semiasse reale positivo, e vengono replicati lungo i raggi vettori che bisecano i settori già considerati (determinati da  $\phi = \frac{\pi r}{n}$ , con r = intero dispari minore di 2n).

Un ragionamento analogo può essere utilizzato per trovare il legame più generale tra FTG e FIG. Chiamando  $\eta$  una radice n-esima di -1 ( $\eta = e^{\frac{i\pi(2k+1)}{n}}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ), e considerando le funzioni

$$\begin{aligned} A_h(x) &= \frac{1}{\eta} A(\eta x) \\ T_h(x) &= T(\eta x) \end{aligned} \tag{29'}$$

si vede subito che tali funzioni soddisfano il sistema (23), la relazione (24) e le condizioni al contorno  $A_h(0) = 0, T_h(0) = 1$ , e possono esse-

---

23) Questa conclusione non vale per i coefficienti K definiti dalla (28), e in particolare per i residui dei poli quando  $n=3$ , perché per tali quantità si ottiene una relazione diversa dalla (29).



re quindi identificate con le FIG. Poiché il rapporto tra due qualsiasi delle  $\eta$  è sempre una delle  $\epsilon$  (radici  $n$ -esime dell'unità), le condizioni (29) mostrano che la scelta del valore di  $\eta$  è irrilevante: tutti i valori conducono alle stesse funzioni. Si può quindi scegliere sempre  $\eta = -1$  per  $n$  dispari,  $\eta = i$  per  $n$  pari della forma  $4k+2$  (per  $n = 4k$  non c'è nessun valore di  $\eta$  che si raccomandi particolarmente), ottenendo:

$$\begin{aligned} Ah(x) &= -i A(ix) & Ah(x) &= -A(-x) \\ Ah(x) &= T(ix) & Th(x) &= T(-x) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} (n \text{ pari}=4k+2) \\ (n \text{ dispari}) \end{array} \quad (30)$$

Le prime due equazioni (30) riproducono per  $n = 2$  il noto legame tra funzioni trigonometriche e iperboliche, mentre le ultime due equazioni (30) nel caso  $n=3$  forniscono il risultato già citato nel § I.3 (nota <sup>13</sup>).

Un'ultima considerazione da fare, suggerita dal trattamento svolto nel campo reale, riguarda l'ipotesi che certe FTG siano periodiche lungo l'asse reale con periodo  $P$ . Il ragionamento precedente mostra che le funzioni  $A(x+P), T(x+P)$ , soddisfacendo il sistema (21) con le stesse condizioni al contorno, si possono identificare con  $A(x)$  e  $T(x)$ ; ossia  $P$  è un effettivo periodo delle funzioni. C'è ora da chiedersi come l'esistenza di un periodo reale  $P$  sia conciliabile con le relazioni (29): escludendo i casi banali  $n=1$  e  $n=2$ , per cui la (29) non è significativa, si vede che una funzione periodica soddisfacente le condizioni (29) deve necessariamente avere nel piano complesso una simmetria del tipo di quella di un pavimento piastrellato con poligoni regolari, in numero di  $n$  intorno ad ogni vertice (per brevità, tale tipo di simmetria verrà chiamato "simmetria pavimentale"). È evidente che tale simmetria può essere ottenuta solo per  $n = 3, 4$  e  $6$  (corrispondentemente a una pavimentazione con esagoni regolari, quadrati e triangoli equilateri): solo in questi casi sarà possibile rappresentare in un solo

foglio del piano complesso le funzioni e le loro singolarità in modo da avere la periodicità e le relazioni (29) soddisfatte. Ma in tale caso le funzioni avranno certamente anche un secondo periodo non reale: quindi si tratterà di funzioni ellittiche (anzi, di funzioni ellittiche di tipo particolare, soddisfacenti le relazioni (29)).

Per gli altri valori di  $n$ , la periodicità e la simmetria per rotazione non sono compatibili tra loro su un solo foglio del piano complesso, e potranno essere mantenute simultaneamente solo sulla superficie di Riemann delle funzioni, certamente a più fogli e di struttura complicata. Infatti è da ricordare che, come visto nel paragrafo precedente, le funzioni di ordine  $> 3$  hanno dei punti di diramazione di molteplicità sempre più alta al crescere di  $n$ . E' chiaro che in tali casi, se si impone p.es. la condizione (29) con un'opportuna struttura dei tagli sul primo foglio della superficie di Riemann, nell'imporre la periodicità in un punto qualsiasi si verrà ad incontrare uno di tali tagli e si dovrà quindi necessariamente passare su di un altro foglio. Lo studio di tali funzioni diviene quindi notevolmente complicato, e presenta anche parecchie varianti: un'idea della complessità del problema può essere data dalle poche considerazioni di tipo introduttivo che verranno svolte nel § II.8 a proposito delle funzioni di ordine 5. Si potrebbe obiettare che anche le funzioni di ordine 4 e 6 presentano un'infinità di punti di diramazione, e quindi una superficie di Riemann complicata; tuttavia in tali casi è possibile scegliere i tagli nel primo foglio della superficie di Riemann in modo da mantenere ivi sia la periodicità che le relazioni (29); e in ogni caso l'espressione esplicita di tali funzioni in termini di funzioni ellittiche, che verrà data nel prosieguo di questo lavoro, è sufficiente a risolvere com-

pletamente tutti i problemi al proposito.<sup>24),25)</sup>

#### II.4 Le FTG di ordine 3.

A questo punto conviene abbandonare la trattazione delle proprietà generali delle FTG per studiare in dettaglio i casi particolari di maggior interesse, che, come già detto, corrispondono a  $n = 3, 4$  e  $6$ , per cui le FTG risultano legate a particolari tipi di funzioni ellittiche. Cominciamo a trattare il caso  $n=3$ , per cui è già stato fatto nel § I.3 uno studio delle proprietà sull'asse reale.

Le proprietà principali delle funzioni ellittiche (sia nella versione delle funzioni di Weierstrass che di quelle di Jacobi) si suppongono note: il lettore le troverà comunque esaurientemente descritte nel già menzionato libro di F. TRICOMI, Funzioni ellittiche, Ed. Zanichelli (1951).

- 
- 24) Un'obiezione analoga, a livello elementare, potrebbe essere fatta per la funzione  $\sqrt{\sin x}$  che pure presenta un'infinità di punti di diramazione in  $x = n\pi$ ; tuttavia, scegliendo i tagli p.es. dal punto  $(2n-1)\pi$  al punto  $2n\pi$  (per ogni  $n$ ), si può mantenere una struttura periodica della funzione su tutto il primo foglio della superficie di Riemann.
- 25) Si può mostrare che solo per  $n = 3, 4$  e  $6$  si può avere la periodicità  $P$  e le relazioni (29) sullo stesso foglio del piano complesso anche notando che, in conseguenza di ciò, qualunque valore  $\alpha P$ , ove  $\alpha$  è un'arbitraria combinazione lineare a coefficienti interi delle radici  $n$ -esime dell'unità, è un periodo delle funzioni (questo si dimostra con applicazioni ripetute delle proprietà postulate). Ma è noto (v. libro di F. TRICOMI, Funzioni ellittiche, Zanichelli (1951)) che una funzione su un piano non può avere più di due periodi indipendenti. Per  $n = 3, 4, 6$  si può controllare che qualunque scelta di  $\alpha$  può essere ricondotta ad un'espressione del tipo  $\alpha = p+q e^{i \frac{2\pi}{n}}$  ( $p, q$  interi) mentre ciò non è più vero per gli altri valori di  $n$ . Quindi le FTG con  $n=3, 4, 6$  sono effettive funzioni a due periodi, e possono essere definite su un piano, mentre per gli altri valori di  $n$  si avrebbe un numero maggiore di periodi indipendenti, richiedente una definizione su una superficie di Riemann a più fogli.

In questo lavoro verrà sistematicamente impiegata, in riferimento alle funzioni ellittiche, la notazione usata in detto libro.

Poiché le FTG di ordine 3 sono convenientemente espresse dalle funzioni di Weinstrass  $\wp_u$ ,<sup>26)</sup> è bene richiamare alcune formule-base relative alla  $\wp_u$ , soprattutto per comodità d'uso nei passaggi che si incontreranno più avanti. Una funzione ellittica di Weierstrass è una funzione doppiamente periodica, che presenta dei poli di 2° ordine in tutti i vertici di un opportuno reticolo di parallelogrammi, includente il punto  $u=0$ . La funzione  $\wp_u$  è univocamente determinata una volta specificati due parametri  $g_2$  e  $g_3$  (detti "invarianti"), che figurano nella relazione che connette il valore della funzione a quello della sua derivata  $\wp'_u$  :

$$\wp'_u{}^2 = 4\wp_u^3 - g_2\wp_u - g_3 \quad (31)$$

Se si vogliono specificare esplicitamente nella  $\wp_u$  i valori degli invarianti, si scriverà  $\wp(u|g_2, g_3)$ .

Un'altra formula fondamentale è la relazione di omogeneità, che di fatto riduce a uno solo il parametro addizionale da cui dipende la  $\wp_u$ :

$$t^2\wp(tu|t^{-4}g_2, t^{-6}g_3) = \wp(u|g_2, g_3) \quad (32)$$

La  $\wp_u$  è una funzione pari, mentre la  $\wp'_u$  è una funzione dispari. Seguendo TRICOMI, i periodi primitivi della  $\wp_u$  (cioè quelli di minore modulo) saranno indicati con  $2\omega_1$  e  $2\omega_3$ , mentre si utilizzerà il simbolo  $\omega_2$  per la loro semisomma  $\omega_1 + \omega_3$ . (Chiaramente tali grandezze sono funzioni di  $g_2$  e  $g_3$ ). Il valore  $\wp_{\omega_i}$  è chiamato  $e_i$  ( $i=1,2,3$ ): in tali punti  $\wp'_u$  si annulla, così che la (31) può anche essere scritta:

---

26) Secondo la notazione corrente, l'argomento delle funzioni di Weierstrass è indicato con una delle lettere  $u, v, w, \dots$

$$\wp'^2 u = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)$$

e la determinazione di  $e_1, e_2, e_3$  (detti anche "invarianti irrazionali") a partire da  $g_2$  e  $g_3$  è ricondotta alla soluzione dell'equazione di terzo grado  $4y^3 - g_2 y - g_3 = 0$ . Tale equazione, se  $g_2$  e  $g_3$  sono reali (e questa è l'unica situazione che verrà presa in considerazione in questo lavoro), può avere tre soluzioni reali (quando il discriminante  $\Delta = g_2^2 - g_3^3/27$  è  $< 0$ ) o una soluzione reale (sempre  $e_2$ ) e due complesse coniugate (quando  $\Delta > 0$ )<sup>27)</sup>. Come vedremo più avanti, a questi due tipi di funzioni saranno legati diversi tipi di FTG.

E' utile ricordare che la funzione  $\wp u - e_i$  presenta, in  $u = \omega_i$ , uno zero doppio.

Dalla (31) si vede immediatamente che la derivata della funzione inversa della  $\wp u, \wp^{-1} u$  (che è una funzione a due valori in ogni campo fondamentale)<sup>28)</sup>, è data da

$$\frac{d}{du} \wp^{-1} u = \pm \frac{1}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}} \quad (33)$$

Il confronto della (33) con la (19) mostra immediatamente che la funzione  $-AT(-x)$  si può identificare con  $\wp(u | 0, -1)$ , in cui  $u$  è un'opportuna funzione lineare di  $x$  (che determineremo). Ma ancora più interessante è il confronto della (33) con una formula simile alla (20)

27) Il segno del discriminante qui definito è opposto a quello dato nel TRICOMI. Come è mostrato in tale testo, i casi in cui si ha  $\Delta=0$  corrispondono a "funzioni ellittiche degeneri" costruite (quando  $g_2, g_3$  non sono nulli) attraverso funzioni trigonometriche o iperboliche: inoltre si ha  $\wp(u | 0, 0) = 1/u^2$ .

28) Seguendo TRICOMI, verrà chiamato campo fondamentale della  $\wp u$  un parallelogramma che ha per lati due periodi primitivi, o una zona del piano complesso ad esso equivalente (per la definizione precisa, si veda il testo citato).

riguardante la funzione inversa di  $1/(A+T)$ :

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \frac{1}{A+T}(x) = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4x^3-1}} \quad (34)$$

In tal caso la funzione  $\frac{1}{A+T}(x)$  si può identificare con  $\mathcal{P}(u|0,1)$ , in cui di nuovo  $\underline{u}$  è un'opportuna funzione lineare di  $x$ .

E' da notare che, attraverso la formula di omogeneità (32), le due funzioni  $\mathcal{P}(u|0,1)$  e  $\mathcal{P}(u|0,-1)$  sono riconducibili alla stessa funzione, previa una rotazione di  $90^\circ$  nel piano complesso e un cambiamento di segno:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(u|0,1) &= -\mathcal{P}(iu|0,-1) \\ \mathcal{P}(u|0,-1) &= -\mathcal{P}(iu|0,1) \end{aligned} \quad (35)$$

La funzione ellittica legata alle FTG di ordine 3 è dunque quella di tipo equianarmonico, caratterizzata da  $g_2 = 0$ ; per la relazione di omogeneità (32) i valori di  $g_3$  sono tutti equivalenti, e verrà quindi generalmente considerato il caso  $g_3 = 1$  (anche se, occasionalmente, ci si riferirà al caso con  $g_3 = -1$ ).

Nell'indicazione degli invarianti della  $\mathcal{P}u$ , in questo paragrafo da ora in poi  $g_2$  verrà omissso.

La Fig. 4 mostra una rappresentazione della  $\mathcal{P}(u|1)$  e della sua derivata  $\mathcal{P}'(u|1)$  nel piano complesso, ottenuta indicando il valore della funzione solo in alcuni punti significativi, di maggior interesse per lo studio delle FTG, ma che tuttavia permettono di farsi un'idea dell'andamento generale delle funzioni. La  $\mathcal{P}(u|1)$  è una funzione ellittica con  $\Delta > 0$ , e i valori di  $e_1, e_2, e_3$  sono dati da  $2^{-2/3}$  moltiplicato per le radici cubiche dell'unità. Anche i periodi primitivi sono complessi coniugati, e un campo fondamentale è un rombo ottenuto dalla sovrapposizione di due triangoli equilateri (in Fig. 4 i campi fondamentali sono delimita-

ti da linee più marcate). Dalla stessa figura si può constatare che il periodo immaginario (non primitivo) della  $\wp(u|1)$  è maggiore in modulo per un fattore  $\sqrt{3}$  del periodo reale (anch'esso non primitivo). Inoltre la  $\wp(u|1)$  e la  $\wp'(u|1)$  godono di una proprietà analoga a quella espressa dalle relazioni (29) per le funzioni A e T (con  $e = \text{radice cubica dell'unità}$ ):

$$\begin{aligned}\wp(eu) &= e\wp u \\ \wp'(eu) &= \wp' u\end{aligned}\tag{36}$$

Per la connessione con le FTG è necessario vedere come si comporta la  $\wp u$  nei punti che dividono i periodi in tre parti: a questo scopo (anticipando quelle che saranno le conclusioni del ragionamento) indichiamo con  $3m$  il periodo immaginario e con  $3m/\sqrt{3} = \sqrt{3}m$  il periodo reale della  $\wp(u|1)$ . È immediato verificare che nei punti  $\frac{m}{\sqrt{3}}$  e  $\frac{2m}{\sqrt{3}}$   $\wp u$  vale 1 mentre  $\wp' u$  vale rispettivamente  $\mp\sqrt{3}$  e nei punti  $im$  e  $2im$   $\wp u$  vale zero (e  $\wp' u$  vale rispettivamente  $\mp i$ ). Il risultato si ottiene ricordando che i valori assunti dalla funzione studiata a  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{3}$  del periodo reale o immaginario devono essere uguali (per la simmetria rispetto al punto  $\omega_2$ ), e sfruttando la formula di duplicazione della  $\wp u$ , che per le  $\wp u$  equianarmoniche si scrive:

$$\wp(2u) = 9 \frac{\wp^4 u}{\wp'^2 u} - 2\wp u = \frac{\wp u (\wp^3 u + 2g_3)}{\wp'^2 u}\tag{37}$$

L'equazione  $\wp(2u) = \wp u$  ha come soluzione  $\wp u = 0$  e  $\wp u = g_3^{1/3}$  (3 valori).

Ricordando che la  $\wp(u|1)$  non si può annullare sull'asse reale (perché  $e_2 > 0$ ), mentre la  $\wp(u|-1)$  si deve annullare (perché  $e_2 > 0$ ), si arriva al risultato enunciato. (È chiaro che le altre due soluzioni complesse coniugate corrispondono ai punti che dividono in tre parti uguali i due periodi primitivi).

Nella Fig. 4 sono state riportate quindi le rette, parallele ai pe riodi primitivi, che dividono in tre parti uguali i periodi sull'asse reale e immaginario. Dalle proprietà descritte sopra è possibile determinare immediatamente il valore assunto dalla  $\Phi_u$  ( e dalla  $\Phi'_u$ ) in tutte le intersezioni di tali rette. Per la  $\Phi_u$  si vede che tali punti sono tutti e soli quelli in cui la funzione ha un polo, uno zero o vale una radice cubica dell'unità.

A questo punto si possono enunciare le formule che esprimono le FTG in termini di una delle  $\Phi_u$  equianarmoniche. Ci sono diversi modi di scrivere tali relazioni.

Come già detto, identificando la (33) con la (19) e sfruttando la pa rità della  $\Phi_u$  si ha:

$$\begin{aligned} AT(x) &= -\Phi(x+m|-1) = \Phi(i(x+m)|1) \\ A^3(x) - T^3(x) &= \Phi'(x+m|-1) = -i\Phi'(i(x+m)|1) \end{aligned} \quad (38)$$

La seconda delle (38) è stata ottenuta per derivazione. Ponendo  $x=0$  oppure  $x=m$  nelle (38) si vede che la costante  $m$  caratteristica delle FTG di ordine 3 si identifica con la terza parte del periodo reale della  $\Phi(u|-1)$  (o, equivalentemente, con la terza parte del modulo del periodo immaginario della  $\Phi(u|1)$ ).

Dalla seconda delle (38) si ricava immediatamente

$$\frac{A^3(x)}{T^3(x)} = \frac{1}{2} (1 + \Phi'(x+m|-1)) \quad (39)$$

Da questa formula si ottengono  $A$  e  $T$  estraendo la radice cubica. Non vi sono punti di diramazione, perché tutti gli zeri e i poli del secondo membro della (39) sono di terz'ordine. Tuttavia una formula contenente radici cubiche è poco pratica per le applicazioni. Conviene allora partire dalla (34), che, confrontata con la (33), fornisce immedia-



tamente

$$\frac{1}{A+T}(x) = \Phi \left( \frac{x+m}{\sqrt{3}} \mid 1 \right)$$

$$\sqrt{3} \frac{A-T}{A+T}(x) = \Phi' \left( \frac{x+m}{\sqrt{3}} \mid 1 \right)$$
(40)

La seconda di queste formule è stata ottenuta per derivazione. Combinando le (40), si ottiene  $[\underline{u}(x+m)/\sqrt{3}]$ :

$$\frac{A(x)}{T(x)} = \frac{1}{2\Phi(u \mid 1)} \left[ 1 \pm \frac{\Phi'(u \mid 1)}{\sqrt{3}} \right]$$
(41)

Le (41) sono formule particolarmente semplici, che permettono, sulla base dei risultati esposti in precedenza relativamente al comportamento della  $\Phi(u \mid 1)$ , di determinare immediatamente i valori delle FTG in tutti i punti del reticolo triangolare mostrato in Fig.4. Il risultato è riportato in Fig. 5. Si noti l'interessante simmetria pavimentale presentata da tutte le funzioni: se si fa corrispondere al piano complesso un pavimento piastrellato con esagoni regolari di tre colori diversi che non si tocchino (la cui distanza tra i centri corrisponde a  $\frac{1}{3}$  del periodo delle funzioni), i centri delle piastrelle dello stesso colore si identificheranno rispettivamente con gli zeri delle funzioni, i loro poli (semplici) e i punti in cui le funzioni valgono una radice cubica dell'unità. Si noti anche che la simmetria pavimentale delle funzioni di Fig. 5 non è la replica della simmetria dello stesso tipo suggerito dalle formule (36), e che si manifesta nei diagrammi di Fig. 4; infatti quest'ultimo caso, nell'immagine descritta qui sopra, corrisponde ad un pavimento di esagoni di dimensioni tre volte più grandi e, per così dire, dello stesso colore (cioè, centrati tutti nei poli delle funzioni). Le funzioni sono reali lungo le rette indicate con R in Fig. 5, e su tutte le rette ad esse parallele e passanti per i punti ove si ha il valore

1 (-1 per S).

Dalle formule (41) si possono nuovamente ottenere tutte le proprietà caratteristiche delle FTG di ordine 3: è immediato verificare la relazione  $A^3 + T^3 = 1$ , e il sistema differenziale (14). Anche le formule collegative possono essere dedotte dalle (41), ma in maniera tutt'altro che immediata: si deve sfruttare la formula di addizione della  $\Phi_u$ , che vale per qualunque scelta di  $g_2$  e  $g_3$ :

$$\Phi(u+v) = \frac{1}{4} \left( \frac{\Phi'u - \Phi'v}{\Phi_u - \Phi_v} \right)^2 - \Phi_u - \Phi_v \quad (42)$$

Ponendo (come prima)  $u = (x+m/\sqrt{3})$  e  $v = -2m/\sqrt{3}$ , e sfruttando la parità delle funzioni  $\Phi$  e  $\Phi'$ , si ottiene (è sottinteso che si prende il caso  $g_3 = 1$ ).

$$\frac{A(-x)}{T(-x)} = \frac{1}{2\Phi(u+v)} \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \Phi'(u+v) \right] \quad (43)$$

Dalla (42), inserendo esplicitamente i valori di  $\Phi_v$  e  $\Phi'v$ , e svolgendo alcuni passaggi, si può ottenere la seguente espressione:

$$\Phi(u+v) = \frac{2\Phi^2 u + 2\Phi u - 1 + \sqrt{3} \Phi' u}{2(\Phi u - 1)^2}$$

da cui, derivando rispetto a  $u$

$$\Phi'(u+v) = - \frac{3\Phi u \Phi' u + \sqrt{3}(\Phi^3 u + 3\Phi^2 u - 1)}{(\Phi u - 1)^3}$$

L'inserzione delle formule precedenti nelle (43) riproduce, dopo calcoli piuttosto macchinosi, le relazioni (12) e (13) [in cui ovviamente  $A(x)$  e  $T(x)$  sono espressi mediante le (41)].

Una volta stabilite le formule collegative, esse possono venire usate per effettuare opportune traslazioni sulla variabile  $x$  nelle equazioni da (39) a (41), in modo da ottenere altri interessanti modi di legare le FTG di ordine 3 alle  $\Phi_u$  equianarmoniche. Si ottengono p.es. le seguenti

relazioni:

$$\frac{T}{A^2}(x) = \Phi(x|-1); -\frac{T^3(x)+1}{A^3(x)} = \Phi'(x|-1) \quad (44)$$

$$\frac{A}{T^2}(x) = \Phi(x+2m|-1); \frac{A^3(x)+1}{T^3(x)} = \Phi'(x+2m|-1) \quad (45)$$

$$\frac{A}{1-T}(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{3}}|1\right); \sqrt{3} \frac{T(x)+1}{T(x)-1} = \Phi'\left(\frac{x}{\sqrt{3}}|1\right) \quad (46)$$

$$\frac{T}{1-A}(x) = \Phi\left(\frac{x+2m}{\sqrt{3}}|1\right); -\sqrt{3} \frac{A(x)+1}{A(x)-1} = \Phi'\left(\frac{x+2m}{\sqrt{3}}|1\right) \quad (47)$$

Le formule precedenti possono essere utilizzate per ricavare la so la proprietà importante delle FTG di ordine 3 che non è stato pos sibile ottenere direttamente dallo studio delle funzioni sull'asse rea le, senza far ricorso alle funzioni ellittiche: e cioè il teorema di ad dizione. Calcolando la prima delle (44) nel punto  $x+y$ , applicando il teorema di addizione (42) della  $\Phi_u$  e riinserendo al posto di  $\Phi$  e  $\Phi'$  le espressioni in termini di  $A$  e  $T$  date dalla stessa (44), si ar- riva dopo alcuni passaggi alla seguente relazione:

$$\frac{T(x+y)}{A^2(x+y)} = \frac{[A(y)T(y) - A(x)T(x)][T^2(x)A(y) - T^2(y)A(x)]}{[T(x)A^2(y) - T(y)A^2(x)]^2} \quad (48)$$

Ripetendo lo stesso ragionamento a partire dalla (45) [in questo caso il teorema di addizione (42) si applica spezzando  $x+y+2m$  in  $(x+m)+(y+m)$ , e per riesprimere  $\Phi$  e  $\Phi'$  in termini di  $A$  e  $T$  si usano le(38)], si giunge alla relazione:

$$\frac{A(x+y)}{T^2(x+y)} = \frac{[T(x)A^2(y) - T(y)A^2(x)][T^2(x)A(y) - T^2(y)A(x)]}{[A(y)T(y) - A(x)T(x)]^2} \quad (49)$$

da cui si deduce immediatamente

$$S(x+y) = \frac{T(x)A^2(y) - T(y)A^2(x)}{A(y)T(y) - A(x)T(x)} \quad (50)$$

e combinando questa formula separatamente con la (48) e la (49)

$$A(x+y) = \frac{T(x)A^2(y) - T(y)A^2(x)}{T^2(x)A(y) - T^2(y)A(x)} \quad (51)$$

$$T(x+y) = \frac{T(y)A(y) - T(x)A(x)}{T^2(x)A(y) - T^2(y)A(x)}$$

che si rivelano funzioni razionali di  $A$  e  $T$  di particolare semplicità ed eleganza.

Nel limite  $y \rightarrow x$  (applicando p.es. il teorema di De l'Hospital) si trovano le seguenti formule di duplicazione:

$$\begin{aligned} A(2x) &= \frac{A(1+T^3)}{T(1+A^3)} \\ T(2x) &= \frac{T^3 - A^3}{T(1+A^3)} \\ S(2x) &= \frac{A(1+T^3)}{T^3 - A^3} \end{aligned} \quad (52)$$

Quanto alle formule di sottrazione, esse si calcolano dalle (50) e (51) con la sostituzione  $y \rightarrow -y$ , e usando le formule collegative (12) e (13). Dopo un riarrangiamento dei termini, si ottiene

$$\begin{aligned} A(x-y) &= - \frac{T(x)A^2(y) - T(y)A^2(x)}{A(x) + A(y)T(y)T^2(x)} \\ T(x-y) &= \frac{A(y) + A(x)T(x)T^2(y)}{A(x) + A(y)T(y)T^2(x)} \end{aligned} \quad (53)$$

$$S(x-y) = - \frac{T(x)A^2(y) - T(y)A^2(x)}{A(y) + A(x)T(x)T^2(y)}$$

Il diverso aspetto delle (53) in confronto con le (50) e (51) (che mostra un comportamento non analogo a quello delle funzioni trigonometriche ordinarie) è dovuto al fatto che, per  $n$  dispari, le FTG non hanno parità definita.

Per quanto riguarda il problema delle formule di bisezione, una breve discussione sarà svolta più avanti.

Per concludere questo paragrafo, ci si può chiedere quale può essere l'utilità di presentare le funzioni ellittiche di tipo equianarmonico sotto la forma di FTG di ordine 3. I vantaggi di tale presentazione ci sembrano consistere soprattutto nei due aspetti seguenti: il primo è dato dalla maggior maneggevolezza delle FTG nelle procedure di integrazione per sostituzione, ecc., dovuto all'analogia di comportamento con le funzioni trigonometriche ordinarie; l'altro è il fatto che, usando le FTG, quando la variabile  $x$  è reale si rimane sempre strettamente nel campo reale, mentre con la  $\Phi_u$ , ogni volta che si vuole usare una delle numerose formule in cui intervengono gli invarianti  $e_1$  ed  $e_3$ , si deve necessariamente passare per il campo complesso. Tra queste è la formula di bisezione, che quindi non può essere usata proficuamente per ricavare una formula di bisezione per le FTG. L'Autore del presente studio è riuscito a trovare una formula di bisezione delle FTG di ordine 3 il cui calcolo, quando l'argomento è reale, eviti di passare attraverso il campo complesso: tuttavia, data la complicazione sia del procedimento che dell'espressione finale, tale risultato verrà presentato in una pubblicazione separata, in cui verrà anche data una formula di trisezione.

Come ultimo commento, l'uso diretto della  $\Phi_u$  è senz'altro di maggiore utilità quando si vogliono studiare le sue proprietà nelle vicinanze

dei suoi poli, mentre l'uso delle FTG sembra essere più appropriato per studiare la funzione lontano dai poli, in particolare nelle vicinanze dei punti che dividono i periodi in tre parti uguali.

Quanto alla valutazione dei valori numerici delle FTG nel piano com plesso, è chiaro che essi possono essere dedotti a partire dalle esisten ti tabulazioni della  $P(u|1)$ : tuttavia è agevolmente ottenibile anche una valutazione indipendente, che sfrutti gli sviluppi in serie di A, T, S nelle vicinanze di  $x = 0$  (molto ben convergenti), ed estenda i risultati ad altre regioni del piano complesso mediante le formule colle gative ed il teorema di addizione.

#### II.5 Le FTG di ordine 4.

Riportiamo qui le formule caratteristiche delle FTG di ordine 4.<sup>28)</sup>

$$A^4 + T^4 = 1 \quad (54)$$

$$A' = T^3 : T' = -A^3 \quad (55)$$

$$S' = 1/T^2 ; (1/S)' = -1/A^2 \quad (56)$$

da cui si possono immediatamente ricavare le formule di derivazione delle funzioni inverse:

$$-\frac{d}{dx} \operatorname{arc}T(x) = \frac{d}{dx} \operatorname{arc} A(x) = \frac{1}{(1-x^4)^{3/4}} \quad (57)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc}S(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \quad (58)$$

---

29) E' forse superfluo ricordare che anche in questo paragrafo verrà omezzo l'indice 4 che designa l'ordine delle funzioni: di conseguenza, i simboli A, T, S, m hanno un significato diverso da quello assunto nel precedente paragrafo.

E' proprio da quest'ultima formula che conviene prendere le mosse per trovare il collegamento tra le FTG di ordine 4 e le funzioni ellittiche. Si può anticipare a questo punto che entreranno in gioco le funzioni ellittiche  $\wp u$  che potremo chiamare "di tipo lemniscatico", con  $g_3 = 0$ .

E' bene quindi premettere un breve riepilogo delle proprietà principali di tali funzioni. Una funzione di Weierstrass con  $g_3 = 0$  (che da ora in poi sarà indicata con  $\wp(u|g_2)$ ) può essere, secondo il segno di  $g_2$ , o con  $\Delta < 0$  quando  $g_2$  è positivo (e in tal caso il periodo reale e quello immaginario, uguali in modulo, sono periodi primitivi) o con  $\Delta > 0$  quando  $g_2$  è negativo (e in tal caso il periodo reale e quello immaginario, uguali in modulo e non primitivi, sono  $\sqrt{2}$  volte più grandi dei periodi primitivi, disposti lungo le rette parallele alle bisettrici dei quadranti del piano complesso). Valgono infatti le seguenti relazioni, ricavate direttamente dalla condizione di omogeneità (32):

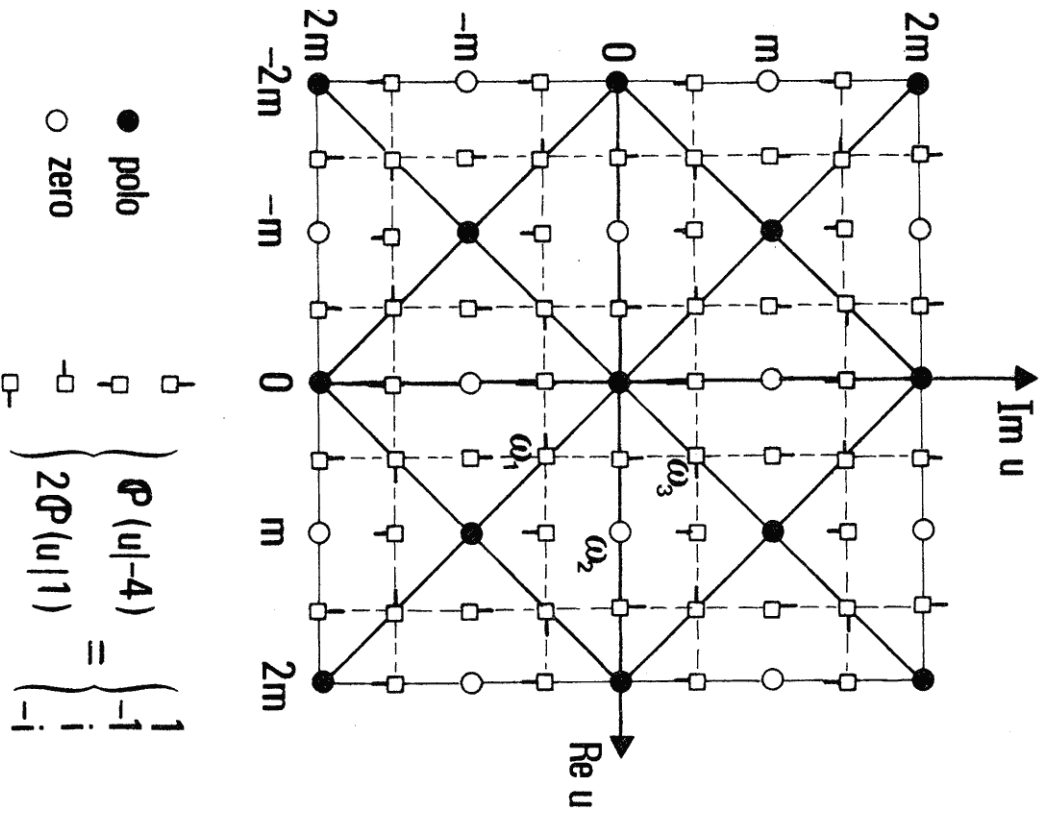
$$\wp(iu|g_2) = -\wp(u|g_2) \quad (59)$$

$$\wp(u|-g_2) = i \wp(e^{i\pi/4} u|g_2) \quad (60)$$

Si ottiene quindi lo schema mostrato in Fig. 6, ove le due funzioni riportate come esempio  $[\wp(u|-4)]$  e  $[\wp(u|1)]$  sono state scelte perché hanno lo stesso periodo reale, che verrà indicato con  $2m$ , e lo stesso periodo immaginario, uguale a  $2mi$ . I campi fondamentali delle funzioni (quello della  $\wp(u|1)$  ha area doppia dell'altro) sono delimitati dalle linee più marcate.

Un'altra proprietà importante delle funzioni  $\wp u$  di tipo lemniscatico è che, essendo  $e_2 = 0$  qualunque sia  $g_2$ , e trattandosi (come già detto) di uno zero doppio, tali funzioni hanno sia gli zeri che i poli

$\mathcal{P}(|u|-4,0)$



● polo  
 ○ zero  
 □

$$\left. \begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{matrix} \right\} \mathcal{P}(|u|-4) = \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{matrix} \right\} 2\mathcal{P}(|u|/1) = \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{matrix}$$

$\mathcal{P}(|u|,0)$

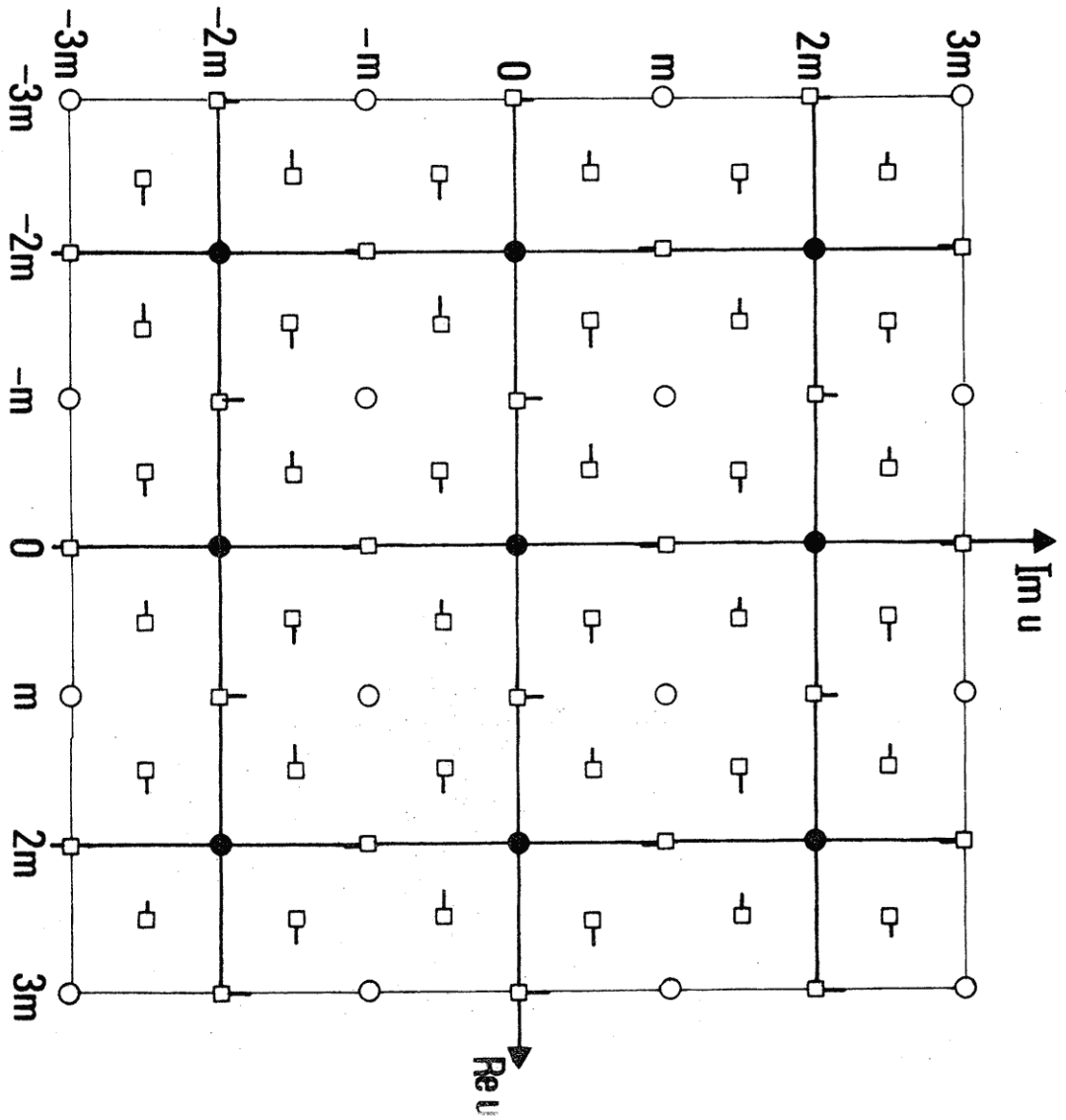
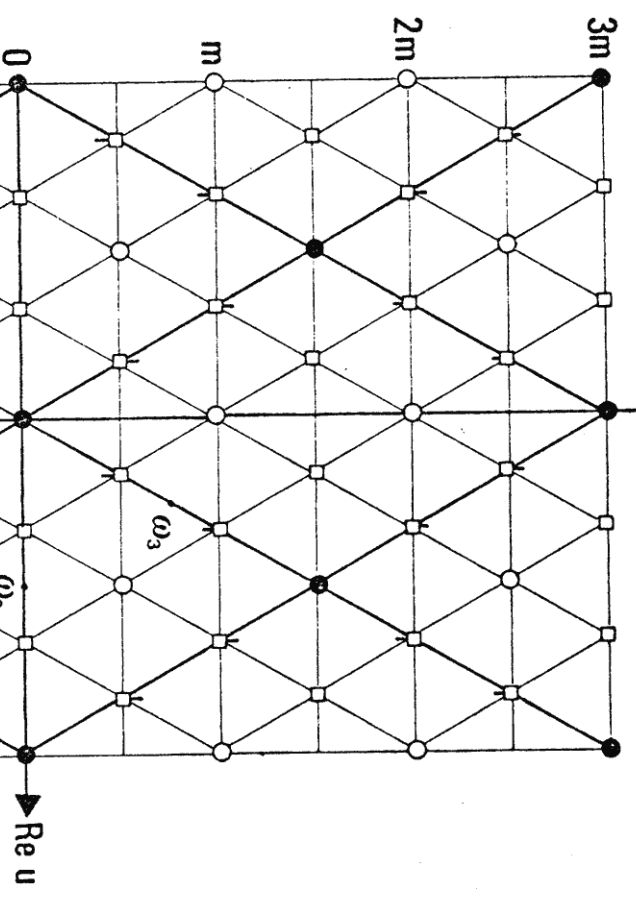


fig.6



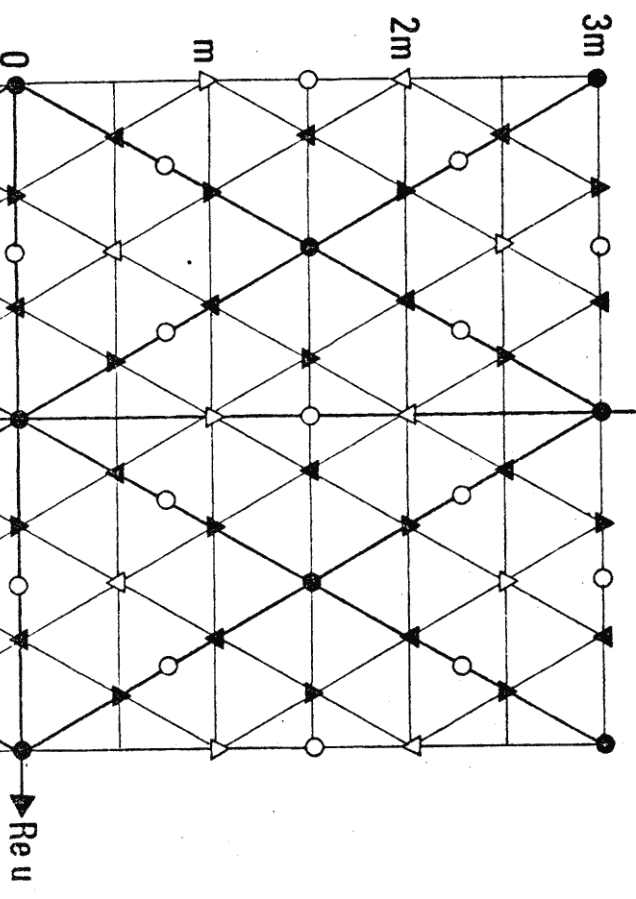
$P(u|0,1)$

Im u

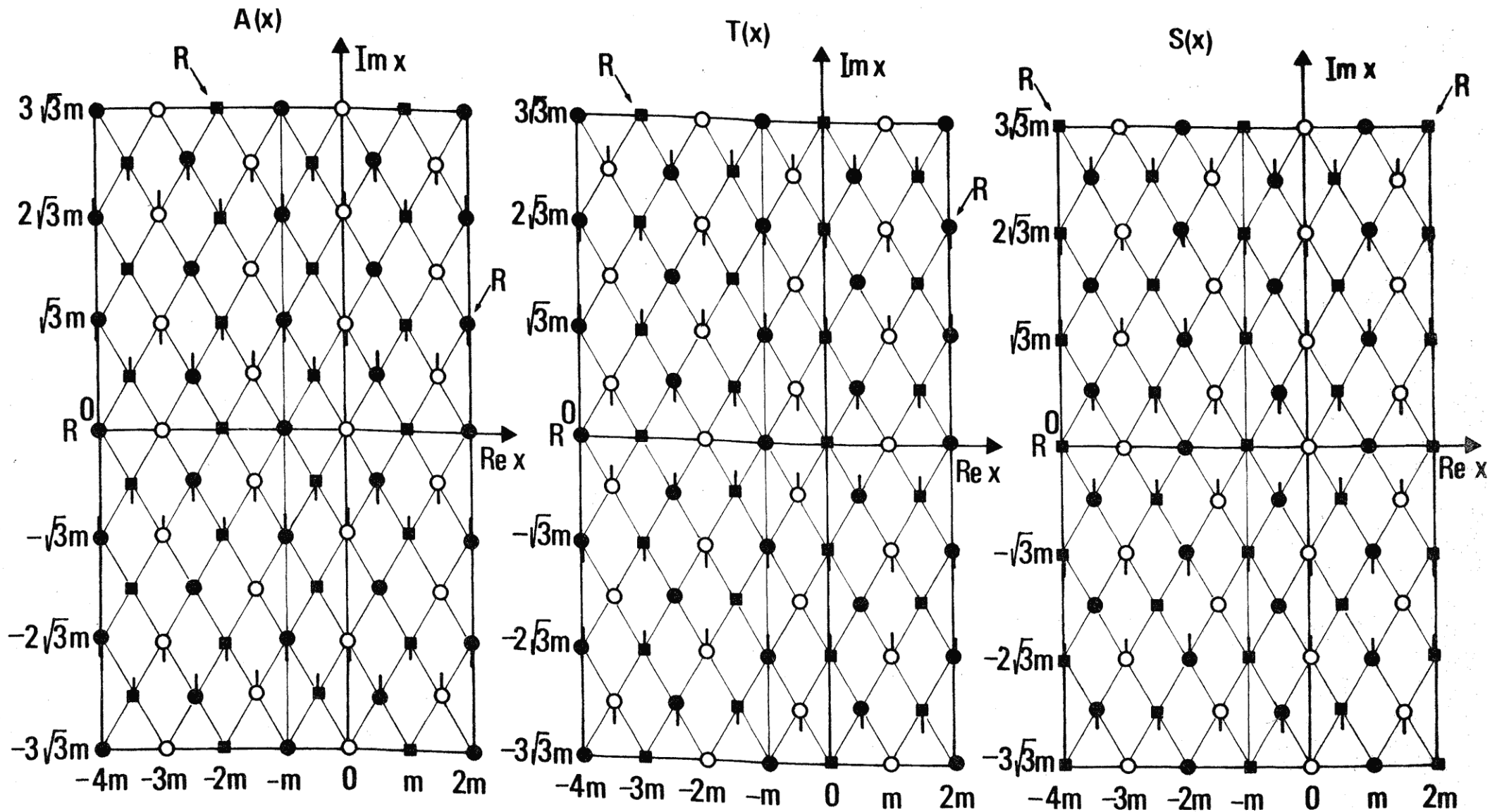


$P'(u|0,1)$

Im u



VALORI DELLE FUNZIONI : ● polo ○ zero □ 1 ▽  $e^{-2i\pi/3}$  ▴  $e^{-i\pi/3}$  ▾  $e^{i\pi/3}$



zeri



CON RESIDUO

$\pm 1$   
 $\pm e^{2i\pi/3}$   
 $\pm e^{-2i\pi/3}$

poli



radici cubiche di  $\pm 1$

■ FUNZIONE  $\pm 1$   
■  $\pm e^{2i\pi/3}$   
■  $\pm e^{-2i\pi/3}$

(+ per T - per A e S i poli;  
- per T + per A e S gli zeri)

(+ per A e T - per S)

fig. 5

doppi e quindi risultano essere il quadrato di una funzione uniforme (con zeri e poli semplici).

Riprendendo la definizione

$$\text{arcS}(x) = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1+x'^4}}$$

con la sostituzione  $x'^2 = t$  si ha

$$\text{arcS}(x) = \int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{4t^3+4t}} = \mathcal{P}^{-1}(x^2|-4) - \mathcal{P}^{-1}(0|-4) \quad (61)$$

La funzione  $\mathcal{P}(u|-4)$  si annulla (v. Fig. 6) nel punto di mezzo del periodo reale ( $u=m$ ). Ponendo  $\text{arcS}(x) = y$  [cioè  $x = s(y)$ ] si trova subito dall'inversione della (61):

$$x^2 = S^2(y) = \mathcal{P}(y+m|-4)$$

da cui (sostituendo di nuovo  $y$  con  $x$ )

$$S(x) = \sqrt{\mathcal{P}(x+m|-4)} = 1/\sqrt{\mathcal{P}(x|-4)} \quad (62)$$

L'ultima uguaglianza è stata ottenuta applicando la formula di addizione della  $\mathcal{P}u$  e ricordando che  $\mathcal{P}(m|-4) = \mathcal{P}'(m|-4) = 0$ .

La funzione  $S(x)$  è quindi, per quanto ricordato prima, una funzione ellittica uniforme avente poli e zeri del primo ordine: sostituendo nella (62) gli opportuni valori di  $x$ , si trova che la costante  $m$  caratterizzante le FTG di ordine 4 si identifica con il semiperiodo reale della  $\mathcal{P}(u|-4)$  [e, per quanto detto prima, anche con il semiperiodo reale della lemniscatica  $\mathcal{P}(u|1)$ <sup>30)</sup>].

---

30) Di fatto è possibile esprimere le FTG di ordine 4 anche in funzione della  $\mathcal{P}(x|1)$ , utilizzando, a partire dalla (62), le formule (59), (60) e (42). Preferiamo ritrovare questa relazione con altro metodo nel prossimo paragrafo.

Nell'applicare la (62) bisogna usare cautela nel servirsi della parità della  $\Phi u$ : infatti si può facilmente vedere che il radicale cambia di segno percorrendo una retta che attraversi un polo o uno zero della  $\Phi n$ , in modo che di fatto  $S(x)$  risulta essere (come deve) una funzione dispari. Quanto all'espressione di  $A$  e  $T$ , si determina immediatamente derivando rispettivamente  $1/S$  e  $S$ . Si ha infatti:

$$T^2 = 1/S' = - \frac{2[\Phi(x|-4)]^{3/2}}{\Phi'(x|-4)} \quad (63)$$

$$A^2 = -1(1/S)' = - \frac{2\sqrt{\Phi(x|-4)}}{\Phi'(x|-4)}$$

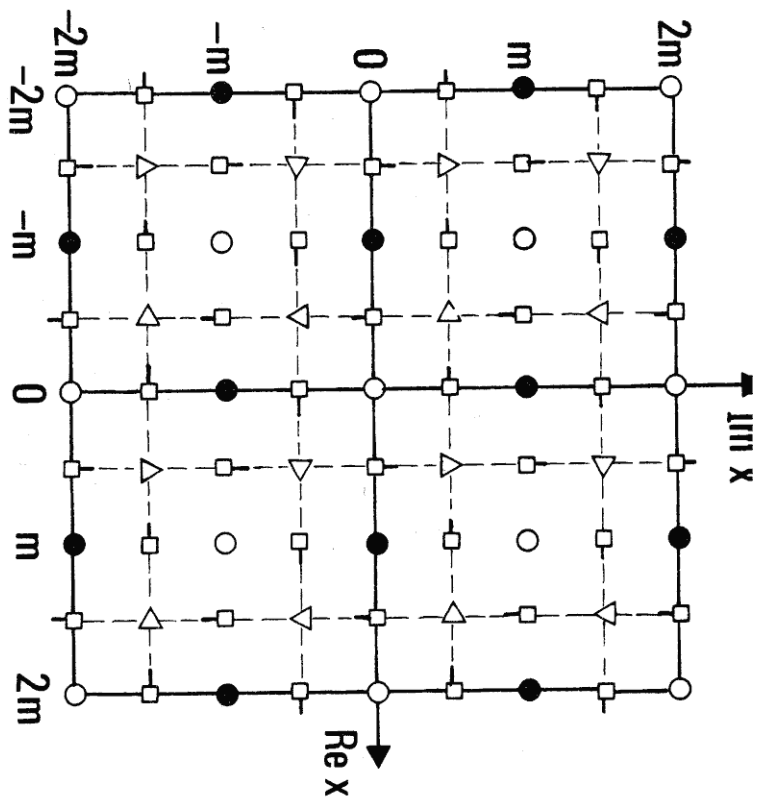
Per la conversione dei segni dei radicali, di cui si è parlato in precedenza, risulta che, per  $x$  reale, i secondi membri delle (63) risultano sempre reali e positivi. Poiché nei punti ove  $\Phi x$  ha uno zero doppio  $\Phi'x$  ha uno zero semplice, e ove  $\Phi x$  ha un polo doppio  $\Phi'x$  ha un polo triplo, tutti gli zeri delle (63) sono doppi; quindi, ricavando  $A$  e  $T$  mediante estrazione della radice quadrata, tali funzioni non hanno punti di diramazione in corrispondenza dei loro zeri. Invece i poli delle (63) sono semplici, e danno luogo quindi a punti di diramazione di tipo radice quadrata per  $A$  e  $T$ . Essi si hanno (per entrambe le funzioni, in accordo con un precedente risultato di validità generale) in corrispondenza dei punti ove è  $\Phi'x = 0$  e  $\Phi x \neq 0$ , cioè  $\omega_1 = \frac{m}{2}(1-i)$ ,  $\omega_3 = \frac{m}{2}(1+i)$  tra tutti gli altri punti ottenuti aggiungendo ad essi un numero intero di periodi primitivi. Si ottiene quindi una rete di quadrati di lato  $m$ , con i vertici situati nei centri dei quadrati dell'analogha rete, avente i vertici nei poli e negli zeri doppi della  $\Phi(u|-4)$ ; essa è caratterizzata dalle linee punteggiate nel diagramma di sinistra della Fig. 6.

Un'interessante proprietà valida lungo tutte le rette punteggiate è che su di esse la  $\Phi(u|-4)$  ha modulo uguale a 1. Ciò si verifica immedia

tamente mediante la formula di addizione di un semiperiodo  $\omega_1$  o  $\omega_3$  all'argomento della  $\Phi u$ , quale si trova, ad es., nel TRICOMI, e notando che  $\Phi(u+\omega_1|-4), \Phi(u+\omega_3|-4)$  in base a tale formula hanno modulo 1 tutte le volte che  $\Phi u$  è reale. Inoltre, percorrendo il perimetro di uno dei quadrati di tale rete, la funzione  $\Phi(u|-4)$  percorre due volte il cerchio unitario: il che significa che essa non può avere modulo 1 in altri punti del campo fondamentale contenente il quadrato esaminato, e che di conseguenza in tutti i quadrati centrati negli zeri si deve avere  $|\Phi u| < 1$ , in quelli centrati nei poli si deve avere  $|\Phi u| > 1$ . (Si noti che due quadrati adiacenti costituiscono un campo fondamentale).

Lo stesso discorso vale per la funzione  $S$ , il cui andamento nel piano complesso è rappresentato in Fig. 7; tuttavia in questo caso lungo il perimetro di uno dei quadrati della rete a linee punteggiate la funzione percorre una sola volta il cerchio unitario (e infatti un campo fondamentale è formato da quattro quadrati).

Un'altra conseguenza di quanto ora ottenuto è che, essendo il rapporto tra  $A^2$  e  $T^2$  uguale a  $S^2$ , lungo la rete dei quadrati in questione (che ora ai vertici esibiscono i poli delle due funzioni)  $A^2$  e  $T^2$  hanno lo stesso modulo, che potrà essere indicato con  $\rho^2$ . Uno studio dettagliato delle formule (63) con un'opportuna convenzione per i segni dei radicali, quale quella descritta nel TRICOMI, mostra che le parti reali e immaginarie delle due funzioni hanno la stessa grandezza, così che, in ogni punto della rete, le funzioni  $A^2$  e  $T^2$  possono essere scritte sotto la forma  $\pm \rho e^{\pm i\phi/2}$  (con i segni davanti a  $\phi$  sempre diversi per le due funzioni) in cui  $\phi$  è un'opportuna variabile che, su ogni segmento compreso fra due poli adiacenti, copre l'intervallo tra  $-\frac{\pi}{2}$  e  $+\frac{\pi}{2}$ . È opportuno adottare la convenzione che  $\phi$  varia da  $-\frac{\pi}{2}$  a  $+\frac{\pi}{2}$  percorrendo i segmenti in questione nel verso dell'asse reale o di quello immaginario.



VALORI DELLA FUNZIONE:

- polo
- zero
- 1
- -1
- i
- -i
- △  $e^{i\pi/4}$
- △  $e^{3i\pi/4}$
- △  $e^{-3i\pi/4}$
- △  $e^{-i\pi/4}$

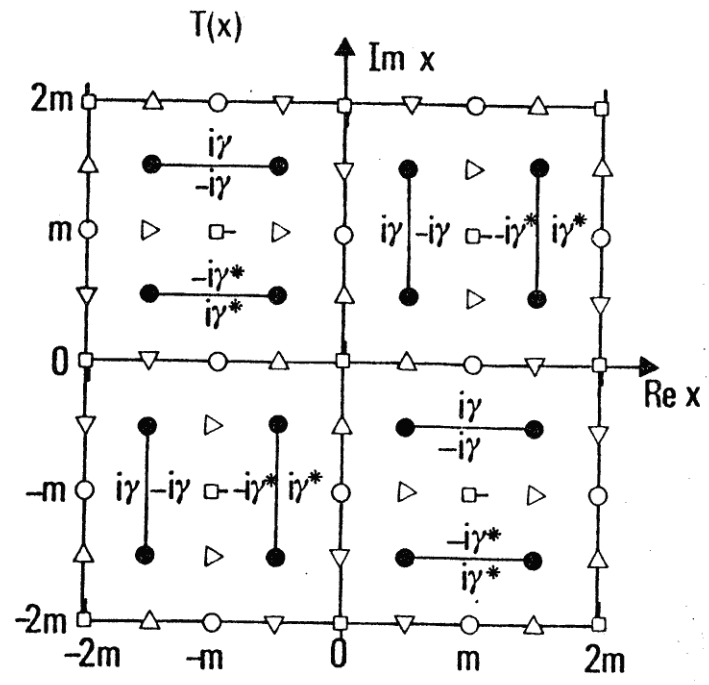
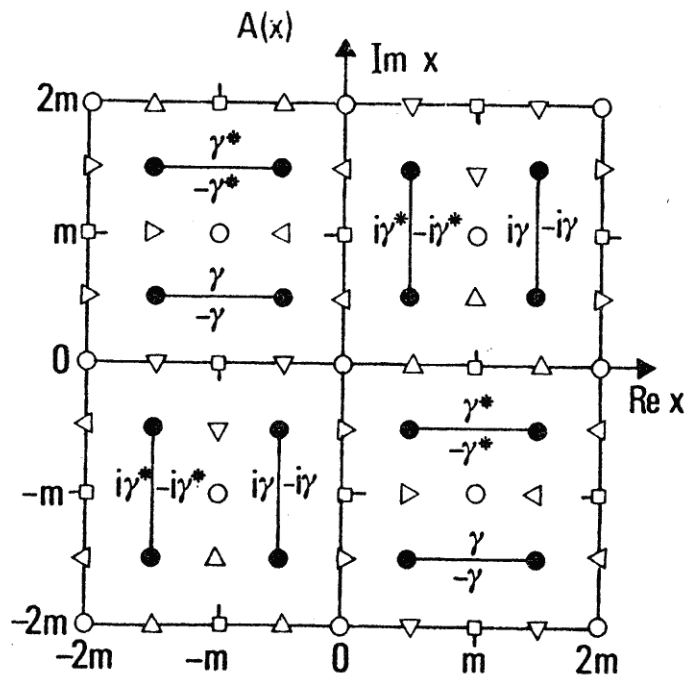
fig.7

La specificazione di  $A^2$  e  $T^2$  sulla rete non è stata riportata qui in dettaglio per ragioni di brevità; in ogni caso essa è sempre ricostruibile a partire dai diagrammi di Fig. 8 (più avanti). Si noti che la relazione (54) implica l'uguaglianza  $\rho = (2 \cos \phi)^{-1/4}$  (in cui, essendo  $\cos \phi$  sempre non negativo, si deve prendere la radice aritmetica).

Sulla base di queste considerazioni è abbastanza facile arrivare al comportamento di  $A$  e  $T$  nel piano complesso. Come già detto, queste funzioni hanno dei punti di diramazione in tutti i vertici dei quadrati della rete considerata. Il modo più semplice di scegliere una struttura dei tagli nel piano si ha congiungendo tali punti di diramazione a due a due, attraverso segmenti rettilinei facenti parte della rete. Affinché sia verificata dappertutto la condizione (29) (con  $e =$  radice quarta dell'unità), inclusi i valori dai due lati dei tagli, la struttura di tali segmenti va scelta secondo uno dei due schemi mostrati in Fig. 8. In entrambi i casi sono indicati i valori delle funzioni sui due lati di ogni taglio, con la notazione  $\gamma = \rho e^{i\phi/4}$  e usando l'asterisco per indicare la coniugazione complessa.<sup>31)</sup> La regione di piano complesso studiata nei diagrammi di Fig. 8 corrisponde a un campo fondamentale delle funzioni, che può essere periodato sia nella direzione dell'asse reale che in quella dell'asse immaginario. Si trova, come previsto, la periodicità reale  $4m$  (anziché  $2m$  come per le (63), a causa dell'ulteriore estrazione di radice quadrata), e la periodicità immaginaria  $4mi$  ( $2mi$  per le (63)). È immediato vedere che qualunque monomio di ordine pari in  $A$  e  $T$  (eventualmente contenente anche potenze negative di tali funzioni), potendo essere sempre espresso in termini di  $S, A^2$  e  $T^2$ , è

---

31) Poiché è  $S^2 = \pm e^{\pm i\phi}$ , il valore di  $\phi$  in un punto specifico del taglio può essere ricavato a partire da  $S$  (naturalmente tenendo sempre presente la convenzione suaccennata per la scelta dei valori estremi  $\pm \frac{\pi}{2}$ ). A questo proposito, ad un esame superficiale i diagrammi di Fig. 8 sembrano esibire una violazione sia della simmetria per rotazione che della parità delle funzioni lungo i tagli. In realtà tale violazione non c'è, perché bisogna appunto tenere presente la convenzione che i tagli vanno sempre percorsi nel verso dell'asse reale o di quello immaginario: l'inversione del senso di percorrenza muta  $\gamma$  in  $\gamma^*$  e viceversa.



- VALORI DELLE FUNZIONI:
- punto di diramazione
  - zero
  - ◻ 1    ◻  $2^{-1/4}$
  - ◻ -1    ◻  $-2^{-1/4}$
  - ◻  $i$     ◻  $2^{-1/4}i$
  - ◻  $-i$     ◻  $-2^{-1/4}i$

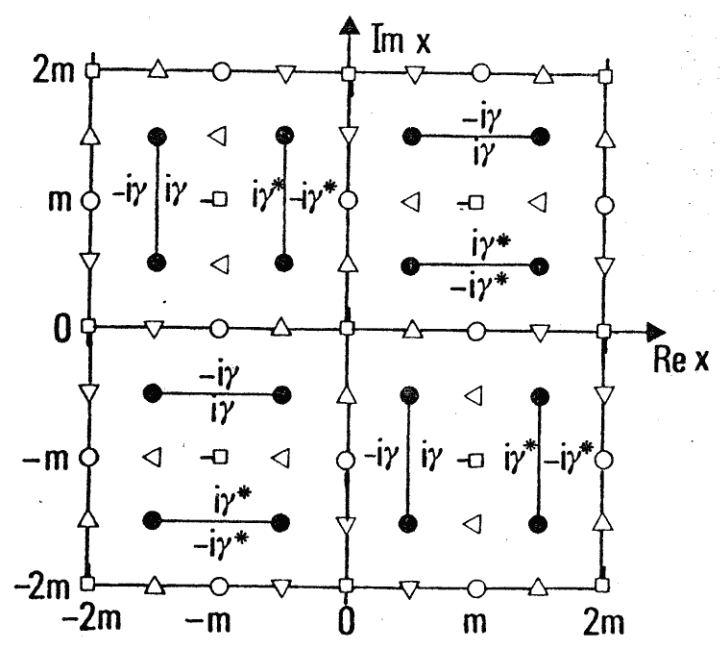
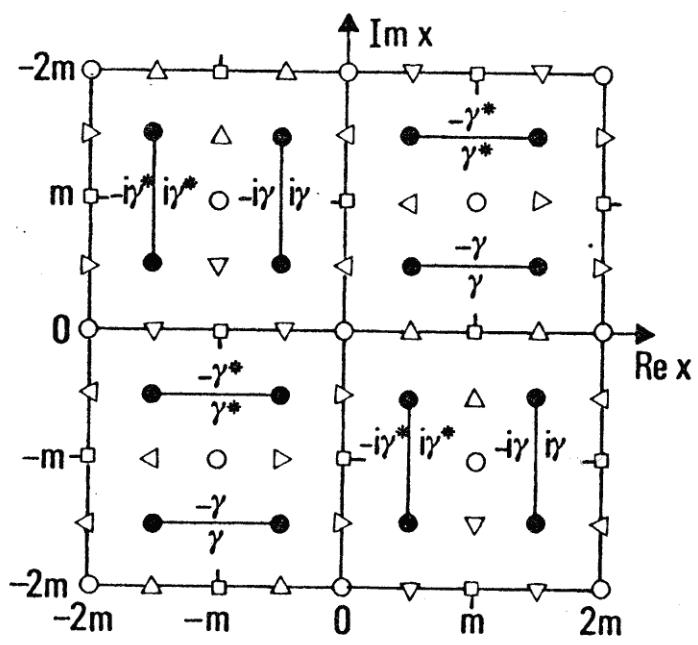


fig.8



una funzione che presenta poli, ma non punti di diramazione.

Dalle relazioni trovate in precedenza potrebbero essere dedotte altre proprietà delle FTG di ordine 4; tuttavia vogliamo prima esprimere tali funzioni non più tramite una  $\wp$  di Weierstrass, ma attraverso le funzioni di Jacobi associate alla  $\wp$  lemniscatica, che hanno il parametro  $k^2 = \frac{1}{2}$ , come verrà mostrato nel prossimo paragrafo, in cui verranno esposte anche ulteriori proprietà delle FTG di ordine 4.

## II.6 Le FTG di ordine 4 espresse attraverso le funzioni di Jacobi.

Richiamiamo brevemente, per comodità di riferimento nei passaggi che seguiranno, la definizione e la proprietà principali delle funzioni di Jacobi, che, seguendo TRICOMI, verranno indicate con  $\operatorname{sn} v, \operatorname{cn} v, \operatorname{dn} v$ . Si comincia con l'invertire l'integrale di Legendre di prima specie,  $v(\phi)$ :<sup>32)</sup>:

$$v(\phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\phi'}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi'}}$$

ottenendo una funzione  $\phi = \operatorname{am} v$ , e si pone

$$\operatorname{sn} v = \sin \phi = \sin[\operatorname{am} v]$$

$$\operatorname{cn} v = \cos \phi = \cos[\operatorname{am} v]$$

$$\operatorname{dn} v = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi} = d(\operatorname{am} v)/dv$$

che soddisfano le due identità

$$\operatorname{sn}^2 v + \operatorname{cn}^2 v = 1 \tag{64}$$

$$\operatorname{dn}^2 v + k^2 \operatorname{sn}^2 v = 1$$

e le seguenti relazioni differenziali:

$$\operatorname{sn}'v = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v$$

$$\operatorname{cn}'v = -\operatorname{sn} v \operatorname{dn} v$$

$$\operatorname{dn}'v = -k^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \tag{65}$$

---

32) In tutte le formule che seguono,  $k^2$  è un parametro che va fissato a priori e da cui evidentemente dipendono tutte le funzioni. Si userà in seguito anche la notazione  $k'^2 = 1-k^2$ .

Le funzioni  $\text{cn } v$  e  $\text{dn } v$  sono pari nel loro argomento,  $\text{sn } v$  invece è dispari. Sul TRICOMI è mostrato che tutte e tre funzioni di Jacobi sono funzioni ellittiche uniformi, con poli e zeri semplici, i cui periodi primitivi, possono essere calcolati in termini delle due costanti  $K$  e  $K'$ , definite (quando  $0 < k^2 < 1$ ) da

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi'}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi'}}, \quad K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi'}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \phi'}} \quad (66)$$

Per il momento è il caso di lasciare da parte i dettagli del comportamento delle funzioni di Jacobi nel piano complesso, e di vedere qual'è il loro legame con le funzioni di Weierstrass. La prima relazione da prendere in esame è quella che esprime  $k^2$  in termini delle costanti  $e_1, e_2, e_3$  che (in modo equivalente a  $g_2, g_3$ ) specificano la funzione di Weierstrass da considerare. Precisamente si ha:

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}; \quad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} \quad (67)$$

(ove la seconda formula è chiaramente una conseguenza della prima). Passando da una  $\Phi u$  ad un'altra "equivalente" ottenuta applicando la relazione di omogeneità (32), è immediato controllare che  $e_1, e_2, e_3$  risultano tutti moltiplicati per  $t^{-2}$  e quindi  $k^2$  e  $k'^2$  restano invariati.

L'espressione delle funzioni di Jacobi in termini delle funzioni di Weierstrass caratterizzate dai parametri che figurano nelle (67) è la seguente (con  $v = \sqrt{e_1 - e_3} u$ )<sup>33)</sup>:

---

33) I segni delle radici quadrate che figurano nelle (68) sono da ritenere fissati attraverso una convenzione opportuna, come quella descritta nel TRICOMI, a cui si è già accennato. Quando  $e_1, e_2, e_3$  sono reali, il significato delle (68) è senza ambiguità.

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} v &= \sqrt{e_1 - e_3} / \sqrt{\wp u - e_3} \\ \operatorname{cn} v &= \sqrt{\wp u - e_1} / \sqrt{\wp u - e_3} \\ \operatorname{dn} v &= \sqrt{\wp u - e_2} / \sqrt{\wp u - e_3} \end{aligned} \quad (68)$$

Dall'esame delle (67) e (68) è facile dedurre che la connessione diretta tra funzioni di Weierstrass invarianti reali e funzioni di Jacobi è di interesse pratico solo per la classe delle  $\wp u$  per cui  $\Delta < 0$ , e i tre valori  $e_1, e_2, e_3$  sono reali (con  $e_1 > e_3$ ). Solo in questo caso infatti le (67) e (68) permettono di rimanere sempre nel campo reale per valori reali dell'argomento. Ora la funzione  $\wp(u|-4)$ , per mezzo della quale sono state espresse le FTG di ordine 4 nel paragrafo precedente, ha  $\Delta > 0$ ,  $e_1$  ed  $e_3$  immaginari, e quindi non si presta ad un uso immediato delle (68)<sup>34)</sup>. Tuttavia è da tener presente (cf. eq. (60) e nota<sup>30)</sup>) che le FTG di ordine 4 possono essere espresse anche in termini della lemniscatica  $\wp(u|1)$ , che stavolta ha  $\Delta < 0$ , e per cui è  $e_2=0, e_1=-e_3=\frac{1}{2}$ .

Per le (67), le funzioni di Jacobi associate a tale  $\wp u$  hanno  $k^2 = k'^2 = \frac{1}{2}$ . E' quindi da attendersi che le FTG di ordine 4 siano connesse in modo semplice a tali funzioni di Jacobi.

Invece di manipolare le (68), conviene ripartire di nuovo dall'integrale che definisce  $\operatorname{arcS}(x)$ :

$$\operatorname{arcS}(x) = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1+x'^4}}$$

---

34) Lo stesso discorso vale per le  $\wp u$  di tipo equianarmonico discusso nel §II.4, legate alle FTG di ordine 3, che pertanto non possono essere espresse in modo conveniente in termini di funzioni di Jacobi.

Con la posizione  $x = \operatorname{tg}\phi/2$ ,  $x' = \operatorname{tg}\phi'/2$ , l'integrale si trasforma nella seguente maniera:

$$\int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1+x'^4}} = \frac{1}{2} \int_0^\phi \frac{d\phi'}{\sqrt{\cos^4 \frac{\phi'}{2} + \sin^4 \frac{\phi'}{2}}} = \frac{1}{2} \int_0^\phi \frac{d\phi'}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \phi'}} = \frac{1}{2} v(\phi) \quad k^2 = \frac{1}{2}$$

Sottintendendo da ora in poi la specificazione del valore di  $k^2$ , e ponendo  $y = \operatorname{arcS}(x)$  (cioè  $S(y) = x$ ), si ha:

$$\phi = \operatorname{am}(2y); \quad \sin \phi = \operatorname{sn}(2y) = \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2S(y)}{1+S^2(y)} \quad (69)$$

ricordando la formula che esprime il seno in funzione della tangente dell'angolo metà, e sostituendo per  $x$  il suo valore  $S(y)$ .

Mettendo di nuovo  $x$  al posto di  $y$ , risolvendo la (69) come una equazione di secondo grado che dà  $S(x)$  in funzione di  $\operatorname{sn}(2x)$ , e scegliendo la radice dell'equazione in modo da avere  $S(0) = 0$ ,<sup>35)</sup> si ottiene:

$$S(x) = \frac{1 - \operatorname{cn}(2x)}{\operatorname{sn}(2x)} \quad (70)$$

Mediante le formule di duplicazione delle funzioni di Jacobi:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(2v) &= \frac{2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 v} \\ \operatorname{cn}(2v) &= \frac{\operatorname{cn}^2 v - \operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn}^2 v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 v} \\ \operatorname{dn}(2v) &= \frac{\operatorname{dn}^2 v - k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 v} \end{aligned} \quad (71)$$

si ha infine la formula

$$S(x) = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} \quad (72)$$

---

35) E' immediato vedere che l'altra soluzione fornisce  $1/S(x)$ .

E' interessante notare che, nella derivazione della (72) a partire dalla (70), non è stato necessario specificare numericamente il valore di  $k^2$ .

La semplice formula (72) può essere ora combinata con le (68) per ottenere l'espressione delle FTG in funzione della  $\Phi(u|1)$ . Si ottiene immediatamente:

$$S(x) = \left[ \frac{\Phi(x|1)-e_1}{\Phi(x|1)-e_2} \frac{\Phi(x|1)-e_3}{\Phi(x|1)-e_4} \right]^{-1/2} = \sqrt{\frac{\Phi(x|1)}{\rho^2(x|1) - \frac{1}{4}}} \quad (73)$$

La seconda uguaglianza nella (73) è ottenuta specificando i valori delle  $e_i$  per la  $\Phi(x|1)$ ; confrontando con la (62) si arriva ad una relazione algebrica razionale tra la  $\Phi(x|-4)$  e la  $\Phi(x|1)$ , ottenibile anche per altra via (v. nota <sup>30</sup>).

A partire dalla formula (72), e sulla base della collocazione degli zeri e dei poli delle funzioni di Jacobi (quale può essere trovata p.es. nel TRICOMI, fig. 24), si riottiene facilmente lo schema di Fig. 7: si può vedere che gli zeri di  $S(x)$  sono dati dagli zeri di  $\operatorname{sn} x$  e da quelli di  $\operatorname{dn} x$ , mentre i poli sono quelli comuni alle tre funzioni, più gli zeri di  $\operatorname{cn} x$ . E' immediata l'identificazione  $K = K' = m$ . Che il periodo reale di  $S(x)$  sia  $2m$  e non  $4m$  (come il periodo di  $\operatorname{sn} x$  e  $\operatorname{cn} x$ ) può essere visto immediatamente dalla (70).

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente, le espressioni di  $A^2$  e  $T^2$  possono essere ottenute per derivazione. Si ha

$$T^2(x) = 1/S' = \frac{2\operatorname{cn}^2 x}{1+\operatorname{cn}^4 x} \quad (74)$$

$$A^2(x) = -1/(1/S)' = \frac{1-\operatorname{cn}^4 x}{1+\operatorname{cn}^4 x} = \frac{2\operatorname{sn}^2 x \operatorname{dn}^2 x}{1+\operatorname{cn}^4 x}$$

Si noti che per ricavare le (74) è stato necessario specificare per

$k^2$  il valore  $\frac{1}{2}$ .

Si ritrova il risultato che  $A^2$  e  $T^2$  sono funzioni uniformi, le quali presentano zeri doppi e poli semplici. E' immediato controllare che le relazioni (54) e (55) (queste ultime da moltiplicare rispettivamente per  $2A$  e  $2T$ ) sono verificate dalle (74). Si noti che i poli di  $cnx$  non contribuiscono ai poli delle funzioni, ma solo agli zeri di  $T^2$ ; i poli di  $A^2$  e  $T^2$  si hanno nei punti ove  $cn^4x = -1$ , e sono ovviamente semplici. Quanto alle conseguenze dell'estrazione della radice quadrata nelle (74) per ottenere  $A$  e  $T$ , e all'aspetto di queste ultime funzioni nel piano complesso, si ritrovano, sia pure con minore facilità, tutte le conclusioni raggiunte nel paragrafo precedente. Le funzioni di Jacobi risultano particolarmente adatte per ottenere le formule di duplicazione delle FTG. Quadrando la (70) si trova infatti immediatamente

$$S^2(x) = \frac{1-cn(2x)}{1+cn(2x)}$$

da cui si ottiene immediatamente

$$cn(2x) = \frac{1-S^2(x)}{1+S^2(x)} \quad (75)$$

La (69) e una semplice elaborazione della relazione  $dn^2 = 1-k^2sn^2$  fornisce

$$sn(2x) = \frac{2S(x)}{1+S^2(x)} \quad dn(2x) = \frac{1}{A^2(x)+T^2(x)} \quad (76)$$

Con l'aiuto delle (75) e (76) si ottiene immediatamente:

$$S(2x) = \frac{2A(x)T(x)}{T^4(x) - A^4(x)}$$

$$A^2(2x) = \frac{4A^2(x)T^2(x)}{1 + 4A^4(x)T^4(x)} \quad (77)$$

$$T^2(2x) = \frac{(T^4(x) - A^4(x))^2}{1 + 4A^4(x)T^4(x)}$$

Come in precedenza, per avere le formule di duplicazione per  $A$  e  $T$  si estrae la radice quadrata delle due ultime tra le (77), scegliendo la determinazione in accordo con la struttura di tagli scelta nel piano complesso (Fig. 8).

Per le formule generali di addizione, le funzioni di Jacobi non sono molto convenienti; è preferibile invece seguire un metodo analogo a quello usato per le funzioni di ordine 3, applicando il teorema di addizione alla funzione  $\wp(x|-4)$ , uguale a  $1/S^2(x)$  per la (62). In questo modo si trova agevolmente la formula di addizione per  $S(x+y)$ , e, derivando tale espressione (o il suo inverso) rispetto a  $x$  si trovano le formule di addizione per  $A^2$  e  $T^2$ . Il risultato del calcolo è il seguente (in cui sono compendiate anche le formule di sottrazione, immediatamente ottenibili in base alla considerazione che  $A$  è una funzione dispari e  $T$  una funzione pari):

$$S(\underline{x+y}) = \frac{A^2(x)T^2(y) - A^2(y)T^2(x)}{A(x)T(x) + A(y)T(y)} \quad (78)$$

$$A^2(\underline{x+y}) = \frac{[A^2(x)T^2(y) - A^2(y)T^2(x)]^2}{F_{\pm}}; T^2(\underline{x+y}) = \frac{[A(x)T(x) + A(y)T(y)]^2}{F_{\pm}}$$

con

$$F_{\pm} = A^2(x)T^2(y) + A^2(y)T^2(x) \pm 2A(x)T(x)A(y)T(y) [A^2(x)A^2(y) + T^2(x)T^2(y)].$$

Si noti che in tutte le espressioni che entrano nelle (78) sono contenuti soltanto dei monomi di ordine pari nelle FTG riferite alla stessa variabile, i quali, per quanto detto prima, sono funzioni uniformi.

Applicando il teorema di De l'Hospital nelle (78) nel limite  $y \rightarrow x$ , si ritrovano le (77); il calcolo è tuttavia piuttosto laborioso, perché per  $A^2$  e  $T^2$  il teorema va applicato due volte.

Per concludere l'argomento delle FTG di ordine 4, vediamo che l'ultima delle (77) è particolarmente adatta per il calcolo delle formule di bisezione (che, analogamente a quanto accade per le funzioni trigonometriche ordinarie, si esprimono solo attraverso la funzione T). Infatti, con semplici passaggi, da tale formula si ottiene la relazione:

$$4A^4\left(\frac{x}{2}\right)T^4\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - T^2(x)}{1 + T^2(x)}$$

che si può risolvere rispetto a  $A^4\left(\frac{x}{2}\right)$  oppure  $T^4\left(\frac{x}{2}\right)$ : in entrambi i casi viene la stessa equazione algebrica di secondo grado, le cui due soluzioni danno le quantità cercate, e precisamente

$$\begin{aligned} A^4\left(\frac{x}{2}\right) \\ T^4\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1}{2} \mp \frac{T(x)}{\sqrt{2(1+T^2(x))}} \end{aligned} \quad (79)$$

Poiché nei punti in cui  $T^2(x) = -1$  l'espressione  $2(1+T^2)$  si comporta come  $A^4$  e quindi ha uno zero del quart'ordine, non c'è problema di punti di diramazione nella (79) neppure quando se ne estrae la radice quadrata, mentre invece compaiono i punti di diramazione caratteristici di A e T quando si estrae la radice quarta.

Come ultimo argomento, diamo lo sviluppo in serie delle funzioni A, T e S intorno al punto  $x = 0$ : come è già noto, per le prime due funzioni esso procede per potenze di  $x^4$ , ed è facile convincersi che ciò accade



anche per la funzione  $S$ , anche se, diversamente che per l'ordine 3, non c'è alcun legame diretto con i coefficienti dello sviluppo delle altre funzioni:

$$A(x) = x - \frac{3x^5}{20} + \frac{19x^9}{480} - \frac{469x^{13}}{41600} + \frac{189611}{56576000} x^{17} \dots\dots$$

$$T(x) = 1 - \frac{x^4}{4} + \frac{9x^8}{160} - \frac{149x^{12}}{9600} + \frac{15147}{3328000} x^{16} \dots\dots \quad (79')$$

$$S(x) = x + \frac{x^5}{10} + \frac{x^9}{120} + \frac{11x^{13}}{15600} + \frac{211x^{17}}{3536000} + \dots\dots$$

In base al contenuto di questo paragrafo il lettore probabilmente non avrà visto come particolarmente evidente la convenienza di esprimere le FTG di ordine 4 in termini di funzioni di Jacobi invece che delle  $\wp$  di Weierstrass. L'utilità di tale trattazione risulterà invece chiara più avanti, quando si constaterà che la formulazione delle FTG attraverso le funzioni di Jacobi permette in modo immediato l'estensione della classe delle FTG, in modo tale da poter rappresentare, attraverso funzioni di questo tipo, l'intera classe delle funzioni ellittiche a invarianti reali e discriminante negativo. Tale sviluppo verrà portato avanti nella Parte III (§III.2).

### II.7 Le FTG di ordine 6.

Come verrà mostrato nel prosieguo di questo paragrafo, le FTG di ordine 6 sono connesse alle funzioni ellittiche di tipo equianarmonico come quelle di ordine 3, e, dato che queste ultime forniscono già una descrizione completa di tali funzioni, da questo punto di vista lo studio delle FTG di ordine 6 ha un interesse limitato.

Tuttavia, trattandosi delle funzioni di ordine più elevato che sono risolubili in maniera completa, il loro studio acquista interesse per la complicata struttura di singolarità che ne deriva, e dà un'idea di

quali siano le difficoltà che ci si deve attendere di incontrare nella trattazione delle FTG di ordine elevato. Le equazioni base a cui soddisfano le funzioni in questione sono:

$$A_6^6 + T_6^6 = 1 \quad (80)$$

$$A_6' = T_6^5 \quad (81)$$

$$T_6' = -A_6^5$$

Per trovare la connessione con le FTG di ordine 3 e con le funzioni ellittiche, conviene seguire uno studio del tutto analogo a quello indicato nel §II.1 per risalire alle FTG di ordine frazionario partendo da quelle di ordine intero. Più precisamente si pone

$$\begin{aligned} A_6^2(x) &= A_3(\phi) \\ T_6^2(x) &= T_3(\phi) \end{aligned} \quad (82)$$

ove  $\phi$  è un'opportuna funzione di  $x$  da determinare, soddisfacente  $\phi(0) = 0$ .

Con la sostituzione (82), la (80) è identicamente verificata. E' facile controllare, derivando le (82) rispetto a  $x$ , e sfruttando le (81), che si arriva a un'equazione per  $\phi$  del tipo della (26), in cui (in accordo con le definizioni (82)) si deve porre  $p = 3$ ,  $q = \frac{1}{2}$ :

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm 2 \sqrt{A_3(\phi)T_3(\phi)} \quad (83)$$

La necessità del doppio segno in questa equazione è evidente, se p.es. si considera che, quando  $x$  cresce a partire da  $x = 0$  lungo l'asse reale,  $\phi$  deve rimanere confinato tra 0 e  $m_3$  e oscillare tra questi due valori (perché  $A_6^2$ ,  $T_6^2$  in tali condizioni sono sempre reali e non

negativi). Si può controllare che si ha

$$\pm \frac{d\phi}{2 \sqrt{A_3(\phi)T_3(\phi)}} = d \left\{ 2^{-2/3} 3^{-1/2} \operatorname{arc}(A_3+T_3) \left[ 2^{4/3} A_3(\phi)T_3(\phi) \right] \right\}$$

Per verificare questa formula di devono usare la (20) e la (18'), con qualche cura per il controllo dei segni (si veda anche la nota <sup>15</sup>).

Dalla (83) si ottiene quindi (ricordando che  $\phi(0) = 0$ , e l'andamento già descritto nella parte I delle funzioni  $A_3T_3, A_3+T_3$ ):

$$A_3(\phi)T_3(\phi) = 2^{-4/3}(A_3+T_3) \left[ 2^{2/3} 3^{1/2} x - m_3 \right] = \left[ A_6(x)T_6(x) \right]^2 \quad (84)$$

sfruttando ancora le (82).

E' questa la relazione base che lega le FTG di ordine 6 a quelle di ordine 3 e, in definitiva, alle funzioni ellittiche di tipo equianarmonico.

Prima di far intervenire esplicitamente queste ultime, facciamo qualche considerazione sulla periodicità delle funzioni. Dalla discussione svolta nella Parte I si vede che la funzione  $A_6^2 T_6^2$  è periodica sull'asse reale con periodo  $m_6$  (si comporta infatti da questo punto di vista come  $\sin^2 x \cos^2 x$ , che ha per periodo  $\frac{\pi}{2} = m_2$ ). La (84) mostra che effettivamente questo è un periodo della funzione. Infatti dalla formula (5) si è già trovato che  $m_6 = 2^{-2/3} 3^{1/2} m_3$ , così che l'argomento di  $(A_3+T_3)$  nella (84) dipende da  $x$  attraverso la combinazione  $\frac{3m_3}{m_6}x$ , il che garantisce che  $m_6$  è un periodo (più precisamente, quello reale). Restando sull'asse reale, ed estraendo la radice quadrata, si trova che  $A_6 T_6$  ha periodo  $2m_6$ , come deve; più avanti si vedrà che il periodo di  $A_6$  e  $T_6$  risulta essere  $4m_6$ .

Per introdurre le funzioni ellittiche, conviene utilizzare le formu  
le collegative (Tabella I nel §I.3) e poi sfruttare la prima delle (46),  
ottenendo <sup>36)</sup>:

$$\begin{aligned} [A_6(x)T_6(x)]^2 &= 2^{-4/3} \left(-\frac{1}{S_3} + \frac{1}{A_3}\right) (2^{2/3} 3^{1/2} x) = 2^{-4/3} \frac{1-T_3}{A_3} (2^{2/3} 3^{1/2} x) \\ &= 2^{-4/3} \mathcal{P}(2^{2/3} x|1) \end{aligned}$$

e ricordando che per la  $\mathcal{P}(u|1)$  si ha  $e_2 = 2^{-2/3}$ , si può scrivere <sup>37)</sup>:

$$A^2 T^2(x) = \frac{e_2^2}{\mathcal{P}\left(\frac{x}{e_2} | 1\right)} \quad (85)$$

Dalla (85) si possono già determinare alcune caratteristiche del com-  
portamento delle FTG di ordine 6. Infatti i poli della  $\mathcal{P}_\alpha$  corrispondono  
agli zeri delle funzioni; e, dato che per la (80) tali zeri non possono  
essere comuni ad  $A$  e  $T$ , ne segue che tutti gli zeri di tali funzioni  
sono semplici (come è da aspettarsi in base al comportamento conosciuto  
sull'asse reale). Invece le singolarità di  $A$  e  $T$ , comuni alle due fun-  
zioni (v. §II.2) corrispondono agli zeri della  $\mathcal{P}_u$ ; essendo questi ultimi  
semplici, è confermato che tutte le singolarità dominanti delle funzioni  
sono dei punti di diramazione di tipo radice quarta ove le funzioni di-  
vergono (in accordo con la prima delle (28)). Da un paragone superficia-  
le con il caso  $n=4$ , trattato nel §II.5, si potrebbe pensare che, oltre  
alla funzione  $A^2 T^2$ , anche altre combinazioni di  $A$  e  $T$  che danno luo-

36) Come nel §II.4, si è omessa l'indicazione dell'invariante  $g_2$ , che è  
nullo.

37) Poiché le considerazioni seguenti verranno svolte solo in termini del-  
la  $\mathcal{P}_u$ , senza più utilizzare le FTG di ordine 3, da ora in poi si può  
sopprimere dappertutto l'indice 6, perché non c'è più rischio di con-  
fusione. Anche le funzioni ellittiche verranno talvolta indicate con  
 $\mathcal{P}_u, \mathcal{P}'_u$  (con  $u = x/e_2$ ) o addirittura con  $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ .

go a una potenza complessiva uguale a 4 non abbiano, in corrispondenza delle singularità di A e T, dei punti di diramazione: invece ciò non è vero, e tali punti di diramazione sono presenti nella grande maggioranza delle combinazioni di A e T, anche quando tali combinazioni in questi punti assumono valori finiti e non nulli. La sola eccezione, oltre ad  $A^2T^2$ , si ottiene in maniera ovvia: è sufficiente ricavare  $\wp$  dalla (85), derivare rispetto a x e vedere quale è la combinazione delle FTG che corrisponde a  $\wp'u$ :

$$\wp'\left(\frac{x}{e_2} \mid 1\right) = e_2 \frac{d}{dx} \frac{e_2^2}{A^2(x)T^2(x)} = \frac{1}{2} \left[ S^3(x) - \frac{1}{S^3(x)} \right] \quad (86)$$

ricordando che  $e_2^3 = 1/4$ .<sup>38)</sup>

E' chiaro che una qualunque combinazione di  $A^2T^2$  e  $S^3 - \frac{1}{S^3}$  (in cui si può anche utilizzare la (80)) è priva di punti di diramazione: tuttavia la maggioranza delle combinazioni più semplici di A e T non può essere posta sotto questa forma. Prima di vedere come si comportano le FTG nelle vicinanze della singularità, è bene ribadire che si cercherà di mantenere, come è stato fatto per le FTG di ordine 4, le proprietà di doppia periodicità delle funzioni e di simmetria rotazionale (esprese dalle formule(29) , con  $e$  = radice sesta dell'unità) su di un solo foglio della superficie di Riemann, tagliato in maniera opportuna.

Per cominciare, si consideri la funzione AT, proporzionale per la (85) a  $\wp^{-1/2}$ . Per studiare nel modo più conveniente la struttura da scegliere per i tagli di tale funzione, in Fig. 9 si è diviso l'intero piano complesso in un pavimento di triangoli equilateri di lato m, aventi un la-

38) Derivando rispetto a x ambo i membri della (86), si ottiene (usando la (80)):

$$\wp''\left(\frac{x}{e_2} \mid 1\right) = \frac{6e_2^4}{A^4(x)T^4(x)} = 6\wp^2\left(\frac{x}{e_2} \mid 1\right),$$

cioè una formula già nota.

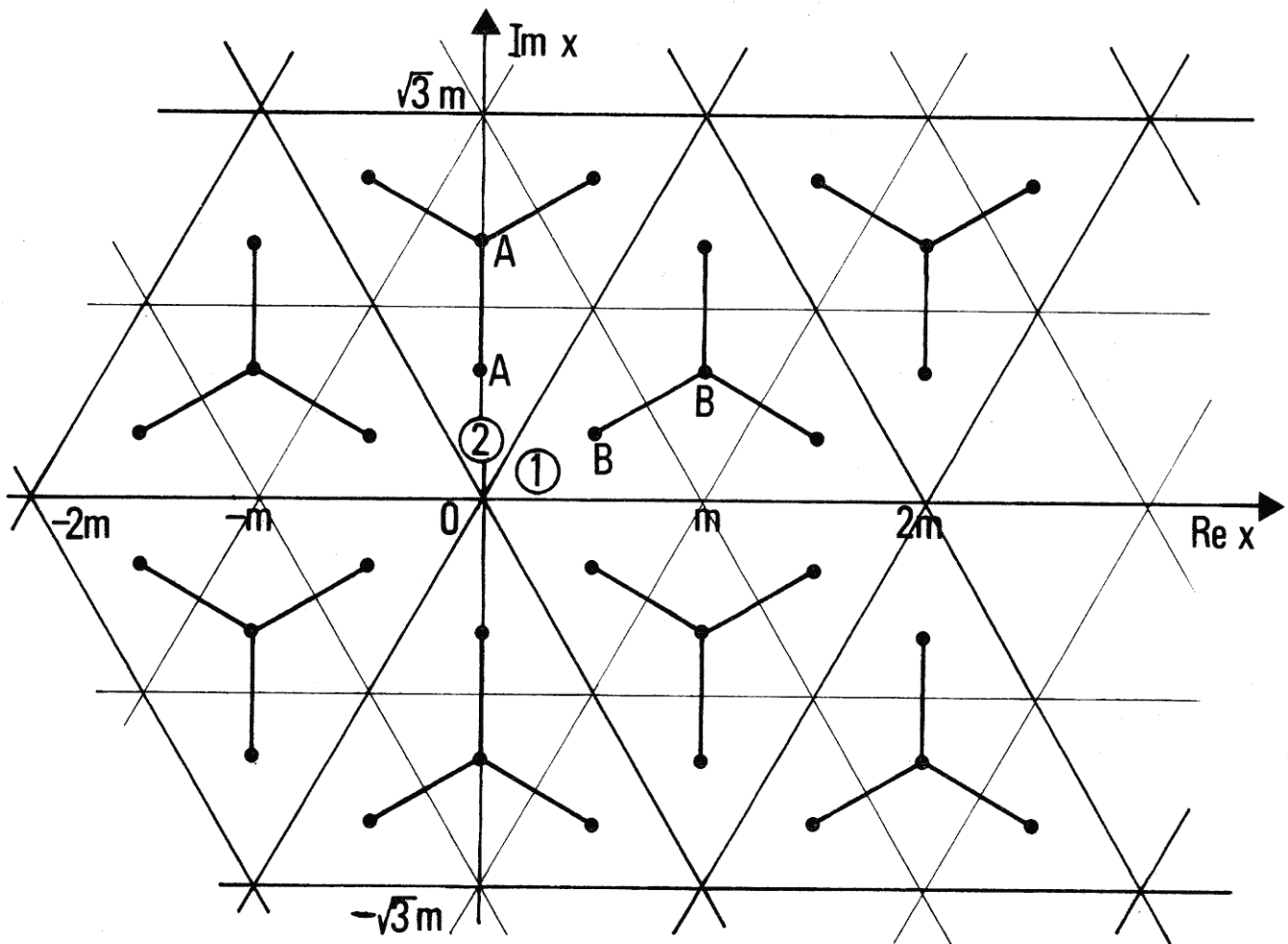


fig.9

to parallelo all'asse reale, in modo che uno dei vertici coincida con l'origine. Tali triangoli sono raggruppati a quattro per volta in triangoli più grandi (di lato  $2m$ ), che formano una struttura analoga, e sono delimitati in figura dalle linee più marcate.

A causa della formula (85), e del fatto (già discusso) che  $m/e_2$  rappresenta il periodo reale della  $\Phi_u$ , si trova che i vertici dei triangoli piccoli corrispondono ai poli della  $\Phi_u$  e quindi agli zeri (semplici) di  $AT$ , mentre, per confronto con la figura 4, i centri degli stessi triangoli corrispondono agli zeri della  $\Phi_u$  e quindi ai punti di diramazione di  $AT$ . Inoltre, se vogliamo che la funzione  $AT$  non attraversi alcun taglio lungo l'asse reale, soddisfi la prima delle (29) (come conseguenza delle (29) stesse) con  $\epsilon =$  radice sesta dell'unità, e sia periodica con periodo  $2m$ , dalla combinazione delle varie richieste si conclude che i tagli della funzione  $AT$  non devono attraversare nessuna delle rette che costituiscono i lati dei triangoli grandi: essi quindi possono soltanto congiungere i punti di diramazione che (a gruppi di quattro) sono contenuti all'interno di detti triangoli (che verranno anche chiamati "triangoli base"). Si conclude facilmente che la sola struttura dei tagli consistente con tutte le proprietà di simmetria richieste è quella a forma di "stella a tre punte" mostrata in Fig. 9. Infatti questa figura è la sola che vada in se stessa sia per una traslazione orizzontale di  $2m$  (pari al lato di un triangolo base) che per rotazione di  $60^\circ$ . E' anche chiaro che, come conseguenza della periodicità della  $\Phi_u$ , la funzione è nota su tutto il piano complesso una volta dati i suoi valori in due triangoli base adiacenti. Prendiamo come riferimento i due triangoli aventi un vertice comune nell'origine, indicati in Fig. 9 con i simboli 1 e 2. I valori della funzione  $AT$  lungo il loro perimetro si ottengono in maniera banale, a partire dai valori della  $\Phi_u$  mostrati in Fig. 4, ricordando che la funzione è positiva nel tratto  $(0,m)$  dell'asse reale, e tenendo presente che, estraendo la radice quadrata, si deve avere un cam-

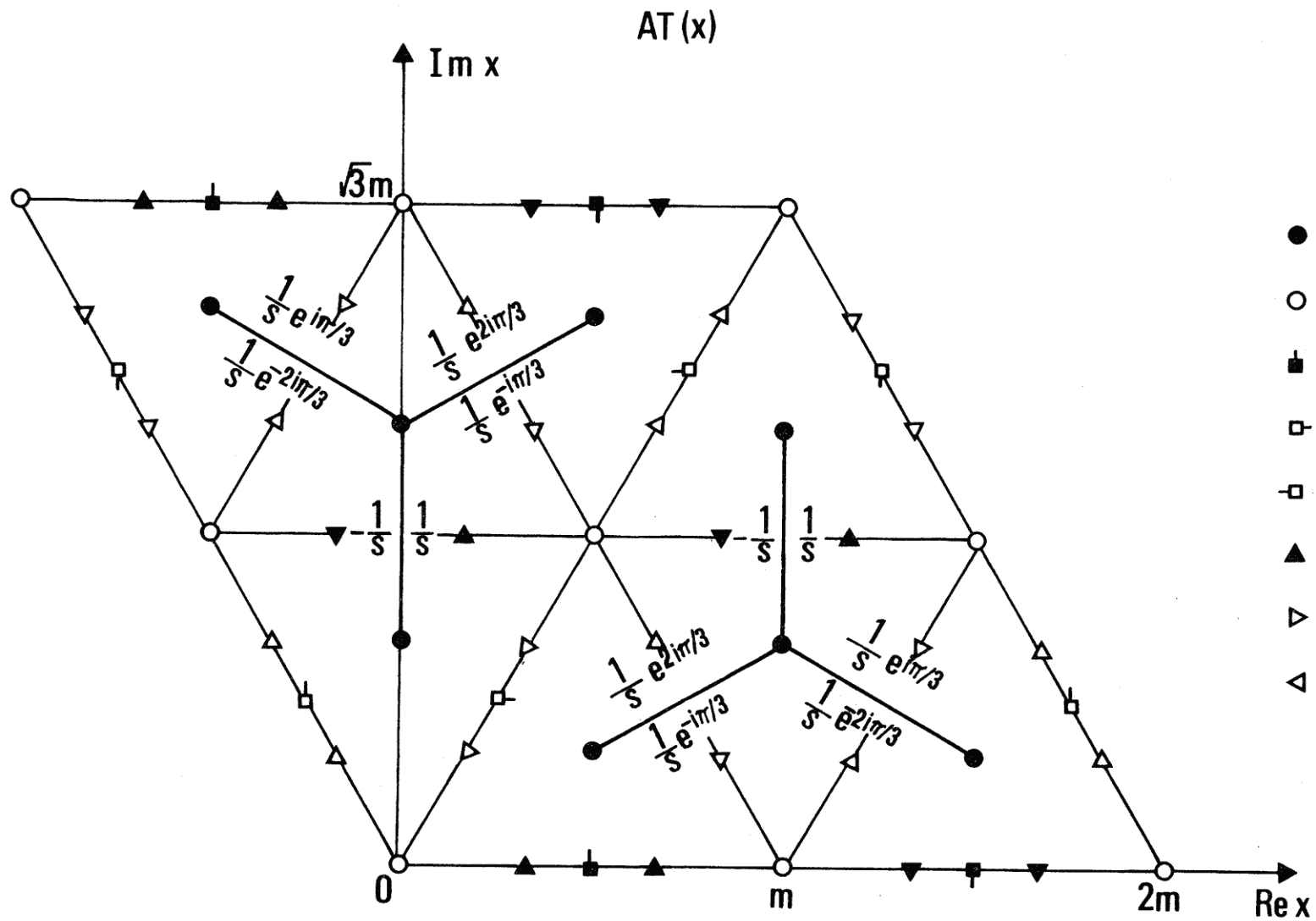
biamento di segno ogni volta che si passa attraverso uno zero. Resta invece da determinare come si comporta la funzione dai due lati dei tagli contenuti nei triangoli in questione.

Il ragionamento con cui si arriva ai valori indicati nella Fig.10 (che riporta i triangoli di riferimento su scala ingrandita) è abbastanza complicato, e vale la pena di esplicitarne in dettaglio i punti salienti, perché lo stesso modo di procedere si applica a tutte le FTG di ordine 6.

Si parte dalla conoscenza dell'andamento della  $\Phi_u$  lungo l'asse immaginario, ove la funzione è reale e negativa dal polo (nell'origine) fino al primo zero, poi diviene reale e positiva con valore massimo  $e_2$  (nel punto a metà strada tra i due zeri) fino allo zero successivo, e quindi ritorna reale e negativa. In corrispondenza,  $\Phi'u$  è sempre immaginaria pura, con parte immaginaria inizialmente negativa lungo l'asse immaginario positivo. Applicando le (36) si può ottenere  $\Phi_u$  e  $\Phi'u$  lungo tutti i raggi vettori uscenti dall'origine e passanti per gli zeri più vicini: si ottengono per la  $\Phi_u$  gli stessi valori che si hanno sull'asse immaginario, moltiplicati per un fattore di fase costante  $e^{\pm 2i\pi/3}$ , e per la  $\Phi'u$  sempre gli stessi valori immaginari puri, con parte immaginaria iniziale alternativamente positiva e negativa. Indicando con  $\rho$  il valore assunto dalla funzione  $\Phi_u/e_2$  nel tratto AA dell'asse immaginario ( $\rho$  parte da zero, raggiunge un massimo uguale a 1 e poi ritorna a zero) si trovano immediatamente i valori del modulo della funzione AT sui due lati del taglio AA; e, sfruttando opportunamente la periodicità e la simmetria per rotazione di  $60^\circ$ , si arriva al valore della funzione (a meno di un segno, che deve essere diverso dai due lati di ciascun taglio), lungo tutti i tagli riportati in Fig. 10. Resta da determinare la distribuzione dei segni.

Prendiamo per esempio il taglio  $B\bar{B}$ , caratterizzato da valori di  $u$





- VALORI DELLA FUNZIONE
- punti di diramazione
  - zeri
  - $\bar{2}^{1/3}$       ▣  $-\bar{2}^{1/3}$
  - $\bar{2}^{1/3} e^{i\pi/3}$       ▤  $\bar{2}^{1/3} e^{2i\pi/3}$
  - ◻  $\bar{2}^{1/3} e^{-2i\pi/3}$       ▥  $\bar{2}^{1/3} e^{-i\pi/3}$
  - ▲  $\bar{2}^{2/3}$       ▼  $-\bar{2}^{2/3}$
  - ▷  $\bar{2}^{2/3} e^{i\pi/3}$       △  $\bar{2}^{2/3} e^{2i\pi/3}$
  - ◁  $\bar{2}^{2/3} e^{-2i\pi/3}$       ▽  $\bar{2}^{2/3} e^{-i\pi/3}$

fig.10

dati da  $r e^{i\pi/6}$  ( $r$  reale  $> 0$ ): lungo di esso si ha  $\Phi u = e_2 \rho e^{2i\pi/3}$ ,  $\Phi' u = i\rho'$  [ $\rho, \rho'$  reali, soddisfacenti  $\rho^3 + \rho'^2 = 1$  come conseguenza della (31), e con  $\rho$  che si annulla agli estremi del taglio (punti B) ed è positivo tra di essi]. Calcoliamo  $\Phi(u e^{i\epsilon})$ , con  $\epsilon$  infinitesimo:

$$\Phi(u e^{i\epsilon}) \simeq \Phi u + \Phi' u (i\epsilon) = e_2 \rho e^{2i\pi/3} - r\rho' \epsilon e^{i\pi/6}.$$

Nell'intorno, p.es., dello zero B più vicino all'origine  $\rho'$  è positivo, mentre  $\rho$  cambia di segno. Supponendo per fissare le idee  $\epsilon < 0$ , e ponendo  $\delta = -r\rho'\epsilon/e_2 > 0$ , si ha:

$$\text{Re } \Phi(u e^{i\epsilon}) = e_2 (\rho \cos \frac{2\pi}{3} + \delta \cos \frac{\pi}{6}) = \frac{e_2}{2} (-\rho + \delta\sqrt{3})$$

$$\text{Im } \Phi(u e^{i\epsilon}) = e_2 (\rho \sin \frac{2\pi}{3} + \delta \sin \frac{\pi}{6}) = \frac{e_2}{2} (\rho\sqrt{3} + \delta)$$

Si vede che la fase di  $\Phi(u e^{i\epsilon})$ , quando  $\rho$  cambia di segno passando da valori negativi a valori positivi, varia dal quarto al secondo quadrante passando per il primo quadrante: perciò essa, nel limite  $\delta \rightarrow 0$ , va "letta" come  $e^{2i\pi/3}$ . Invece per  $\epsilon > 0$ , cioè  $\delta < 0$ , la stessa fase varia dal quarto al secondo quadrante passando per il terzo, e quindi va "letta" come  $e^{-4i\pi/3}$ . Estrahendo la radice quadrata dai due lati del taglio si ottengono quindi due valori diversi, che, inseriti nella (85), portano ai valori di AT riportati in Fig. 10 (ove si è posto  $s = \sqrt{r\rho/e_2}$ ).

Lo stesso argomento si può ripetere per gli altri tagli; ragionamenti dello stesso tipo possono essere utili anche per determinare rapidamente il valore di AT sui lati dei triangoli piccoli divisi a metà dai tagli.

Per proseguire ulteriormente in questa analisi, è utile richiamare la formula (diretta conseguenza di (80) e (85)):

$$S^3 + \frac{1}{S^3} = \frac{1}{A^3 T^3} = 4(\Phi u)^{3/2}$$

ove l'andamento di  $(\Phi u)^{3/2}$  è univocamente determinato sulla base delle

considerazioni svolte in precedenza. Combinando tale formula con le (86) si trovano immediatamente le relazioni: <sup>39)</sup>

$$\begin{aligned} S^3 &= 2 \wp^{3/2} + \wp' \\ 1/S^3 &= 2 \wp^{3/2} - \wp' \end{aligned} \tag{87}$$

In questo modo è possibile determinare il comportamento di  $S^3$  e  $1/S^3$  in tutto il piano complesso.

E' interessante vedere che nei punti corrispondenti ai poli di  $\wp$  e  $\wp'$  (punti di regolarità per  $A$  e  $T$ ) le (87) presentano dei poli tripli o degli zeri tripli, a seconda che le divergenze delle due funzioni in gioco si compensino o no: ne segue che i poli e gli zeri di  $S$  e  $1/S$  sono semplici, come è da aspettarsi. Invece i punti di diramazione corrispondenti agli zeri di  $\wp$  (punti di singolarità di  $A$  e  $T$ ) ancora sussistono, anche se le funzioni (87) assumono, in corrispondenza di tali punti, dei valori finiti e non nulli (e precisamente  $\pm i$ ); e quindi si mantiene anche per tali funzioni la caratteristica struttura dei tagli mostrata in Fig. 9. La stessa cosa si può dire per le funzioni  $S$  e  $\frac{1}{S}$ , ottenute estraendo la radice cubica delle (87) (secondo una prescrizione che verrà spiegata più avanti): inoltre per tali funzioni risulterà che nei punti di diramazione situati al centro delle stelle dei tagli, il valore non è definito, ma si possono avere tutte le possibili radici cubiche di  $+i$  (o di  $-i$ ), a seconda del modo in cui si arriva a tali punti. Nello studio di  $S$  (o di  $1/S$ ) si ha naturalmente un notevole aiuto tenendo conto delle richieste di periodicità e di simmetria per rotazione di  $60^\circ$  (espressa da una relazione del tipo della prima delle (29), con  $\epsilon =$  radice sesta dell'unità):

39) Da ora in poi, salvo che nei casi di ambiguità, verrà soppresso l'argomento  $u$  nella specificazione delle funzioni ellittiche. Si noti che le due funzioni (87) sono effettivamente l'una l'inversa dell'altra, a causa della relazione  $\wp'^2 = 4\wp^3 - 1$ .

$$S(ex) = eS(x) \quad (88)$$

E' immediato controllare che, come conseguenza di questa relazione, i valori di  $S$  nei sei punti di diramazione più vicini all'origine sono le sei radici seste di  $-1$  (indicate, come in precedenza, con il simbolo  $\eta$ ), prese nell'ordine girando in senso antiorario. Per fissarne il valore, si può ripetere il procedimento [applicato alle funzioni (82)] di sviluppo nell'intorno di uno di tali punti, già seguito in precedenza: si trova così che nel punto  $B$  di Fig. 9 più vicino all'origine  $S$  vale  $\eta_1 = e^{i\pi/6}$  40).

Per poter presentare in modo esauriente il comportamento di  $S$  nel piano complesso (da cui si ricava immediatamente quello di  $1/S$ ) è bene trovare una formulazione adatta dell'espressione della funzione lungo i tagli, analoga a quella già utilizzata in Fig. 8 per  $A_4$  e  $T_4$ .

Considerando, per fissare le idee, ancora il taglio  $AA$  di Fig. 9, e usando la notazione introdotta in precedenza, lungo di esso la prima delle (87) può essere scritta nella seguente maniera

$$S^3 = \pm \rho^{3/2} + i\rho'$$

ove il segno  $+$  si ha a destra del taglio, il segno  $-$  a sinistra, in accordo con le indicazioni di Fig. 10. Ricordando che  $\rho'$  (nella direzione che si allontana dall'origine) cresce da  $-1$  a  $1$ , e che vale la relazione (già ricordata)  $\rho^3 + \rho'^2 = 1$ , è evidente che si può definire opportunamente una variabile reale  $\phi$  tale da aversi  $\rho' = \sin\phi$ ,  $\rho^{3/2} = |\cos\phi|$ : di conseguenza  $S^3$  dai due lati del taglio vale rispettivamente  $e^{i\phi}$  e

---

40) Da ora in poi si userà la notazione  $\eta_k = e^{i\left[\frac{\pi}{6} + (k-1)\pi/3\right]}$

$-e^{-i\phi}$ . Scegliamo  $\phi$  in modo tale che sia  $S^3 = e^{i\phi}$  alla sinistra del taglio: ciò implica  $\cos\phi \leq 0$ . L'intervallo di variazione per  $\phi$  si determina, a meno di multipli di  $2\pi$ , imponendo che nel punto di diramazione più vicino all'origine entrambe le caratterizzazioni di  $S^3$  assumano il valore  $-1$ ; ne segue che  $\phi$  può coprire l'intervallo  $(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  o qualunque altro intervallo spostato rispetto ad esso di un multiplo di  $2\pi$ . Tuttavia un'ulteriore restrizione su  $\phi$  (che lo determina a meno di multipli di  $6\pi$ ) si ottiene imponendo che anche la funzione  $S$  nel punto di diramazione considerato assuma il valore  $\eta_2 = i$  (richiesto dalla (88)). Questa richiesta è compatibile con la scelta  $\frac{3\pi}{2} \geq \phi \geq \frac{\pi}{2}$  (modulo  $6\pi$ ), e implica che, nell'estrarre la radice cubica,  $-e^{-i\phi}$  vada letta come  $e^{i(3\pi-\phi)}$ . Sulla sinistra del taglio, quindi,  $S$  vale  $e^{i\phi/3}$ , e sulla destra  $e^{i(\pi-\phi/3)}$ . Tuttavia è sempre possibile, per ragioni di convenienza, ridefinire  $\phi$  in modo da avere per esso un intervallo di variazione (di ampiezza  $\pi$ ) scelto a piacere: p.es., sostituendo  $\phi$  con  $\frac{3\pi}{2} - \phi$  si ottiene  $0 \leq \phi \leq \pi$ , e  $S$  vale  $e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{3})}$  a sinistra del taglio e  $e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\phi}{3})}$  a destra.

Lo stesso ragionamento si può ripetere anche per gli altri tagli della stella, ed estendere, mediante le formule di simmetria più volte ricordate, alle altre strutture di singolarità: si ottiene in questo modo il quadro mostrato in Fig. 11 per la funzione  $S$ , da cui è immediatamente deducibile quello per  $1/S$  (si è assunta per tutti i tagli la caratterizzazione  $0 \leq \phi \leq \pi$  andando da una punta al centro della stella). Si noti che nei quattro punti di diramazione appartenenti a una stella la funzione  $S$  assume tutti e sei i valori di  $\eta_k$ : ai vertici si hanno i tre valori con  $k$  pari (o dispari), e in corrispondenza del centro si hanno gli altri tre valori (con parità opposta di  $k$ ) a seconda dello "spicchio" di piano complesso, delimitato dai bracci della stella, entro cui ci si muove per raggiungere il punto in questione. In Fig. 11 si è posto  $r = e^{i\phi/3}$ ,  $r^* = e^{-i\phi/3}$ . È da notare che la discontinuità di  $S$  attraverso un qualsiasi taglio (attraversato in senso orario rispetto al centro della stella) è data dal prodotto  $(2i \sin\phi/3) \cdot \eta$ , ove  $\eta$  è il valore della funzione all'estremo libero del taglio (punta della stella).

Come già affermato in precedenza, il grafico di Fig. 11 può essere uti-

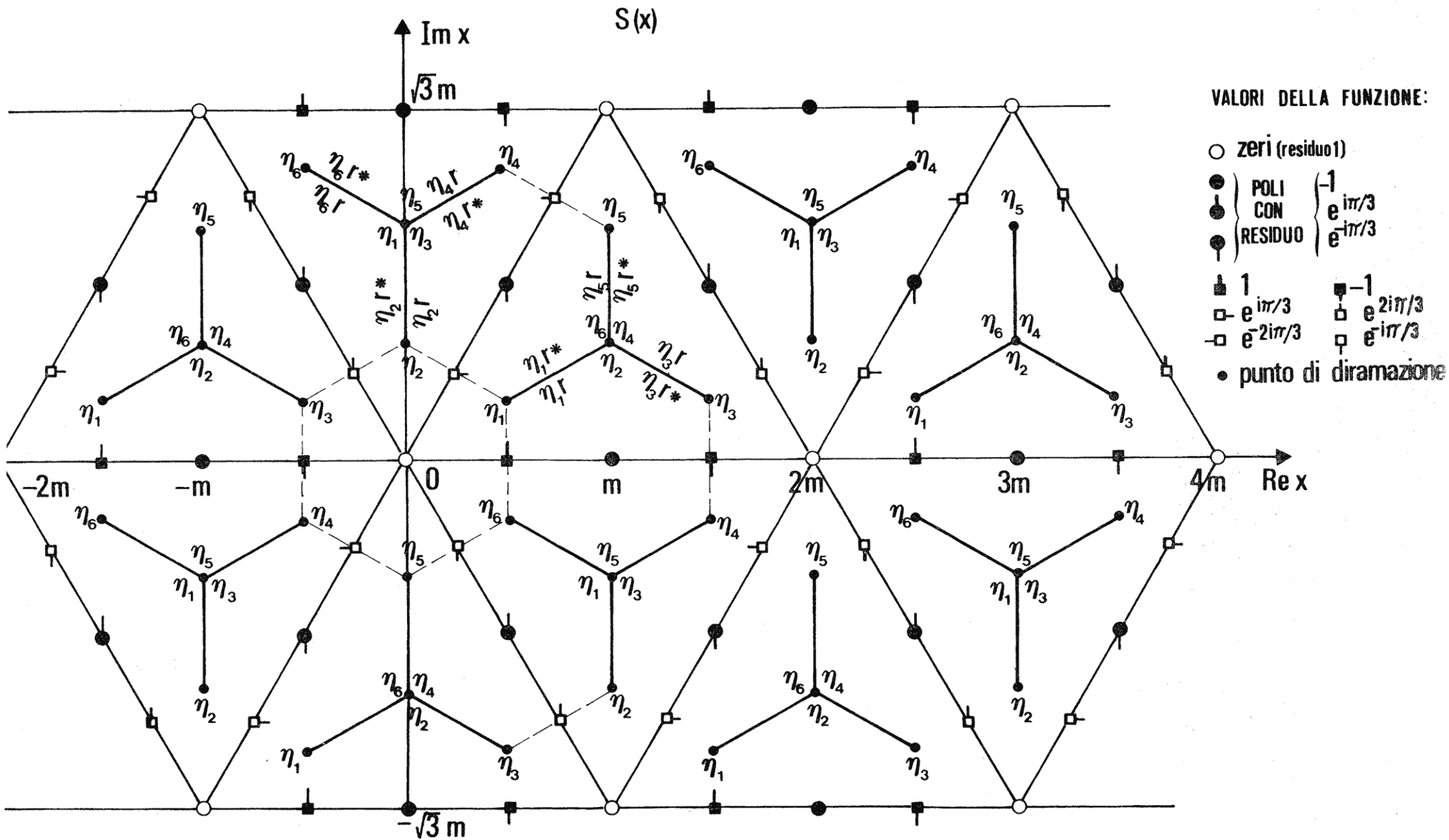


fig.11

lizzato anche per rappresentare la funzione  $1/S$ , modificando il significato dei simboli grafici (cioè, p.es., scambiando tra loro il simbolo indicante gli zeri con quello indicante i poli), sostituendo alle  $n_i$  i loro inversi ( $n_6$  per  $n_1$ ,  $n_5$  per  $n_2$ ,  $n_4$  per  $n_3$ , e viceversa), e scambiando tra loro  $r$  e  $r^*$ .

Un'altra interessantissima proprietà del grafico di Fig. 11 si può ottenere congiungendo con dei segmenti di retta le punte di diverse stelle di singolarità più vicine tra loro (alcuni esempi sono dati dalle linee tratteggiate in Figura). Tali segmenti intersecano i lati dei triangoli base in corrispondenza dei punti ove la funzione vale una radice sesta dell'unità. In questo modo il piano complesso viene diviso in un pavimento di esagoni con il lato uguale alla lunghezza di un taglio (pari a  $m/\sqrt{3}$ ), centrati negli zeri e nei poli della funzione. Analogamente a quanto già visto per  $S_4$ , anche qui è immediato verificare che, percorrendo il perimetro interno di uno di tali esagoni (e rimanendo ovviamente sempre dallo stesso lato dei tagli) la funzione percorre con continuità l'intero cerchio unitario. E' dunque immediato concludere che la funzione, all'interno di uno di tali esagoni, ha modulo sempre  $< 1$  (se al centro c'è uno zero) o sempre  $> 1$  (se c'è un polo). Quattro di tali esagoni, adiacenti e disposti in modo simmetrico (come, p.es. quelli delineati in Fig. 11) formano un campo fondamentale della funzione (che si ottiene anche con due triangoli base adiacenti); è facile controllare che l'area di quattro esagoni è uguale a quella di due triangoli. La distribuzione dei valori della funzione in un campo fondamentale non è simmetrica; per  $S$ , che in ogni campo ha uno zero e tre poli, si hanno tre esagoni ove  $|S| > 1$  e uno solo ove  $|S| < 1$ , mentre per  $1/S$ , che in ogni campo ha tre zeri e un polo (con residuo uguale a 1), si ha l'opposto.

Combinando il risultato di Fig. 11 con quello di Fig. 10 è possibile

ottenere l'andamento nel piano complesso di un qualsiasi monomio di grado pari in  $A$  e  $T$  (includente eventualmente potenze negative), perché esso può essere sempre scritto in termini di  $AT$  e  $S$ . I casi più interessanti sono quelli di  $A^2 = S A T$  e  $T^2 = \frac{AT}{S}$ , i cui diagrammi sono mostrati in Fig. 12a e 12b rispettivamente. Nelle Figure si è posto  $\gamma = e^{i\phi/3} (2\sin\phi)^{-1/3}$ , con la stessa convenzione per  $\phi$  usata in Fig. 11, e prendendo il valore aritmetico per la radice cubica.<sup>41)</sup>

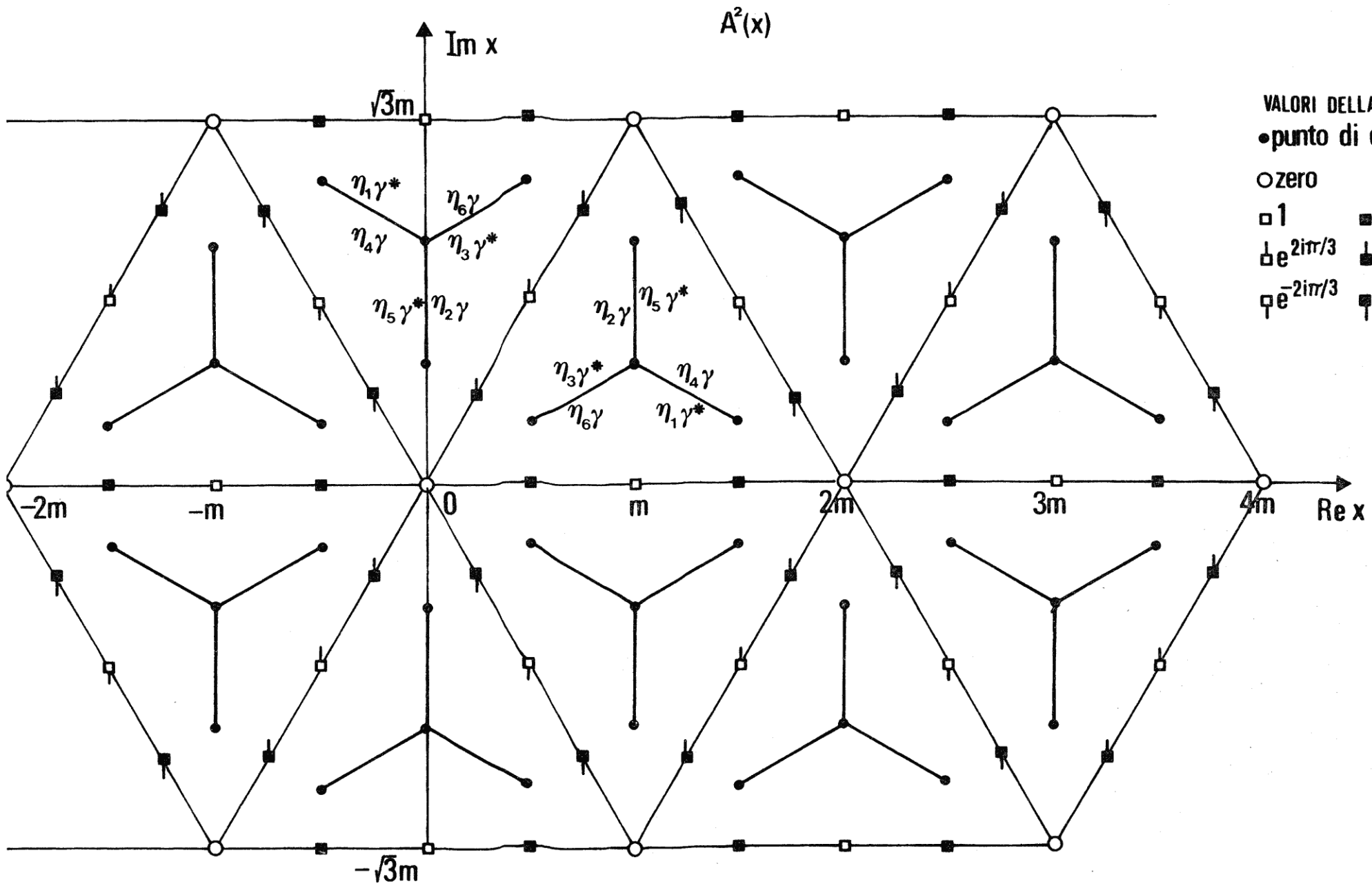
Per ottenere il comportamento di  $A$  e  $T$  si deve estrarre ulteriormente la radice quadrata da  $A^2$  e  $T^2$ . Tuttavia tale estrazione richiede necessariamente l'introduzione di nuovi tagli oltre a quelli già noti di  $A^2$  e  $T^2$ . Che sia questo il caso si vede immediatamente p.es. dalla considerazione che  $T^2$  è reale, finito e non negativo sul perimetro di tutti i triangoli base: lungo uno di questi perimetri quindi la funzione  $T$  è reale e finita, e deve cambiare di segno ogni volta che attraversa uno zero (semplice).

Ma gli zeri su di un perimetro sono tre: quindi per non cadere in contraddizione, è necessario che vi sia un ulteriore cambiamento di segno, e ciò implica la presenza di un nuovo taglio. E' ovvio che tali tagli addizionali devono essere disposti in modo da intersecare il perimetro di tutti i triangoli base: tuttavia, se vogliamo che l'asse reale non sia intersecato da tagli, e che si mantengano le formule di simmetria (29) (con  $\epsilon =$  radice sesta dell'unità) e la periodicità  $4m$ , si viene a ripetere, su scala ingrandita, lo stesso ragionamento svolto a proposito dei tagli trovati in precedenza: cioè i nuovi tagli richiesti devono unire i centri di quattro stelle disposte a loro volta a stella, all'interno di un triangolo di lato  $4m$  e contenente quattro triangoli base

---

(41) E' interessante verificare sui diagrammi di Fig.12 le proprietà di simmetria già menzionate, e la validità della (80) lungo tutti i tagli.





VALORI DELLA FUNZIONE  
 • punto di diramazione

○ zero  
 □ 1  
 ◻  $e^{2i\pi/3}$   
 ◻  $e^{-2i\pi/3}$

■  $2^{-1/3}$   
 ▣  $2^{-1/3} e^{2i\pi/3}$   
 ▣  $2^{-1/3} e^{-2i\pi/3}$

fig. 12a

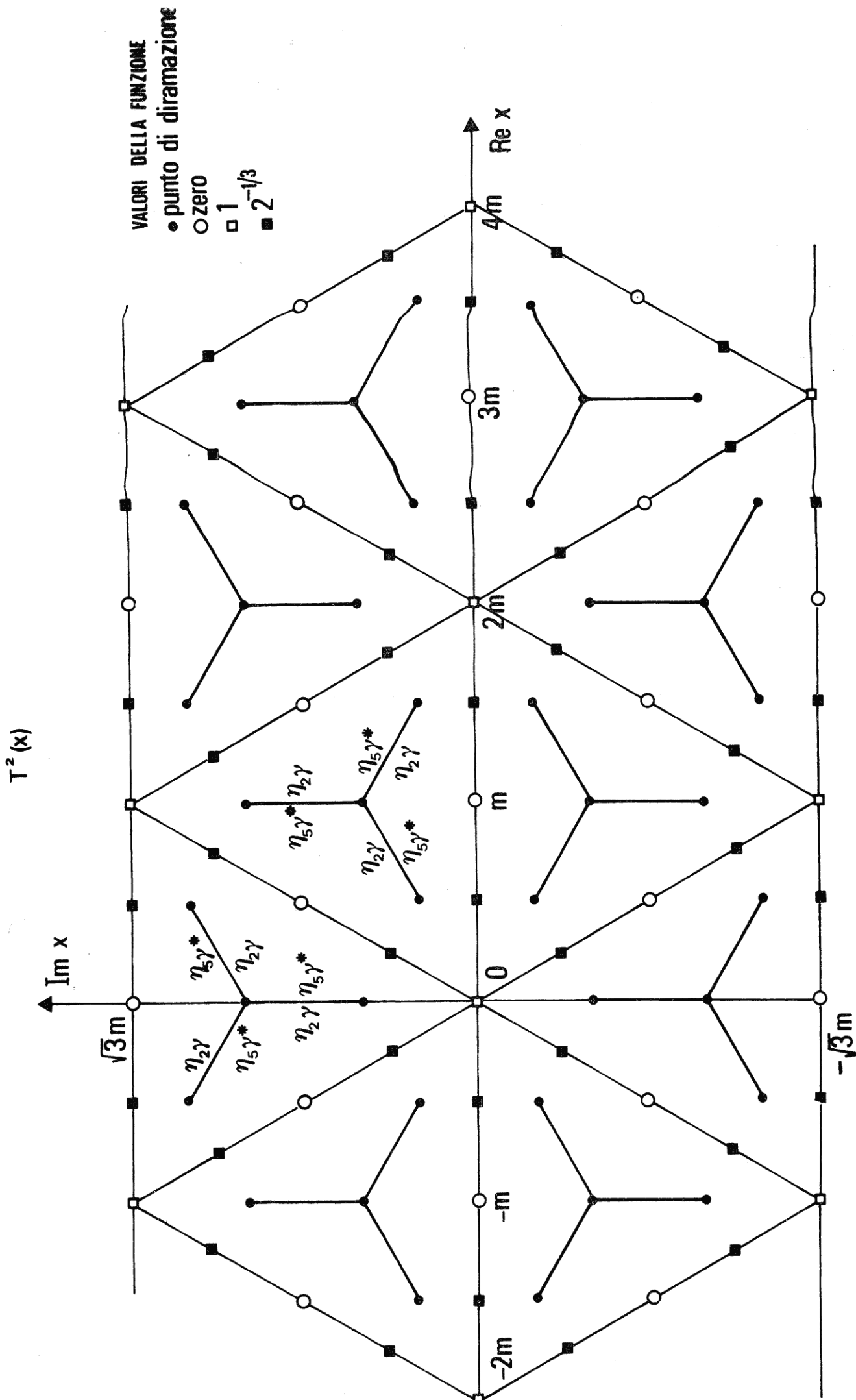


fig.12 b

(v. Fig. 13), ove i nuovi tagli sono indicati con segmenti tratteggiati). Per ragioni di chiarezza del disegno, non è stata riportata la specificazione dei valori delle funzioni in corrispondenza dei tagli, per così dire, "ereditati" da  $A^2$  e  $T^2$ : tali valori sono ottenibili da quelli riportati in Fig. 12 a meno di un segno, che può essere dedotto per confronto con i valori dei punti più vicini.<sup>42)</sup> Sui nuovi tagli in Fig. 13 sono indicati, in corrispondenza del loro punto di mezzo, entrambi i valori assunti da  $A(x)$  dai due lati del taglio. Invece per  $T(x)$  in tali punti si ha uno zero, che però non è uno zero "normale", perché la funzione attraversandolo non cambia segno (in quanto attraversa allo stesso tempo anche il taglio).

Manipolando opportunamente le formule (85) e (87) si arriva alla seguente espressione compatta per  $A(x)$  e  $T(x)$ :

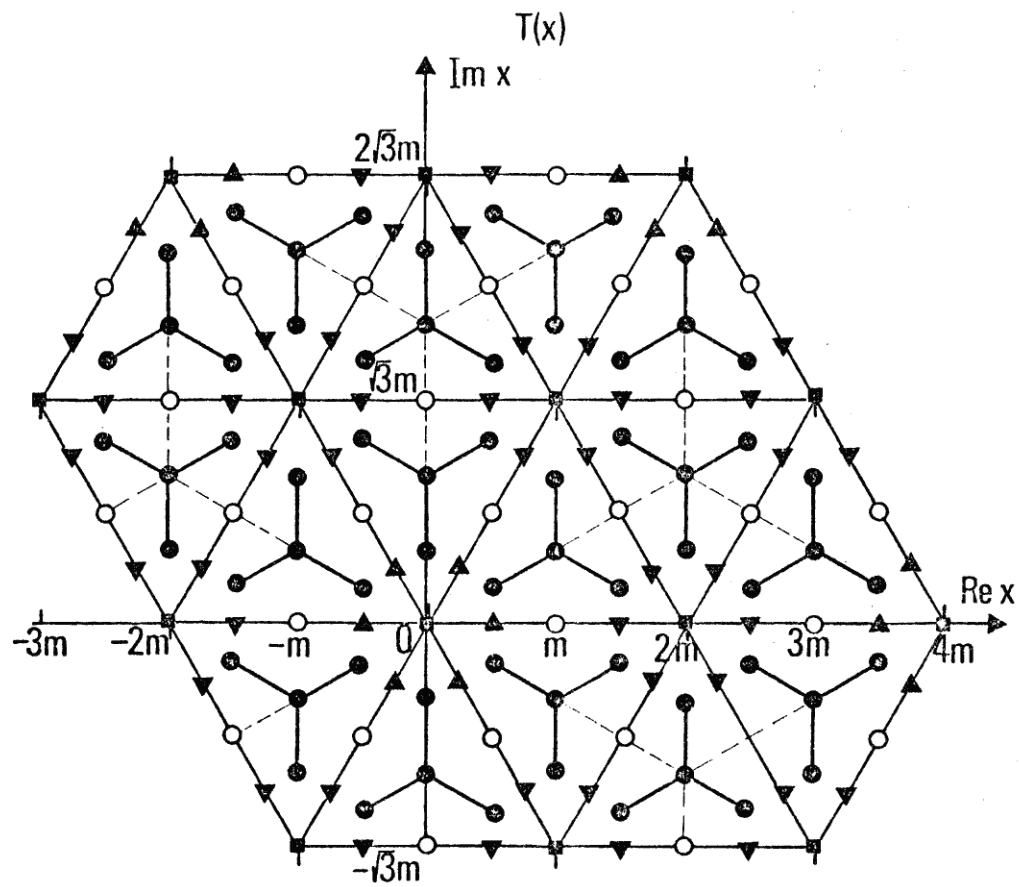
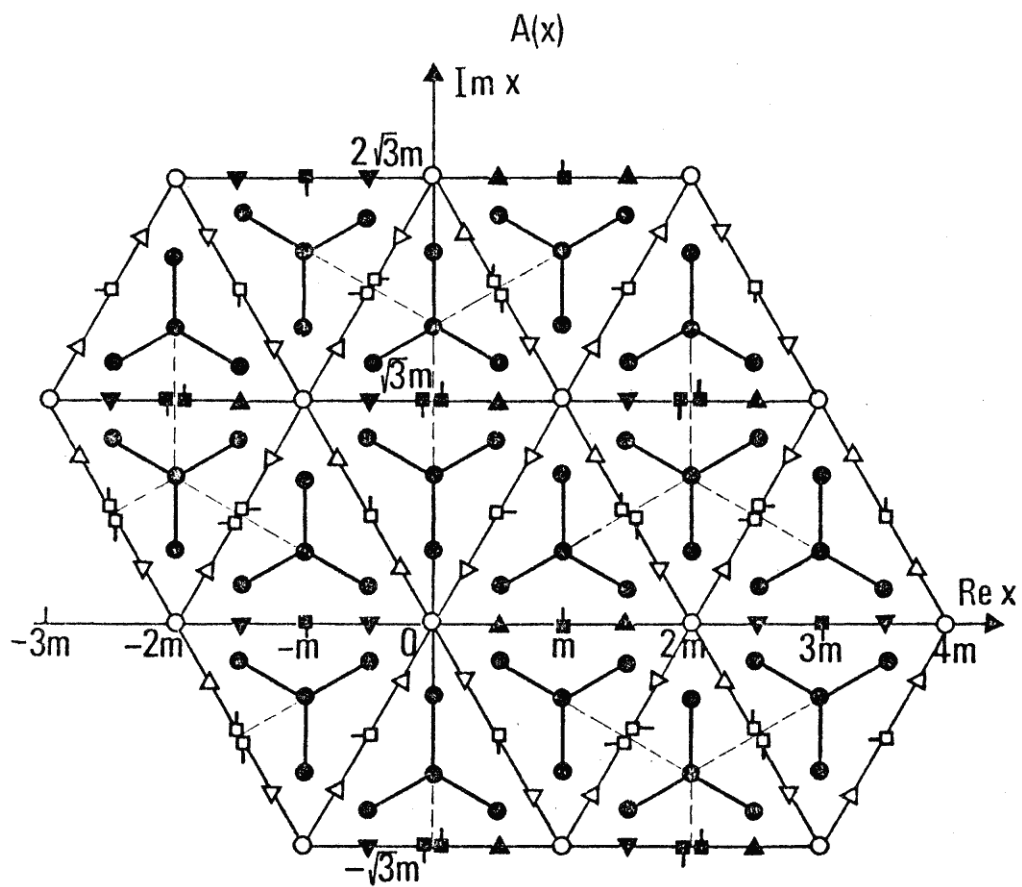
$$\frac{A(x)}{T(x)} = \left[ \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{\rho' u}{2(\rho u)^{3/2}} \right) \right]^{1/6} \quad (89)$$

ove va ricordato che  $u = \frac{x}{e_2}$ , e che per la  $\rho^{3/2}$  si deve utilizzare la caratterizzazione dei tagli indicata in Fig. 10. Gli schemi di Fig. 13 si possono ottenere anche a partire da queste formule.

È interessante far notare che alcune combinazioni simmetriche di  $A$  e  $T$  hanno un numero di punti di diramazione minore di quello delle funzioni base. È questo il caso della funzione  $A^2+T^2$  (e, come diretta conseguenza, anche di  $A^4+T^4$ ), per cui si cancellano tutti i tagli paralleli all'asse immaginario (come il taglio  $AA$  di Fig. 9). All'estremo libero di tali segmenti  $A^2+T^2$  ha uno zero semplice, mentre all'altro estremo (corrispondente, nelle Figure precedentemente mostrate, al centro della struttura a stella) presenta una singolarità di tipo particolare,

---

42) Lungo i tagli in questione, le funzioni sono sempre espresse da un'opportuna radice dodicesima di -1 moltiplicata per  $e^{+i\phi/6} (2\sin\phi)^{-1/6}$  (radice aritmetica).



VALORI DELLE FUNZIONI:

● punto di diramazione	■ 1	□ $e^{i\pi/3}$	◻ $e^{2i\pi/3}$	▲ $\frac{\sqrt{2}}{6}$	▷ $\frac{\sqrt{2}}{6} e^{i\pi/3}$	△ $\frac{\sqrt{2}}{6} e^{2i\pi/3}$
○ zero	■ -1	□ $e^{-i\pi/3}$	◻ $e^{-2i\pi/3}$	▼ $-\frac{\sqrt{2}}{6}$	◁ $\frac{\sqrt{2}}{6} e^{-i\pi/3}$	▽ $\frac{\sqrt{2}}{6} e^{-2i\pi/3}$

fig. 13

ove la funzione diviene infinita da un lato della restante struttura di tagli, e si annulla dall'altra parte.<sup>43)</sup>

Per avviare a conclusione lo studio di queste funzioni, resta da parlare del problema delle formule di addizione e sottrazione. E' chiaro che delle formule di tal tipo, valide senza ambiguità su tutto il piano complesso, possono essere scritte solo per le funzioni che non hanno punti di diramazione, e in particolare per  $A^2T^2$  e  $S^3 - \frac{1}{S^3}$ , per cui si possono sfruttare direttamente le formule di addizione per la  $\mathbb{P}u$ . Tuttavia l'espressione esplicita di tali formule risulta essere assai complicata e farraginosa, e non sembra possibile il riuscire a metterla sotto una forma semplice, come è stato ottenuto per  $n=3$  e  $n=4$ . Quindi tali formule non verranno riportate. Più praticabili, pur se ancora piuttosto farraginose, sono invece le formule di duplicazione che possono essere espresse tutte in termini di  $A^2T^2$  con la sostituzione  $(T^6 - A^6)^2 = 1 - 4A^6T^6$ :

$$A^2T^2(2x) = \frac{4A^2T^2(T^6 - A^6)^2}{1 + 32A^6T^6} \quad (90)$$

$$\frac{S^3(2x)}{1/S^3(2x)} = \frac{1}{2} \frac{(1 + 32A^6T^6)^{3/2} + (1 - 80A^6T^6 - 128A^{12}T^{12})}{[2AT(T^6 - A^6)]^3}$$

---

43) Probabilmente questo comportamento va connesso al fatto che, in un punto di diramazioni divergente di tipo radice quadrata (quale è mostrato da  $A^2+T^2$ ) deve uscire un numero dispari di tagli per non precludere l'accesso a una parte della superficie di Riemann. Poiché le proprietà di simmetria delle funzioni richiedono che da un tale punto escano due tagli, esso non può comportarsi come un punto di diramazione ordinario.

Queste formule possono essere usate correntemente sull'asse reale, ove l'estrazione delle radici non presenta problemi (si deve solo fare attenzione ai segni delle funzioni, tenendo conto dell'andamento descritto nella Parte I), combinate in modo da ricavare le formule per A e T. Il loro uso può essere esteso senza eccessive complicazioni a una striscia di piano complesso intorno all'asse reale, sufficientemente lontana dai tagli, di spessore progressivamente decrescente con l'allontanarsi dall'origine, e alle analoghe strisce disposte intorno alle rette che delimitano i perimetri dei triangoli base (e che, per A e T, non incontrano tagli). Nelle vicinanze dei tagli, invece, con l'eccezione delle poche combinazioni prive di punti di diramazione, le (90) non sono più utilizzabili.

Come nei casi precedenti, concludiamo con gli sviluppi in serie di Taylor delle funzioni intorno a  $x = 0$ , che risultano:

$$A(x) = x - \frac{5}{42} x^7 + \frac{265}{6552} x^{13} - \frac{253595}{15685488} x^{19} + \dots$$

$$T(x) = 1 - \frac{x^6}{6} + \frac{25}{504} x^{12} - \frac{15775}{825552} x^{18} + \dots$$

$$S(x) = x + \frac{x^7}{21} - \frac{x^{13}}{819} + \frac{368}{980343} x^{19} + \dots$$

in accordo col risultato generale ottenuto nella Parte I.

### III. 8 Cenno alle funzioni di ordine 5.

Come già accennato nell'Introduzione, e discusso più in dettaglio nel § II.3, le funzioni di ordine 5 sono il caso più semplice di FTG per cui le proprietà di simmetria sfruttate nei casi precedenti non possono essere più mantenute insieme, e che quindi presentano una maggiore difficoltà nel loro studio. Ricollegandosi a quanto detto nella Parte I,

le due costanti  $b$  e  $m$ , che caratterizzano il comportamento di tali funzioni sull'asse reale,<sup>44)</sup> sono legate tra loro, come conseguenza della formula (8'), dalla relazione

$$b = \frac{\sqrt{5}-1}{2} m$$

Ne segue che un punto situato a distanza  $b$  da un estremo divide in rapporto aureo un segmento di lunghezza  $m$ ; analogamente, l'origine divide in rapporto aureo il segmento dell'asse reale che si estende da  $-b$  a  $+m$ . La quantità  $P = m+2b$ , che nella Parte I era stata suggerita quale periodo delle funzioni sull'asse reale, vale  $\sqrt{5} m$ . In realtà si mostrerà che, se si vuole ottenere una ragionevole rappresentazione di tali FTG nel piano complesso, questa ipotesi non potrà essere mantenuta.

Come già discusso nel §II.2, nei punti di singolarità delle funzioni  $A$  e  $T$  (in particolare, nei punti  $-b$  e  $m+b$  dell'asse reale) si hanno dei punti di diramazione in cui la funzione diverge con potenza  $-\frac{1}{3}$ . Inoltre nel §II.3 si è visto che le proprietà di simmetria per rotazione di  $72^\circ$  (espresse dalle condizioni (29)) non sono compatibili con la periodicità reale  $P$  nel piano complesso, anche se opportunamente tagliato. Bisogna quindi lasciare cadere una delle due richieste. E' chiaro che è di gran lunga preferibile rinunciare alla periodicità  $P$  e mantenere invece le condizioni (29). Tuttavia sembra ragionevole il continuare a richiedere che, lungo l'asse reale (e, di conseguenza, su tutte le rette ottenute ruotando l'asse reale di multipli di  $72^\circ$ ) le singolarità si susseguano con periodicità  $P$ . Questo fornisce una struttura di infinite singolarità dello stesso tipo, che si estende su tutto il piano complesso, e che è rappresentata nei diagrammi di Fig. 14. Aggiungiamo l'ulteriore ipotesi che per le funzioni  $A$  e  $T$  le suddette singolarità siano le sole esistenti. (E' chiaro che tale ipotesi,

---

44) Anche in questo paragrafo verrà omissa l'indice 5 in tutti i simboli.

suggerita dall'analogia con il caso  $n=3$ , deve essere verificata a posteriori).

In tali condizioni, resta da vedere come congiungere tali singolarità con un sistema di tagli che mantenga valide le condizioni (29), con  $e =$  radice quinta dell'unità. La più semplice maniera di ottenere tale risultato presenta due diversi schemi di base (entrambi mostrati nella Fig. 14), ciascuno dei quali ammette una variante banale ottenuta riflettendo tutti i tagli rispetto all'asse reale. E' da notare che in entrambi i casi sull'asse reale le funzioni non si mantengono reali, e probabilmente neppure periodiche: per avere una funzione reale su tutto l'asse reale, infatti, da ogni punto di diramazione giacente su di esso dovrebbero partire due tagli, e ciò è incompatibile con le condizioni (29).<sup>45)</sup>

Da questo esame preliminare non appare possibile ottenere ulteriori informazioni sul comportamento di tali funzioni: uno studio più approfondito richiede l'inversione di integrali abeliani del tipo

$$\int_0^x dx' (1+x'^5)^{-2/5} \quad [ \text{questo è l'integrale che definisce } \text{arcS}(x) ], \text{ oppure}$$
$$\int_0^x dx' / \sqrt{1-4x'^5} \quad [ (\text{questo integrale definisce } \text{arcAT}(x)) ], \text{ che l'Autore della}$$

presente nota non è assolutamente in grado di portare avanti. Si è ciononostante accennato al problema della determinazione di tali funzioni, perché appaia chiaro quanto è più grande la difficoltà di ottenere una soluzione rispetto ai casi già trattati. Ovviamente questa considerazione si

---

45) Sarebbe possibile mantenere le funzioni reali (e forse anche periodiche) sull'asse reale, e allo stesso tempo la validità delle (29), soltanto dividendo il piano complesso in tante regioni concentriche non comunicanti tra loro, delimitate da un perimetro a forma di stella a cinque punti sempre più grande. E' chiaro che tale soluzione non ha interesse matematico.



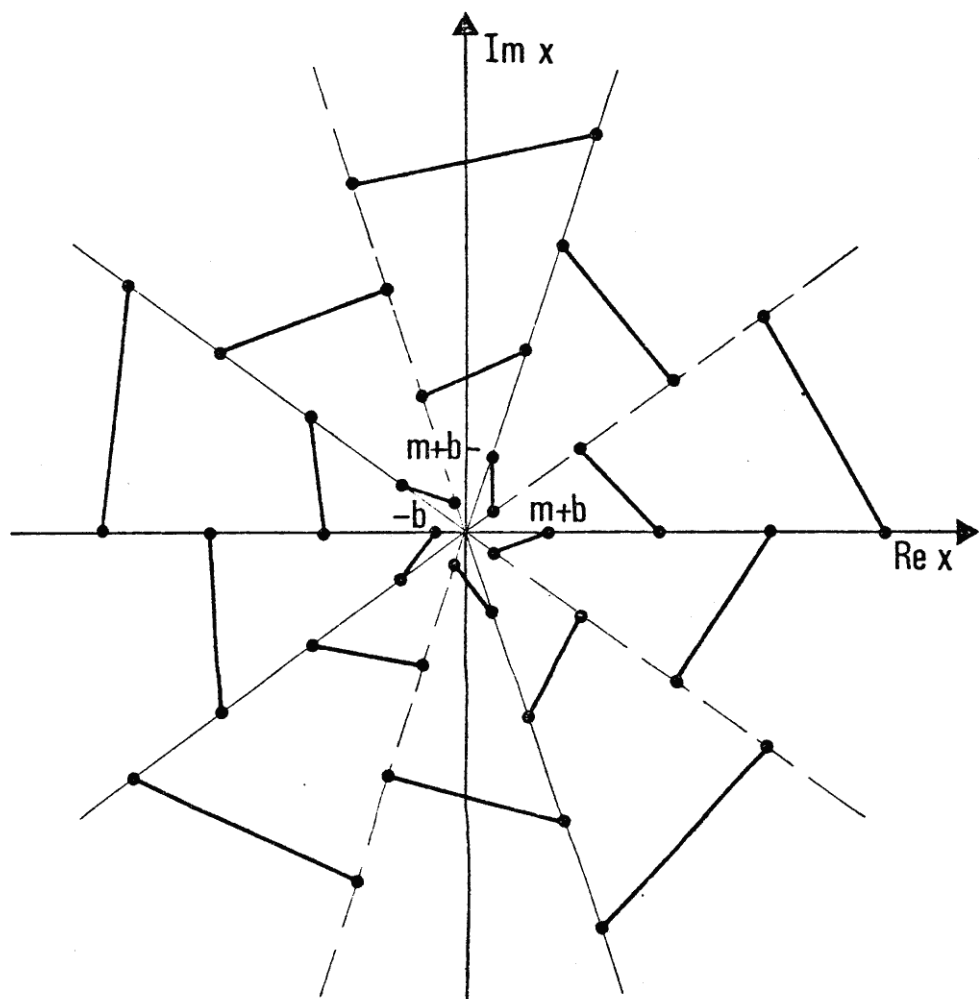
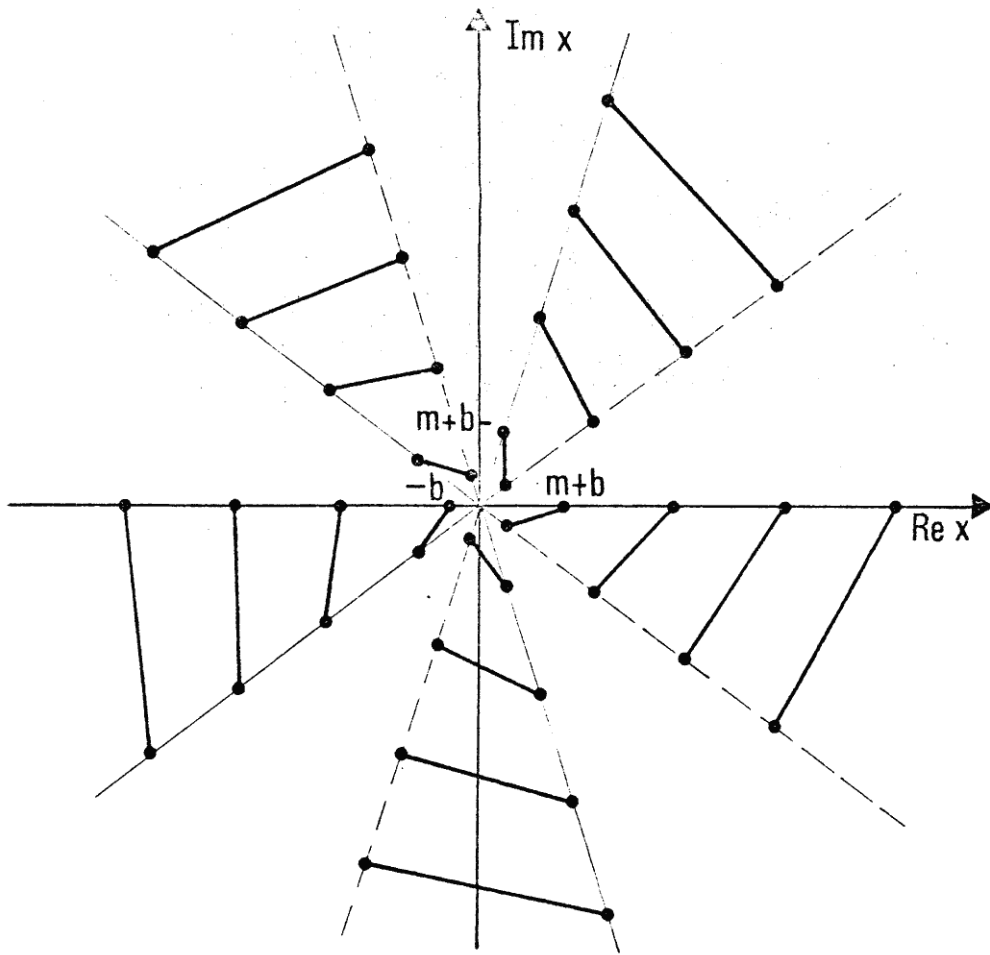


fig. 14

estende a tutti gli altri casi con  $n > 6$ .<sup>46),47)</sup>

- 
- 46) Un caso che può presentare un certo interesse è quello di  $n=8$ , che costituisce il primo esempio di FTG di ordine pari (per le quali si mantiene la periodicità sull'asse reale e su tutte le rette ottenute sfruttando la simmetria (29)) presumibilmente non trattabile in termini di funzioni ellittiche. Infatti, anche se è possibile tentare di ricollegare le FTG di ordine 8 a quelle di ordine 4 attraverso il procedimento con cui l'ordine 6 è stato ricollegato all'ordine 3, diversamente da tale caso l'integrale ottenuto non sembra esprimibile attraverso le FTG di ordine 4 e altre funzioni note. Tuttavia la collocazione delle singolarità di tale FTG (almeno di quelle più vicine all'origine) si può ottenere integrando numericamente la (27) con  $p=4$ ,  $q = 1/2$  e  $\phi$  coincidente (per la (27')) con una singolarità di  $A_4$  e  $T_4$ .
- 47) Si noti che, per qualsiasi  $n$  intero, in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine (se  $n=5$  per  $|x| < b$ ), le FTG possono essere calcolate con precisione grande quanto si vuole attraverso gli sviluppi in serie (11), sempre calcolabili a partire dal sistema (4) (direttamente o mediante tecniche basate su di esso).

P A R T E III

TEORIA DELL'ESTENSIONE DELLE FTG.

III.1 Il concetto di estensione delle FTG: alcune proprietà generali.

Le FTG studiate in precedenza (di ordine 3,4 e 6), pur mostrando un gran numero di interessanti proprietà, rappresentano delle funzioni ellittiche molto particolari (quelle in cui uno dei due invarianti è nullo): e la cosa è da aspettarsi, perché la definizione delle FTG di un certo ordine non contiene alcun parametro, e quindi può rappresentare una funzione, ma non una classe di funzioni (dipendenti, appunto, da un parametro oltre che dall'argomento vero e proprio). Limitandosi alla classe delle funzioni ellittiche riconducibili ad una  $\Phi_u$  di Weierstrass con invarianti reali <sup>48)</sup>, è spontaneo chiedersi se non sia possibile, per così dire, "estendere" le FTG di ordine  $n$  (ove per  $n$  si considerano solo i valori 3, 4 e 6), facendole dipendere da un parametro aggiuntivo e reale  $\lambda$ , in modo da descrivere, tramite tali funzioni, la classe suddetta (naturalmente, il parametro aggiuntivo delle  $\Phi_u$  potrà sempre essere espresso in funzione di  $\lambda$ ). Si cercherà ovviamente di conservare per le FTG estese, per quanto è possibile, l'analogia con le FTG ordinarie: queste ultime dovranno essere ottenute in corrispondenza di un particolare valore di  $\lambda$ , che, senza perdita di generalità, si può sempre supporre  $\lambda = 0$ .

Le FTG estese saranno indicate con i simboli  $A_n(x|\lambda)$ ,  $T_n(x|\lambda)$ ,  $S_n(x|\lambda)$ ; naturalmente, una volta fissato l'ordine  $n$ , la sua indicazione potrà essere soppressa, e lo stesso discorso vale per gli argomenti, come del resto è stato ripetutamente fatto nelle trattazioni precedenti.

Per definire la procedura di estensione, si inizierà col supporre (fissato  $n$ ) che le funzioni  $A$  e  $T$  soddisfino la seguente generalizzazione della (2):

$$Q(A,T) = A^n + T^n + \lambda F(A,T) = 1 \quad (91)$$

---

(48) Per tali  $\Phi_u$  il parametro aggiuntivo da cui esse dipendono può essere sempre definito in modo da risultare reale.

ove  $F(A,T)$  è una funzione di  $A$  e  $T$  (che può eventualmente dipendere anche da  $\lambda$  in modo esplicito): essa, per mantenere le principali proprietà di simmetria caratteristiche alle FTG, si suppone simmetrica in  $A$  e  $T$ :

$$F(A,T) = F(T,A) \quad (92)$$

e, per conservare la condizione  $A(0) = 0, T(0) = 1$ , deve verificare la relazione:

$$F(0,1) = F(1,0) = 0 \quad (93)$$

Come già detto, per  $\lambda = 0$  le FTG estese devono riprodurre le FTG ordinarie.

Derivando le (91) rispetto a  $x$ , si ottiene

$$\left( n A^{n-1} + \lambda \frac{\partial F}{\partial A} \right) A' + \left( n T^{n-1} + \lambda \frac{\partial F}{\partial T} \right) T' = 0 \quad (94)$$

La (94) è compatibile con la seguente generalizzazione del sistema differenziale (4):

$$A' = T^{n-1} + \frac{\lambda}{n} \frac{\partial F}{\partial T} \quad (95)$$

$$T' = -\left( A^{n-1} + \frac{\lambda}{n} \frac{\partial F}{\partial A} \right)$$

Quando le FTG estese soddisfano il sistema (95) si dice che l'estensione è semplice.

C'è tuttavia un altro modo di generalizzare il sistema (4): partendo infatti dal caso di una variabile reale, si può nuovamente utilizzare la definizione data all'inizio del §I.1, assumendo come curva parametrica nel piano  $\xi_n$  (al posto della  $\xi^n + \eta^n = 1$ ) la  $Q(n,\xi) = 1$ , che, per le ipotesi (92) e (93), passa ancora per i punti  $(1,0)$  ed  $(0,1)$  ed è simmetrica rispetto alla retta

$\eta - \xi = 0$ .<sup>49)</sup> E' utile tuttavia introdurre in tale definizione una possibilità in più, ammettendo che l'area del settore ivi menzionato non debba essere necessariamente  $\frac{1}{2} x$ , ma sia data da  $\frac{1}{2} a(x)$ , ove  $a(x)$  è un'opportuna funzione da determinare (che deve ovviamente dipendere da  $\lambda$  e ridursi a  $x$  per  $\lambda = 0$ , e soddisfare comunque la condizione  $a(0) = 0$ ). Un'estensione delle FTG per cui si abbia  $a(x) = x$ , si dice che "conserva le aree"; altrimenti, che "non conserva le aree". Il sistema (9) a cui applicare il teorema di Dini si generalizza nella seguente maniera:

$$Q(A, T) = 1$$

$$\frac{1}{2} AT + \int_T^1 \eta(\xi) d\xi = \frac{1}{2} a(x)$$

Applicando il teorema di Dini e ricordando che  $\eta(T) = A$  si ottiene<sup>50)</sup>

$$\frac{dA}{dx} = \frac{da}{dx} \frac{\frac{\partial Q}{\partial T}}{A \frac{\partial Q}{\partial A} + T \frac{\partial Q}{\partial T}}$$

(96)

$$\frac{dT}{dx} = - \frac{da}{dx} \frac{\frac{\partial Q}{\partial A}}{A \frac{\partial Q}{\partial A} + T \frac{\partial Q}{\partial T}}$$

Introducendo nelle (96) l'espressione (91) per  $Q$  si ottiene:

49) Naturalmente per l'applicabilità di tale definizione occorre che  $F(A, T)$  sia tale che l'area del settore richiamato nella definizione stessa sia definita: si supponrà che  $F$  permetta sempre di soddisfare tale requisito. Se la curva  $Q(\eta, \xi) = 1$  non presenta asintoti nel primo quadrante, è possibile definire una costante  $m(\lambda)$  che gioca il ruolo di  $m$  per le FTG estese, e che si riduce a  $m$  per  $\lambda = 0$ .

50) Ovviamente non possono essere presi come punti soluzione gli eventuali valori di  $x$  per cui  $A \frac{\partial Q}{\partial A} + T \frac{\partial Q}{\partial T} = 0$ .

$$\frac{dA}{dx} = \frac{da}{dx} \frac{T^{n-1} + \frac{\lambda}{n} \frac{\partial F}{\partial T}}{1 - \lambda \left[ F - \frac{1}{n} \left( A \frac{\partial F}{\partial A} + T \frac{\partial F}{\partial T} \right) \right]} \quad (97)$$

$$\frac{dT}{dx} = - \frac{da}{dx} \frac{A^{n-1} + \frac{\lambda}{n} \frac{\partial F}{\partial A}}{1 - \lambda \left[ F - \frac{1}{n} \left( A \frac{\partial F}{\partial A} + T \frac{\partial F}{\partial T} \right) \right]}$$

Dalle (97) si vede subito che un'estensione che non conserva le aree può sempre essere resa semplice scegliendo (qualunque sia  $F$ )

$$a(x) = x - \lambda \int_0^x \left[ F - \frac{1}{n} \left( A \frac{\partial F}{\partial A} + T \frac{\partial F}{\partial T} \right) \right] dx \quad (98)$$

Inoltre dalle (96) o dalle (97) è immediato concludere che, affinché un'estensione delle FTG sia semplice e conservi le aree,  $Q$  (e quindi  $F$ ) deve essere una funzione omogenea di grado  $n$  in  $A$  e  $T$ . E' chiaro che, per quanto possibile, sarà sempre questo il tipo di estensione che si cercherà di realizzare.

Un altro risultato interessante è che i tipi particolari di estensione sopra considerati conservano alcune relazioni differenziali valide per le FTG ordinarie. In particolare, tutte le volte che l'estensione è semplice e  $F$  dipende da  $A$  e  $T$  solo attraverso la combinazione  $A + T$ , si mantiene la relazione:

$$\frac{d}{dx} (A+T) = T^{n-1} - A^{n-1} \quad (99)$$

mentre, se l'estensione conserva le aree, vale la relazione

$$T \frac{dA}{dx} - A \frac{dT}{dx} = 1 \quad (100)$$

come è immediato controllare dalle (96) con  $\frac{da}{dx} = 1$ . Questo ha per conseguenu

za immediata che vengono mantenute le due relazioni (10):

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{T^2} ; \quad \frac{d(1/S)}{dy} = - \frac{1}{A^2} \quad (101)$$

che sono caratteristiche di tale tipo di estensione.

### III.2 L'estensione delle funzioni di ordine 4.

Cominciamo a trattare il caso delle funzioni di ordine 4, perché, come si vedrà in seguito, per esse è immediato trovare un'elegante estensione semplice e che conserva le aree, mediante la quale può essere rappresentata l'intera classe delle funzioni ellittiche, e, in particolare, in maniera più diretta la sotto classe delle  $\wp u$  a invarianti reali e discriminante negativo [a cui appartiene la  $\wp(u|1,0)$ ]. Conviene partire dalle espressioni delle FTG in termini delle funzioni di Jacobi, e più precisamente dalle relazioni (70) e (72) che, dal punto di vista del procedimento di estensione, possono essere considerate come equivalenti, in quanto (come già fatto notare) esse sono uguali per qualunque  $k^2$ . Generalizziamo dunque la (72) inserendovi le funzioni di Jacobi con parametro  $k^2$  qualsiasi (purché reale), e giungendo alla definizione:

$$S(x|\lambda) = \frac{\operatorname{sn}(x, k^2) \operatorname{dn}(x, k^2)}{\operatorname{cn}(x, k^2)} \quad (102)$$

ove il legame tra  $\lambda$  e  $k^2$  (soddisfacente la condizione  $\lambda(k^2 = 1/2) = 0$ ) deve ancora essere determinato.

Vediamo ora se esiste un'estensione, basata sulla (102), che conservi le aree. In tale caso, si deve avere

$$T^2 = 1/S' = \frac{\operatorname{cn}^2 x}{k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^4 x} = \frac{\operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{cn}^2 x}$$

$$A^2 = 1/\left(\frac{1}{S}\right)' = \frac{\text{sn}^2 x \text{dn}^2 x}{k'^2 + k^2 \text{cn}^4 x} = \frac{\text{sn}^2 x \text{dn}^2 x}{\text{dn}^2 x - k^2 \text{sn}^2 x \text{cn}^2 x} \quad (103)$$

L'estrazione della radice quadrata nelle (103), allo scopo di ricavare A e T, va fatta con le stesse modalità già descritte per le FTG ordinarie.

Derivando le (103) rispetto a x si ottiene, dopo alcuni passaggi:

$$2TT' = -2 \frac{\text{sn} x \text{dn} x \text{cn} x [\text{sn}^2 x \text{dn}^2 x + (k'^2 - k^2) \text{cn}^2 x]}{(k'^2 + k^2 \text{cn}^4 x)^2}$$

$$2AA' = 2 \frac{\text{sn} x \text{dn} x \text{cn} x [\text{cn}^2 x + (k'^2 - k^2) \text{sn}^2 x \text{dn}^2 x]}{(k'^2 + k^2 \text{cn}^4 x)}$$

che, confrontate con le (103) forniscono

$$A' = T^3 + \lambda T A^2 \quad (104)$$

$$T' = -(A^3 + \lambda A T^2)$$

ove si è posto

$$\lambda = k'^2 - k^2 = 1 - 2k^2 \quad (104')$$

che, come deve, si annulla quando  $k^2 = \frac{1}{2}$ .

La relazione che sostituisce la (54) si ottiene immediatamente dalla (100), inserendovi le (104), e risulta

$$T^4 + A^4 - 2\lambda A^2 T^2 = 1 \quad (105)$$

Come si vede, la funzione aggiuntiva  $F(A,T) = 2A^2 T^2$ , che chiaramente soddisfa le proprietà (92) e (93), è omogenea di grado 4 in A e T, e



quindi dà luogo ad un'estensione semplice (come è anche comprovato dall'aspetto del sistema (104)) e che conserva le aree. Si noti che la  $F$  trovata è la più semplice funzione soddisfacente tutte queste proprietà.

Prima di studiare in maggior dettaglio il comportamento delle funzioni trovate, vediamo di stabilire a quale classe di funzioni di Weierstrass  $\Phi_u$  a invarianti reali esse possono essere collegate quando  $\lambda$  è reale.

Come già fatto nella Parte II, verranno considerate equivalenti tutte le funzioni  $\Phi_u$  che possono essere ricondotte l'una all'altra attraverso la relazione di omogeneità (32). È evidente che ciò accade per tutte le  $\Phi_u$  i cui invarianti  $g_2$  e  $g_3$  soddisfano la relazione  $\frac{g_3^3}{g_2^3} = \text{costante}$  (reale). Al posto di questo rapporto si può considerare, con TRICOMI, il cosiddetto "invariante assoluto"  $J$ , definito da

$$J = \frac{1}{1 - 27g_3^2/g_2^3} \quad (106)$$

È anche chiaro che, essendo per le  $\Phi_u$  a invarianti reali  $e_2$  sempre reale, e quindi  $\text{Im } e_1 = -\text{Im } e_3$  (51), dalle (67) segue che la realtà di  $\lambda$  implica la realtà di tutti e tre gli invarianti irrazionali, e quindi richiede che il discriminante  $\Delta = -g_2^3/27J$  sia negativo. Nella Fig. 15 è mostrato il piano cartesiano delle due quantità  $g_2$  e  $g_3$ , con l'indicazione di alcune curve  $J = \text{cost}$ , che presentano nell'origine una tipica cuspidè: nei casi particolari  $J = 1 (g_3=0)$  e  $J = 0 (g_2=0)$  tali curve si identificano con i due assi coordinati. La curva corrispondente a  $J = \pm \infty (g_3^2 = g_2^3/27)$  corrisponde a funzioni ellittiche degeneri (con  $\Delta = 0$ ), e, come è facile vedere, separa la zona delle  $\Phi_u$  con  $\Delta$  positivo da quella con  $\Delta$  negativo

---

51) Questa proprietà segue dalla relazione  $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ , che lega tra loro i tre invarianti (v. TRICOMI, testo citato).

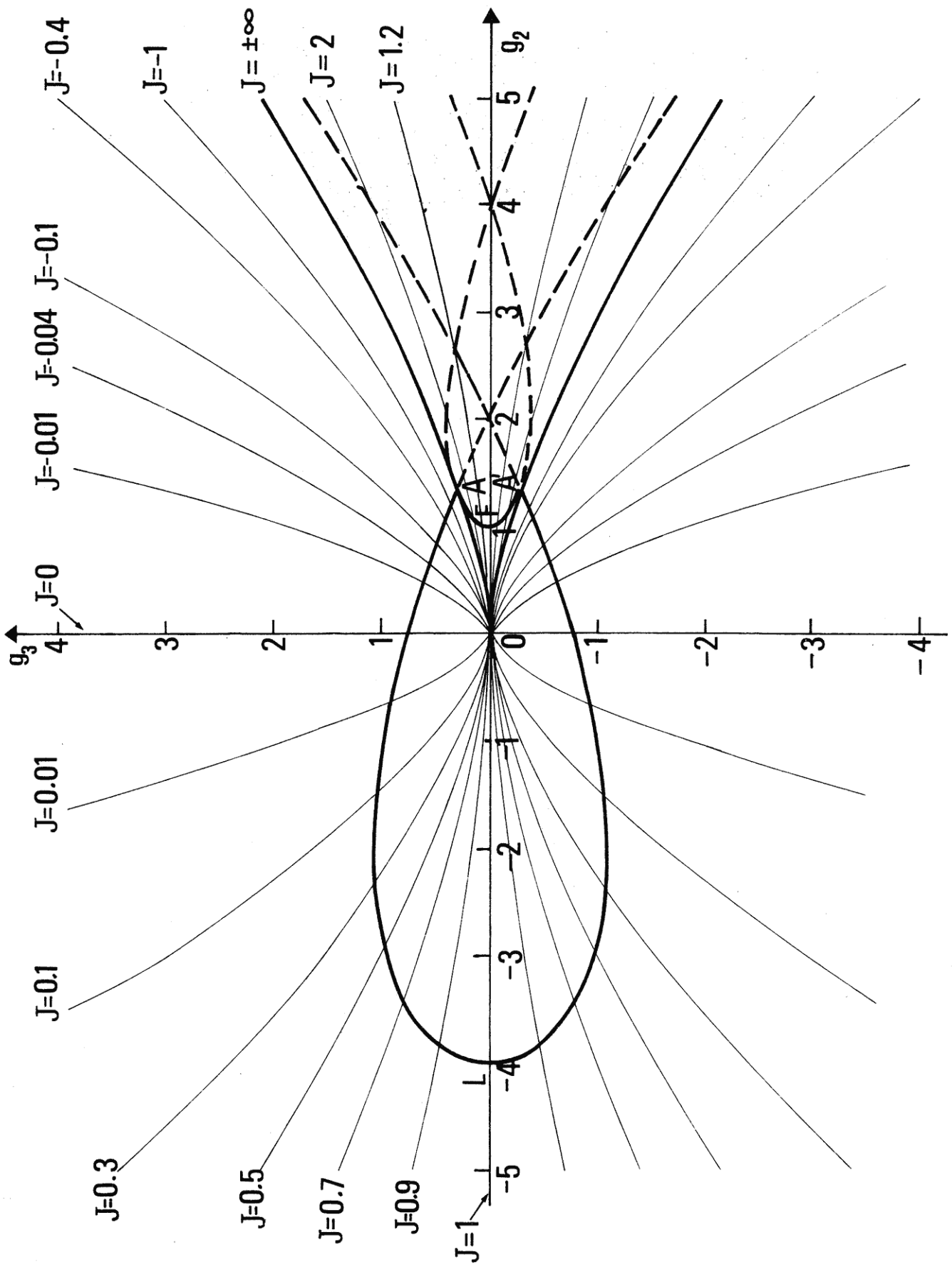


fig.15

(interamente giacente nel semipiano  $g_2 > 0$ ). Sono proprio le  $\mathcal{P}_u$  con gli invarianti che cadono in quest'ultima regione che si possono associare alle funzioni studiate in questo paragrafo, con l'aggiunta del semiasse negativo delle  $g_2$  che fa parte della curva  $J=1$ : di fatto le  $\mathcal{P}_u$  associabili alle FTG di ordine 4 estese e con  $\lambda$  reale richiedono che sia  $J \geq 1$ .

Tuttavia, come è facile accertare, l'associazione tra le  $\mathcal{P}_u$  con invarianti irrazionali reali e le FTG estese di ordine 4 non è biunivoca, perché non lo è quella tra funzioni di Weierstrass con  $J$  costante e funzioni di Jacobi. Infatti dalla teoria delle trasformazioni delle funzioni ellittiche (descritta in un apposito capitolo del più volte citato testo di TRICOMI) si sa che ad un valore di  $J$  corrispondono sei valori di  $k^2$ , correlati fra loro, e precisamente

$$k^2; 1-k^2; \frac{1}{k^2}; \frac{k^2-1}{k^2}; \frac{1}{1-k^2}; \frac{k^2}{k^2-1} \quad (107)$$

tali che le corrispondenti funzioni di Jacobi vanno le une nelle altre sotto una trasformazione di 1° ordine nei periodi (che lascia invariata la  $\mathcal{P}_u$ ). I sei valori (107) hanno numerose proprietà interessanti: per esempio, presa una qualsiasi coppia di essi, gli altri quattro valori possono sempre disporsi in due coppie con la stessa relazione funzionale della prima. In particolare, è possibile raggruppare i sei valori (107) in tre coppie di termini la cui somma dia 1. Inoltre, quando  $k^2$  varia tra 0 e  $\frac{1}{2}$ , i sei valori (107) coprono tutto l'asse reale senza sovrapporsi, rimanendo cioè compresi nei sei intervalli in cui l'asse reale è diviso dai valori di  $k^2$  relativi ai due casi speciali delle funzioni di Jacobi degeneri ( $k^2 = 0, 1, \pm \infty$ ) e delle funzioni lemniscatiche con  $g_3 = 0$  ( $k^2 = \frac{1}{2}, 2, -1$ ). Sono questi i soli casi in cui, per  $k^2$  reale, si ha la coincidenza, a due a due, dei valori (107).

In maniera del tutto parallela si possono portare avanti le stesse considerazioni con riferimento al parametro  $\lambda$  che definisce le FTG estese.

I sei valori corrispondenti ai valori (107) sono

$$\pm \lambda ; \pm \frac{3-\lambda}{1+\lambda} ; \pm \frac{3+\lambda}{1-\lambda} \quad (108)$$

Al variare di  $\lambda$  tra 0 e 1 le (108) coprono tutto l'asse reale, rimanendo confinati negli intervalli delimitati dai "punti di coincidenza"  $+1, -1, +\infty$  (caratterizzanti le FTG degeneri) e  $0, +3, -3$  (caratterizzanti le FTG ordinarie). E' chiaro che il legame tra le FTG corrispondenti allo stesso valore di  $J$  ma con  $\lambda$  diverso può essere dedotto a partire dalle trasformazioni delle funzioni di Jacobi sotto il passaggio dell'uno all'altro dei valori (107).

La trasformazione più interessante si ha cambiando segno a  $\lambda$ ; essa corrisponde allo scambio tra  $k^2$  e  $k'^2$ . Sulla base delle formule relative a tale trasformazione, applicate alle (103) con l'opportuna convenzione per l'estrazione della radice quadrata, si ottiene

$$\begin{aligned} A(x|-\lambda) &= -iA(ix|\lambda) \\ T(x|-\lambda) &= T(ix|\lambda) \end{aligned} \quad (109)$$

A controllo delle (109), l'applicazione diretta delle stesse formule alla (102) fornisce

$$S(x|-\lambda) = -iS(ix|\lambda) \quad (110)$$

Le (109) per  $\lambda = 0$  si riducono alle (29) [con  $e = i$ ], e possono essere considerate come l'estensione della proprietà di simmetria per rotazione di  $90^\circ$  caratteristica delle FTG ordinarie, che ora non può più mantenersi perché i due periodi reale e immaginario delle FTG estese non sono uguali. Il cambiamento di segno di  $\lambda$  quindi produce l'effetto di una rotazione di  $90^\circ$  nel piano complesso, e ci si può convincere facilmente che in termini di  $\mathbb{P}$ u esso equivale ad un cambiamento di segno di  $g_3$ .

Passando alle altre trasformazioni (108) consideriamo innanzitutto quella con cui si passa da  $\lambda$  a  $\dot{\lambda} = -\frac{3+\lambda}{1-\lambda}$  (la corrispondente trasformazione delle funzioni di Jacobi, con  $k^2 = \frac{1}{k'^2}$ , mantiene reali gli argomenti reali)<sup>52)</sup>. L'effetto di tale trasformazione si ottiene combinando le suddette formule di trasformazione delle funzioni di Jacobi con le espressioni seguenti, che danno le funzioni di Jacobi in funzione delle FTG estese, e sono deducibili dalle (103):

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2 x &= \frac{T^2 + A^2 - 1}{(1-\lambda)T^2} = \frac{1 + A^2 - T^2}{1 + A^2 + \lambda T^2} \\ \operatorname{cn}^2 x &= \frac{1 - A^2 - \lambda T^2}{(1-\lambda)T^2} = \frac{(1+\lambda) T^2}{1 + A^2 + \lambda T^2} \\ \operatorname{dn}^2 x &= \frac{1 + T^2 - A^2}{2T^2} = \frac{1+\lambda}{2} \frac{1+A^2+T^2}{1+A^2+\lambda T^2} \end{aligned} \quad (111)$$

E' sottinteso che nelle (111) il parametro  $k^2$  che specifica le funzioni di Jacobi è legato al parametro  $\lambda$  che specifica le FTG della relazione  $k^2 = \frac{1-\lambda}{2}$ .

Combinando le formule in modo opportuno si ottiene:

---

52) Analogamente a quanto fatto nel TRICOMI, le grandezze trasformate verranno contrassegnate con un punto.

$$\begin{aligned} \dot{A}^2(x) &= A^2(x|\dot{\lambda}) = \frac{\hat{T}^2 + \hat{A}^2 - 1}{2(\hat{T}^2 - \hat{A}^2)} \\ \dot{T}^2(x) &= T^2(x|\dot{\lambda}) = \frac{\hat{T}^2 + \hat{A}^2 + 1}{2(\hat{T}^2 - \hat{A}^2)} \\ \dot{S}(x) &= S(x|\dot{\lambda}) = \frac{\sqrt{2(1-\lambda)} \hat{A} \hat{T}}{\hat{T}^2 + \hat{A}^2 + 1} \end{aligned} \quad (112)$$

ove  $\hat{A} = A(\sqrt{\frac{2}{1-\lambda}} x|\lambda)$  (e analoghe), e, come detto,  $\dot{\lambda} = -\frac{3+\lambda}{1-\lambda}$ .

E' facile convincersi che le (112) possono essere usate senza difficoltà nell'intero intervallo di  $\lambda$  da -1 a 1, con il che si copre l'intero intervallo dei valori di  $\dot{\lambda}$  inferiori a -1. Cambiando nelle (112)  $\dot{\lambda}$  in  $-\lambda$  e applicando le (109) si vengono a esprimere le FTG con parametro  $>1$  in termini di funzioni  $\hat{A}$ ,  $\hat{T}$  il cui parametro è  $\lambda$ , e il cui argomento è  $\sqrt{\frac{2}{1-\lambda}} ix$ . Applicando ancora le (109) per eliminare l'immaginario, e combinando nuovamente  $\lambda$  in  $-\lambda$  si ottiene infine:

$$\begin{aligned} \dot{A}^2(x) &= A^2(x|\dot{\lambda}) = \frac{1 - \hat{T}^2 + \hat{A}^2}{2(\hat{A}^2 + \hat{T}^2)} \\ \dot{T}^2(x) &= T^2(x|\dot{\lambda}) = \frac{1 + \hat{T}^2 - \hat{A}^2}{2(\hat{A}^2 + \hat{T}^2)} \\ \dot{S}(x) &= S(x|\dot{\lambda}) = \frac{\sqrt{2(1+\lambda)} \hat{A} \hat{T}}{1 + \hat{T}^2 - \hat{A}^2} \end{aligned} \quad (113)$$

ove ora, per effetto delle sostituzioni fatte,  $\dot{\lambda} = \frac{3-\lambda}{1+\lambda}$  e

$\hat{A} = A(\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} x|\lambda)$  e analoghe. <sup>53)</sup>

53) Lo stesso risultato (113) si può ottenere partendo direttamente dalla trasformazione delle funzioni di Jacobi con  $k^2 = k^2/(k^2-1)$ , che porta a questo valore di  $\lambda$ .

In entrambi i casi (112) e (113) è facile controllare che si ha  $\dot{A}^4 + \dot{T}^4 + 2\lambda\dot{A}^2\dot{T}^2 = 1$ , e che sono soddisfatte le proprietà differenziali caratteristiche delle FTG estese.

Le formule trovate permettono quindi di esprimere le FTG con  $\lambda$  reale e di modulo  $> 1$  in termini di quelle con  $\lambda$  reale ( $|\lambda| < 1$ ): a loro volta la (109) lega tra loro queste ultime, così che è sufficiente conoscere le FTG con  $\lambda$  compreso tra 0 e 1 in tutto il piano complesso per determinarne i valori corrispondenti alle altre scelte di  $\lambda$ .

I valori  $\lambda = 1$  e  $\lambda = -1$  (FTG degeneri) corrispondono rispettivamente alle funzioni trigonometriche e iperboliche ordinarie ( $n=2$ ): si può controllare che, introducendo le prime nelle (113) e le seconde nelle (112), le funzioni vanno in loro stesse, come conseguenza del fatto che, per tali casi, si ha  $\dot{\lambda} = \lambda$ .

Poiché (come si vedrà tra poco e come è anche evidente dalle (112)) le funzioni  $A$  e  $T$  con  $\lambda < -1$  hanno delle singolarità (punti di diramazione) sull'asse reale e quindi non sono reali su alcune porzioni di detto asse, può essere ragionevolmente supposto che esse siano

collegate in qualche modo con l'estensione delle funzioni iperboliche generalizzate (FIG), che, per  $\lambda = 0$ , presentano appunto questo andamento. Poiché il problema dell'estensione delle FIG di ordine 4 riveste un notevole interesse nella teoria, esso verrà trattato in maggior dettaglio nel prossimo paragrafo, ove verrà ripresa anche tale questione.

Tornando al comportamento delle FTG estese sull'asse reale, il loro andamento qualitativo può essere seguito in maniera diretta sfruttando la definizione data nel §I.1 che, come già discusso, conserva in questo caso la sua validità. A tale scopo in Fig. 16 è riportato l'andamento delle curva parametrica  $\xi^4 + 2\lambda\xi^2\eta^2 + \eta^4 = 1$  nel primo quadrante del piano  $\xi\eta$  (ciò è sufficiente perché la curva è simmetrica rispetto ad entrambi gli assi), per alcuni valori tipici di  $\lambda$ . La situazione più interessante si ha per  $\lambda \leq -1$ : in tal caso è facile convincersi che la curva in questione ha degli asintoti nel primo quadrante, e che soltanto il ramo inferiore della curva mostrata in Figura può essere usato nella definizione delle FTG. (Per questa ragione il ramo superiore è stato indicato a tratteggio). Dato che quando  $\lambda < -1$  l'area compresa tra l'asintoto e la curva è finita, ne consegue che le funzioni  $A$  e  $T$  divergono in un punto dell'asse reale, dove, avendo ivi un punto di diramazione, nell'intervallo ad esso successivo ed estendentesi fino alla prossima singolarità non sono più reali, ma immaginarie pure (si confrontino le formule (112), e la discussione di tipo analogo svolta per le funzioni di ordine 5). In ogni caso, quando  $|\lambda| < 1$  la costante  $m(\lambda)$ , legata al periodo reale delle FTG, si identifica con la costante  $K$  data dalla (66); come è riportato nel TRICOMI, il suo valore decresce da  $+\infty$  a  $\frac{\pi}{2}$  quando  $\lambda$  cresce da  $-1$  a  $1$ . Un'analogha quantità  $m'(\lambda) = m(-\lambda) = K'$ , legata nella stessa maniera al periodo immaginario delle funzioni, fa l'opposto. Se invece  $|\lambda| > 1$  le (66) non sono più entrambe direttamente utilizzabili; ci si può però servire delle (112) e (113), le quali mostrano che  $m(\dot{\lambda}) = m(\lambda)\sqrt{\frac{1 \pm \lambda}{2}}$  (a seconda del segno di  $\dot{\lambda}$ ), ove  $\dot{\lambda}$  e  $\lambda$  (con  $|\lambda| < 1$ )



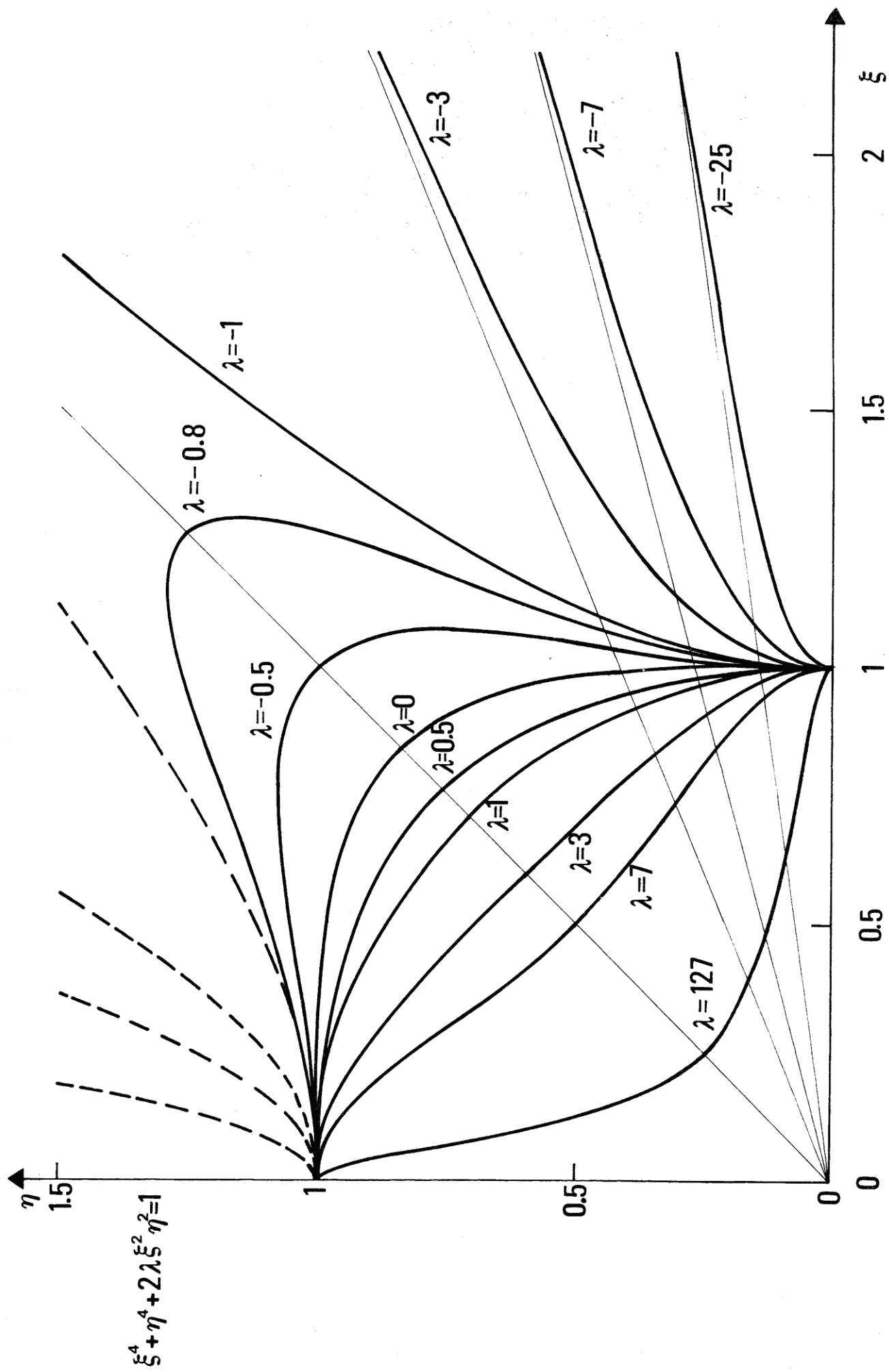


fig.16

sono legati tra loro tramite le espressioni a margine delle formule suddette. Si vede che, per  $|\dot{\lambda}| \geq 1$ ,  $m(\dot{\lambda})$  e  $m'(\dot{\lambda})$  tendono a zero quando  $|\dot{\lambda}| \rightarrow \infty$  con diversa rapidità, "incrociandosi" per  $\dot{\lambda} = \pm 3$ .

L'andamento di  $A(x|\lambda)$  e  $T(x|\lambda)$  sull'asse reale per vari valori di  $\lambda$  è mostrato nelle Figure 17a ( $\lambda \geq 0$ ) e 17b ( $\lambda < 0$ ). In tutti i diagrammi il simbolo  $m$  denota, ovviamente,  $m(\lambda)$ . Si noti che in tutti i diagrammi (eccetto quello per  $\lambda = -1$ ) si è usata la stessa scala, così che risultano in scala anche i periodi delle funzioni. E' necessario fare alcuni commenti sui diagrammi di Fig. 17b ( $\lambda < 0$ ). Per  $0 > \lambda > -1$ , le FTG presentano dei caratteristici massimi, assenti per  $\lambda \geq 0$ ;  $T(x|\lambda)$  ha il primo massimo dopo l'origine all'ascissa  $\arcsin(\sqrt{-\lambda})$ <sup>54</sup>, e ivi vale  $(1-\lambda^2)^{-1/4}$ , mentre  $A$  vale  $\sqrt{-\lambda}(1-\lambda^2)^{-1/4}$ .

All'avvicinarsi di  $\lambda$  a  $-1$ , i massimi in questione diventano sempre più alti e più lontani dall'origine, fino a che, per  $\lambda = -1$ , il periodo reale delle FTG estese diventa infinito e si ricade sulle funzioni iperboliche ordinarie.

Per  $\lambda < -1$  le funzioni  $A$  e  $T$  non sono reali nelle zone ove il loro andamento non è mostrato: è invece sempre reale  $S$ , il cui andamento (di tipo non convenzionale rispetto agli altri casi) è indicato nei corrispondenti diagrammi.

E' anche da notare che, per  $\lambda < -1$ , non è più valida la condizione (6), dedotta come conseguenza della simmetria della curva parametrica rispetto alla bisettrice del primo quadrante: infatti in tale caso la curva effettivamente usata non è più simmetrica. Del resto, la cosa risulta anche dalle formule (112).

E' anche facile convincersi che, quando  $|\lambda| < 1$ , il comportamento nel piano

---

54) Per  $\lambda$  sufficientemente prossimo a  $-1$  tale punto tende a sovrapporsi a  $\frac{\pi}{2}$ .

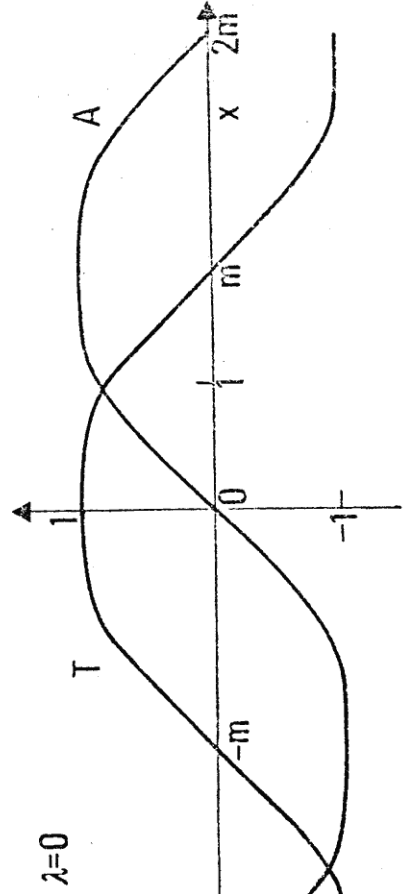
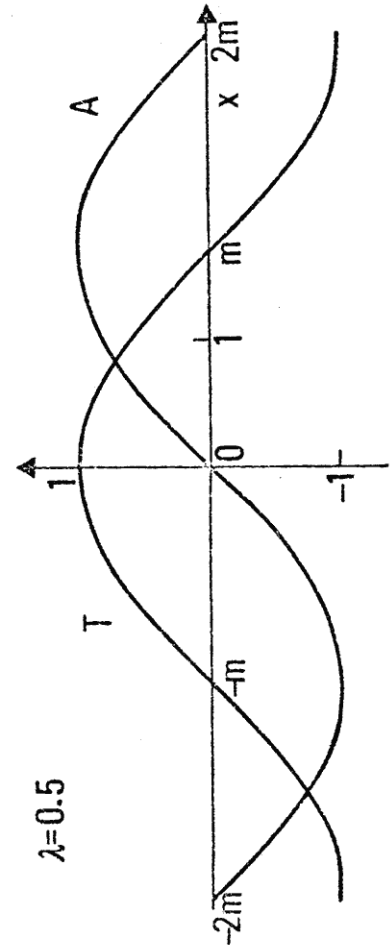
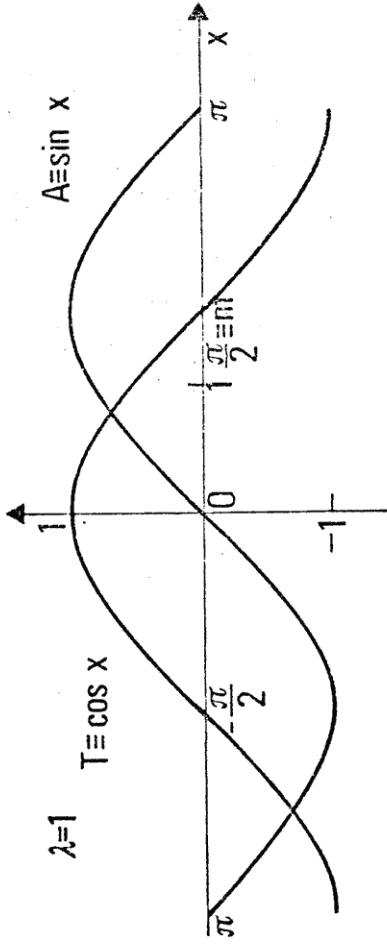
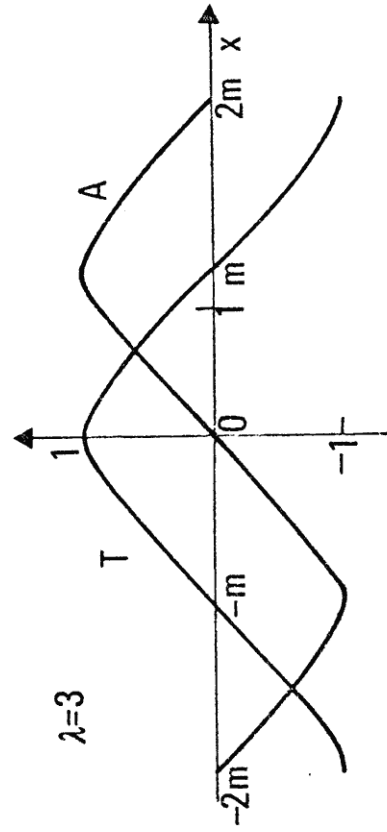
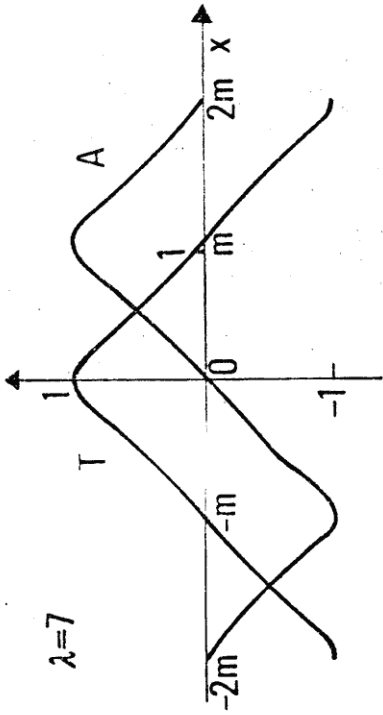
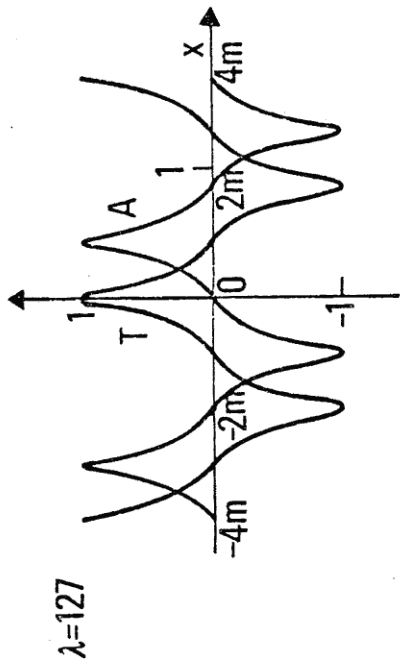


fig. 17a

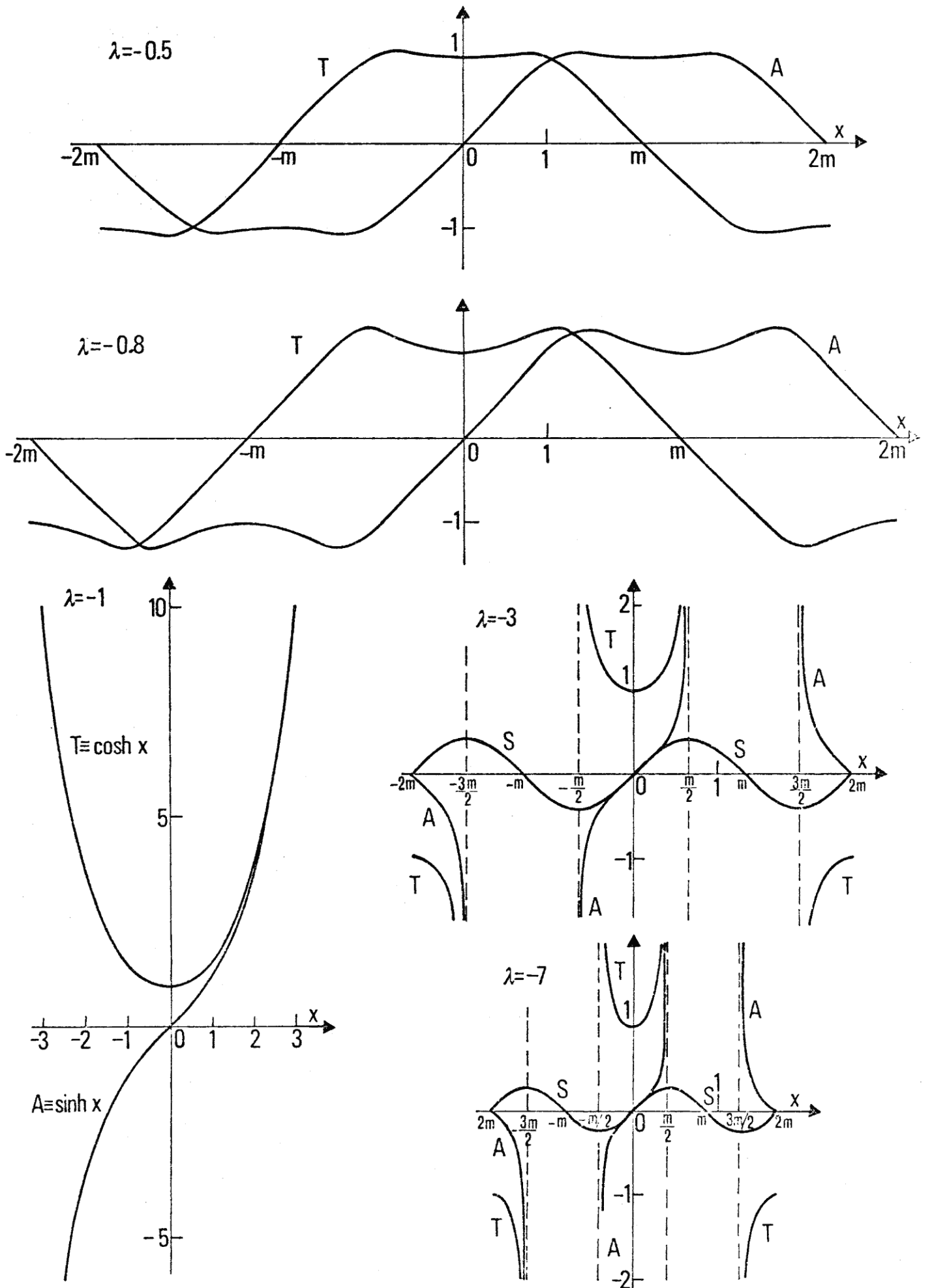


fig. 17b

complesso delle FTG estese è del tutto analogo a quello delle corrispondenti FTG ordinarie, illustrato nelle Figure 7 e 8, purché la griglia di quadrati di lato  $m$  che, nei diagrammi di Fig. 8, presenta le singolarità ai vertici venga sostituita con una griglia di rettangoli aventi i lati di lunghezza  $m(\lambda)$  e  $m'(\lambda)$  (tali rettangoli sono allungati in senso orizzontale per  $\lambda$  negativo, in senso verticale per  $\lambda$  positivo). La struttura delle FTG estese con  $|\lambda| > 1$  è invece più complicata, in quanto le singolarità di  $A$  e  $T$  formano un reticolo di parallelogrammi non rettangolari; tuttavia, essendo tali funzioni completamente determinate attraverso le (112) e (113), per ragioni di brevità non è il caso di discuterne in dettaglio il comportamento.

Per la stessa ragione non verranno scritte le formule esplicite delle FTG estese in termini di  $\wp(u)$  (ottenibili, p.es. dalle (68)), perché a questo punto l'uso delle funzioni di Weierstrass non apporta alcun ulteriore vantaggio alla trattazione. Tuttavia, quando  $-1 < \lambda < 1$ , può rivestire interesse la ricerca di quella particolare  $\wp(u)$  a discriminante positivo che ha il periodo reale uguale a  $2m(\lambda)$ , e quindi gioca lo stesso ruolo assunto dalla  $\wp(u|-4,0)$  nel caso delle FTG ordinarie ( $\lambda=0$ ). [Si ricordi che l'uso di tale funzione ha permesso una notevole semplificazione delle formule.] Anche questo problema verrà discusso più avanti (§III.4).

Restano ora da determinare le formule di addizione e sottrazione, di duplicazione e di bisezione. Cominciando dalle formule di duplicazione, è facile verificare che le espressioni (75) e (76) si mantengono valide anche per le FTG estese, e ciò porta immediatamente alle relazioni:

$$\begin{aligned}
 S(2x) &= \frac{2 A(x)T(x)}{T^4(x) - A^4(x)} \\
 A^2(2x) &= \frac{4 A^2(x)T^2(x)}{1 + 4(1 - \lambda^2)A^4(x)T^4(x)} \\
 T^2(2x) &= \frac{[T^4(x) - A^4(x)]^2}{1 + 4(1 - \lambda^2)A^4(x)T^4(x)}
 \end{aligned}
 \tag{114}$$

che non solo riproducono le (77) per  $\lambda = 0$ , ma per  $\lambda = \pm 1$  forniscono le ben note regole di duplicazione per le funzioni trigonometriche e iperboliche ordinarie. Il fatto che la prima delle (77) resti valida per ogni  $\lambda$  porta a supporre che anche la prima delle (78) si mantenga valida: e di fatto la cosa si può dimostrare con un calcolo lungo e complicato.<sup>55)</sup>

Mediante derivazione si ottengono le formule di addizione e sottrazione per  $A^2$  e  $T^2$ , che hanno ancora la forma (78), ove però  $F_{\pm}$  va definita nella seguente maniera:

$$F_{\pm} = A^2(x)T^2(y) + A^2(y)T^2(x) \mp 2A(x)T(x)A(y)T(y) \{A^2(x)A^2(y) + T^2(x)T^2(y) + \lambda [A^2(x)T^2(y) + A^2(y)T^2(x)]\}$$

Risolvendo l'ultima delle (114) (con  $\frac{x}{2}$  al posto di  $x$ ) rispetto a  $2A^2(\frac{x}{2})T^2(\frac{x}{2})$  si ottiene, dopo alcuni passaggi, la seguente relazione:

$$2A^2(\frac{x}{2})T^2(\frac{x}{2}) = \frac{A^2(x) - \lambda(1 - T^2(x))}{(1 - \lambda^2)(1 + T^2(x))} \quad (115)$$

Ricavando nella (105)  $T^2$  in funzione di  $A^2$  (o viceversa), e inserendo tale relazione a primo membro della (115), si può, con alcuni passaggi, arrivare ad un'equazione di secondo grado le cui soluzioni forniscono  $A^4(\frac{x}{2})$  e  $T^4(\frac{x}{2})$ , che risultano dati dalle formule seguenti:

$$\begin{matrix} A^4(\frac{x}{2}) \\ T^4(\frac{x}{2}) \end{matrix} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 + T^2 - \lambda(A^2 + 2\lambda T^2)}{(1 - \lambda^2)(1 + T^2)} \mp \frac{T}{1 + T^2} \sqrt{\frac{2}{1 - \lambda^2} [1 + T^2 - \lambda(A^2 + 2\lambda T^2)]} \right\} \quad (116)$$

---

55) Si parte dalla relazione (70) calcolata per  $S(x+y)$  e si usano le formule (75), (76) per  $cn(2x)$  e  $sn(2x)$ . E' interessante controllare che, anche se la cosa non è immediata, la prima delle (78) si applica anche alle funzioni trigonometriche e iperboliche ordinarie.

Sulle (116) possono essere controllate tutte le situazioni limite e le condizioni di analiticità, anche se in alcuni casi i calcoli possono risultare molto laboriosi.

Per concludere, restano da determinare gli sviluppi in serie delle funzioni. E' facile convincersi (e la cosa è confermata anche dalla struttura del sistema differenziale (104) che gli sviluppi in serie di A, T e S procedono per potenze di  $x^2$  (essendo T pari, A e S dispari). E' chiaro che, in tutti gli sviluppi, i coefficienti di posto pari devono essere proporzionali a  $\lambda$ , mentre quelli di posto dispari non si annullano per  $\lambda=0$ , e riproducono in tale limite i corrispondenti sviluppi (79'). Si ha dunque:

$$A(x|\lambda) = x - \frac{\lambda x^3}{6} - \frac{3x^5}{20} \left(1 - \frac{19}{18} \lambda^2\right) + \frac{31\lambda x^7}{280} \left(1 - \frac{559}{558} \lambda^2\right) + \frac{19x^9}{480} \left(1 - \frac{403}{133} \lambda^2 + \frac{29161}{14364} \lambda^4\right) + \dots \quad (116')$$

$$T(x|\lambda) = 1 - \frac{\lambda x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \left(1 - \frac{7\lambda^2}{6}\right) + \frac{23\lambda x^6}{120} \left(1 - \frac{139\lambda^2}{138}\right) + \frac{9x^8}{160} \left(1 - \frac{215}{63} \lambda^2 + \frac{5473}{2268} \lambda^4\right) + \dots$$

$$S(x|\lambda) = x + \frac{\lambda x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \left(1 + \frac{\lambda^2}{3}\right) + \frac{11\lambda x^7}{120} \left(1 + \frac{\lambda^2}{33}\right) + \frac{x^9}{120} \left(1 + \frac{34}{21} \lambda^2 + \frac{\lambda^4}{189}\right) + \dots$$

Di nuovo, è interessante notare come, per  $\lambda = \pm 1$ , si ritrovino i noti sviluppi in serie delle funzioni trigonometriche e iperboliche ordinarie.

Le FTG estese presentate in questo paragrafo godono, analogamente alle funzioni di Jacobi, di numerosissime proprietà matematiche interessanti, che però non è possibile presentare in questa sede per ragioni di spazio. Verranno menzionate solo alcune formule connesse al problema delle funzioni inverse. Mentre infatti le derivate delle funzioni inverse di  $A(x|\lambda)$  e  $T(x|\lambda)$  hanno, per  $\lambda \neq 0, \neq 1$ , un'espressione complicata contenente radici quadrate e quarte, invece la derivata di  $\text{arcS}(x|\lambda)$  è particolarmente semplice ed elegante. Basta tener conto della prima delle (101) e dividere la (105) per  $T^4$  per ottenere imme

diatamente la seguente relazione

$$\operatorname{arcS}(x|\lambda) = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{z^4 + 2\lambda z^2 + 1}} \quad (117)$$

Si vede subito che questa espressione è legata in modo semplice all'integrale di Legendre di prima specie quando  $k^2 > 0$ :<sup>56)</sup>

$$F(x|k^2) = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$

e si ottiene facilmente la relazione

$$F(x|k^2) = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arcS}\left(\sqrt{k} x \mid -\frac{1+k^2}{2k}\right)$$

ove  $k$  indica la radice aritmetica di  $k^2$ . Un'altra interessante conseguenza della (117) si osserva notando che il radicale che figura a denominatore è sostanzialmente la funzione generatrice dei polinomi di Legendre, il che permette con alcuni passaggi di giungere alla formula

$$\operatorname{arcS}(x|\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} P_n(-\lambda) \quad (118)$$

Per  $\lambda = \pm 1$  si ritrovano gli sviluppi in serie delle funzioni inverse di  $\operatorname{tg} x$  e  $\operatorname{tgh} x$ . Se  $|\lambda| < 1$  il raggio di convergenza della (118) è 1; per altri valori di  $\lambda$  il raggio di convergenza è minore, perché le singolarità di  $\operatorname{arc} S$  sono più vicine all'origine. Supponendo quindi  $|\lambda| < 1$  e ponendo  $x = 1$  nella (118) si ottiene

---

56) Come risulterà chiaro dalla trattazione fatta nel prossimo paragrafo, lo stesso ragionamento può essere applicato quando  $k^2 < 0$  con riferimento alla funzione  $\operatorname{Sh}$  (estesa) al posto di  $S$ .



$$m(\lambda) = 2 \operatorname{arcs}(1|\lambda) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(-\lambda)}{2n+1}$$

che, in termini delle grandezze relative alle funzioni di Jacobi, può essere scritta per  $0 \leq k^2 < 1$ ):

$$K(k) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(k^2 - k'^2)}{2n+1}$$

Questa relazione forse è già nota, ma è stata qui ottenuta con particolare semplicità ed eleganza.

### § III.3 L'estensione delle FIG di ordine 4.

L'estensione delle FTG di ordine 4 portata avanti nel paragrafo precedente può essere chiaramente fatta per qualunque valore, anche complesso, di  $k^2$  e  $\lambda$ , e quindi coprire, in linea di principio, tutte le funzioni ellittiche (in particolare, le  $\Phi_u$  a invarianti reali e discriminante positivo, a cui, come verrà mostrato nel prossimo paragrafo, corrispondono FTG con  $\lambda$  immaginario puro). Tuttavia in quest'ultimo caso la rappresentazione descritta non è conveniente, perché obbliga a passare per valori immaginari anche quando le  $\Phi_u$  e i loro argomenti sono reali. È ben noto, tuttavia, che è possibile passare da una tale  $\Phi_u$  a una  $\Phi_u$  con invarianti reali e discriminante negativo (esprimibile in termini di FTG estese con  $\lambda$  reale) attraverso una trasformazione di second'ordine sui periodi (v. TRICOMI). Attraverso tale procedimento si può trovare (e le formule risulteranno piuttosto semplici) un'espressione di tutte le funzioni di tale tipo mediante le FTG estese con  $\lambda$  reale già riscontrate.

Tuttavia, prima di affrontare l'argomento in dettaglio, è bene premettere la discussione del problema dell'estensione delle FIG di ordine 4, perché queste funzioni assumeranno nella trattazione un ruolo importante: e per cominciare, è necessario mostrare come si esprimono le FIG ordinarie ( $\lambda=0$ ), definite attraverso la formula (29'), nella quale, per fissare le idee, si prenderà  $\eta = e^{i\pi/4}$ . Essendo  $e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ , i valori di  $A(\eta x)$  e  $T(\eta x)$

possono essere calcolati dalle formule di addizione (78), eliminando poi gli immaginari attraverso le (29) (con  $e^{-}$ ). In questa maniera si ottengono le seguenti formule (in cui, come al solito, l'indice 4 è soppresso):

$$Ah^2(x) = \frac{2A^2T^2}{T^4 - A^4} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \quad (119)$$

$$Th^2(x) = \frac{1}{T^4 - A^4} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

$$Sh(x) = \sqrt{2} AT \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

Si possono facilmente verificare la relazione  $Th^4 - Ah^4 = 1$  e le varie formule differenziali.

Si noti che il periodo reale delle funzioni (119) è  $2\sqrt{2}m$ . Inoltre le funzioni  $Ah$  e  $Th$  hanno dei punti di diramazione sull'asse reale in  $\frac{\sqrt{2}m}{2} + h\sqrt{2}m$  ( $h$  intero). La cosa è ovvia tenendo presente che, per la definizione (29'), il comportamento di  $Ah$  e  $Th$  nel piano complesso è dato sostanzialmente dai diagrammi di Fig. 8 in cui gli assi coordinati siano ruotati di  $45^\circ$ . (La struttura dei tagli nel piano complesso resta fissata da quella scelta per  $A$  e  $T$  attraverso la (29')).

In ogni caso le funzioni  $Ah, Th$  sono immaginarie pure per valori reali compresi tra  $\frac{\sqrt{2}m}{2}$  e  $\frac{3\sqrt{2}m}{2}$ , e in tutti gli intervalli ottenuti traslando tali valori di un multiplo di  $2\sqrt{2}m$ . In questo senso si può vedere un'analogia con il comportamento delle FTG estese con  $\lambda < -1$  (v. Fig. 17b); tuttavia non è stata trovata una formula semplice che connetta le FIG ordinarie e le FTG estese con  $\lambda = -3$  (anche esse direttamente collegate con le FTG ordinarie).

Passando ora alle FTG estese con  $\lambda \neq 0$ , è logico chiedersi se non sia possibile associare ad esse delle FIG estese corrispondenti, che si ridu-

cano alle (119) per  $\lambda = 0$  e che soddisfino a relazioni "somiglianti" alle (104) e (105), mantenendosi ovviamente reali per argomenti reali prossimi a  $x = 0$ . E' chiaro che la (29') non può più essere usata, dato che non vale più la (29) [e infatti il suo uso porterebbe a funzioni non reali per  $x$  reale prossimo a zero].

Bisogna invece servirsi direttamente delle (119), esprimendole attraverso opportune combinazioni di funzioni di Jacobi, che poi si manterranno per qualsiasi valore di  $\lambda$ . Si può anche vedere che le (119) possono essere facilmente espresse in termini di funzioni di Jacobi mediante le relazioni (75) e (76) (valide per ogni  $k^2$ ): inserendo tali relazioni nelle (119), si ottengono le formule seguenti (in cui va preso  $k^2 = \frac{1}{2}$ ):

$$Ah^2(x) = \frac{1}{2} \frac{\text{sn}^2(\sqrt{2}x)}{\text{cn}(\sqrt{2}x)}$$

$$Th^2(x) = \frac{\text{dn}^2(\sqrt{2}x)}{\text{cn}(\sqrt{2}x)}$$

$$Sh(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\text{sn}(\sqrt{2}x)}{\text{dn}(\sqrt{2}x)}$$

Queste relazioni suggeriscono la seguente generalizzazione per le FIG estese, in cui  $\alpha = \alpha(\lambda)$  è un parametro dipendente da  $\lambda$  e che si riduce a  $\sqrt{2}$  per  $\lambda = 0$ :

$$Ah^2(x) = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\text{sn}^2(\alpha x)}{\text{cn}(\alpha x)}$$

$$Th^2(x) = \frac{\text{dn}^2(\alpha x)}{\text{cn}(\alpha x)} \tag{120}$$

$$Sh(x) = \frac{1}{\alpha} \frac{\text{sn}(\alpha x)}{\text{dn}(\alpha x)}$$

Si tratta di un'estensione che conserva le aree: infatti si può verificare

che, per ogni  $k^2$ , si ha  $\frac{dSh(x)}{dx} = \frac{1}{Th^2(x)}$ .

Il valore di  $\alpha$  si determina imponendo che le derivate di  $Ah$  e  $Th$  siano date rispettivamente da  $Th^3$  e  $Ah^3$  più un termine proporzionale a  $\lambda$ . Un breve calcolo mostra che si deve avere

$$= \frac{1}{\sqrt{kk'}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\lambda^2}} \quad (121)$$

in cui, quando  $-1 < \lambda < 1$ , per le radici va preso il valore aritmetico.<sup>57)</sup>

Con la scelta (121) di  $\alpha$ , le relazioni differenziali per  $Ah$  e  $Th$  risultano:

$$\begin{aligned} Ah' &= Ah^3 - \lambda' Ah^2 Th \\ Th' &= Ah^3 + \lambda' Th^2 Ah \end{aligned} \quad (122)$$

con

$$\lambda' = \frac{1}{2} \lambda \alpha^2 = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \quad (123)$$

Le (122) portano alla seguente relazione tra  $Ah$  e  $Th$ :

$$Th^4 - Ah^4 - 2\lambda' Ah^2 Th^2 = 1 \quad (124)$$

Si noti la somiglianza delle (122) e (124) con le (104) e (105). Il parametro  $\lambda'$  gioca per le FIG estese lo stesso ruolo che ha  $\lambda$  per le FIG estese; quindi appare logico parametrizzare le FIG estese in termini di  $\lambda'$ , scrivendo  $Ah(x|\lambda')$  e analoghe. Anche  $\lambda$  e  $\alpha$  possono essere ridefinite in termini di  $\lambda'$  come segue:

---

57) Con questa scelta, la determinazione della radice quadrata di  $cn$  nelle (120), estratta per ottenere  $Ah$  e  $Th$ , si fissa in modo da avere tali funzioni reali e positive per valori reali e positivi di  $x$  prossimi a zero.

$$\lambda = \frac{\lambda'}{\sqrt{1+\lambda'^2}} \quad \alpha = \sqrt{2} \sqrt[4]{1+\lambda'^2} \quad (125)$$

e le due costanti  $\lambda$  e  $\lambda'$  soddisfano la relazione:

$$(1-\lambda^2)(1+\lambda'^2) = 1 \quad (126)$$

E' interessante notare come tutte le FTG estese con  $\lambda'$  reale siano associabili biunivocamente alle sole FTG con  $-1 < \lambda < 1$ . A tale valore estremo di  $\lambda$  (FTG degeneri), per cui sia  $\lambda'$  che  $\alpha$  diventano infiniti, non corrisponde alcuna FIG associata. Per  $\lambda$  reale e con modulo  $> 1$ , le formule (120) definiscono funzioni che non sono reali per  $x$  reale, ed hanno minore interesse. Più interessante è invece la situazione quando  $\lambda$  è immaginario puro (come già detto, ciò corrisponde alle FTG associate alle  $\Phi_u$  con invarianti reali e discriminante positivo): in tal caso, qualunque sia  $\lambda, \alpha$  risulta reale e  $\lambda$  immaginario puro, così che anche in questo caso le FIG estese si comportano, nel confronto con le FTG associate, in maniera analoga a quanto già visto quando  $\lambda$  è reale e compreso tra  $-1$  e  $1$ .<sup>58)</sup>

Le funzioni (120) hanno tutte il periodo reale dato da  $4m(\lambda)/\alpha = 2\sqrt{2}m(\lambda)\sqrt[4]{1-\lambda^2}$ . Come curiosità, il periodo reale delle FIG estese risulta uguale a quello delle FTG associate per  $\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  ( $\lambda' = \pm \sqrt{3}$ ); si incontrano qui per la prima volta questi particolari valori di  $\lambda$  che assumeranno un ruolo "specificativo" negli sviluppi a venire. Le funzioni  $A_h$  e  $T_h$  hanno per periodo reale  $8m(\lambda)/\alpha$ , e hanno dei punti di diramazione sull'asse reale (spaziati da intervalli di un quarto di periodo), con un comportamento del tutto analogo a quanto visto per  $\lambda' = 0$ .

---

58) Per  $\lambda$  e  $\lambda'$  immaginari puri si ha una sorta di inversione dei ruoli delle due costanti: infatti in tal caso  $\lambda$  può essere qualsiasi, mentre la (123) mostra che  $\text{Im}\lambda'$  cade sempre tra  $-1$  e  $+1$  (estremi esclusi).

Naturalmente le (120) implicano la validità di relazioni del tipo (119), opportunamente generalizzate, che risultano:

$$\begin{aligned} Ah^2(x|\lambda') &= \frac{4}{\alpha^2} \frac{A^2 T^2}{T^4 - A^4} \left( \frac{\alpha x}{2} | \lambda \right) \\ Th^2(x|\lambda') &= \frac{1}{T^4 - A^4} \left( \frac{\alpha x}{2} | \lambda \right) \end{aligned} \quad (127)$$

$$Sh(x|\lambda') = \frac{2}{\alpha} AT \left( \frac{\alpha x}{2} | \lambda \right)$$

Le (127) possono essere invertite, in modo da dare un'espressione delle FTG estese in termini di FIG estese. Il modo più diretto per ottenerle è di partire dalla prima delle formule di duplicazione (114), che dà direttamente tale espressione per S, e di ricavare le altre per derivazione. Si ottiene così:

$$A^2(x|\lambda) = \alpha^2 \frac{Ah^2 Th^2}{Th^4 + Ah^4} \left( \frac{x}{\alpha} | \lambda' \right)$$

$$T^2(x|\lambda) = \frac{1}{Th^4 + Ah^4} \left( \frac{x}{\alpha} | \lambda' \right) \quad (128)$$

$$S(x|\lambda) = \alpha Ah Th \left( \frac{x}{\alpha} | \lambda' \right)$$

di aspetto analogo alle (127).

Inserendo le (127) nelle (128) si riottengono appunto le (114): facendo il contrario, si ottengono le formule di duplicazione per le FIG estese, che risultano .

$$\begin{aligned} Ah^2(2x) &= \frac{4 Ah^2(x) Th^2(x)}{1+4(1+\lambda'^2)Ah^4(x)Th^4(x)} \\ Th^2(2x) &= \frac{Th^4(x) + Ah^4(x)}{1+4(1+\lambda'^2)Ah^4(x)Th^4(x)} \end{aligned} \quad (129)$$

$$\text{Sh}(2x) = \frac{2 \text{Ah}(x)\text{Th}(x)}{\text{Th}^4(x) + \text{Ah}^4(x)}$$

in stretta analogia con le (114).

Anche le formule di addizione e sottrazione per le FIG estese sono del tutto analoghe a quelle per le FTG estese: di fatto esse sono date dalle (78) con la materiale sostituzione di A,T,S con Ah, Th, Sh, e con la seguente definizione di  $F_{\pm}$ :

$$F_{\pm} = \text{Ah}^2(x)\text{Th}^2(y) + \text{Ah}^2(y)\text{Th}^2(x) \mp 2 \text{Ah}(x)\text{Th}(x)\text{Ah}(y)\text{Th}(y) \cdot |\text{Th}^2(x)\text{Th}^2(y) - \text{Ah}^2(x)\text{Ah}^2(y) - \lambda'(\text{Ah}^2(x)\text{Th}^2(y) + \text{Ah}^2(y)\text{Th}^2(x))| .$$

Tali espressioni possono essere ottenute dall'elaborazione delle formule precedenti: ma nel prossimo paragrafo mostreremo come si possa arrivare a tale risultato, in conseguenza delle proprietà di trasformazione delle FTG sotto una trasformazione di second'ordine sui periodi, quasi senza far calcoli.

Anche gli sviluppi delle FIG estese in serie di Taylor mostrano una spiccata analogia con le (116'). In particolare, le formule date per A e T valgono anche per Ah e Th, con la materiale sostituzione di  $\lambda$  con  $\lambda'$  e con la trasformazione in segni + di tutti i segni - presenti nelle formule stesse (sia quelli esterni che quelli interni ai coefficienti dello sviluppo). Lo sviluppo di Sh presenta invece numerosi segni -, ed è il seguente:

$$\text{Sh}(x|\lambda') = x - \lambda' \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} \left(1 - \frac{\lambda'^2}{3}\right) + \frac{11\lambda'x^7}{210} \left(1 - \frac{\lambda'^2}{33}\right) + \frac{x^9}{120} \left(1 - \frac{34}{21}\lambda'^2 + \frac{\lambda'^4}{189}\right) + \dots$$

Per  $\lambda' = 0$  si ritrovano gli sviluppi in serie delle FIG ordinarie (ottenuti dalle (79') in cui si inseriscano le (29')). E' chiaro che ora i valori  $\lambda' = \pm 1$  non hanno nessun significato particolare. Tutti gli sviluppi in serie sopracitati sono immediatamente ricavabili utilizzando i risultati che verranno ottenuti nel prossimo paragrafo.

§ III.4 Effetto sulle FTG estese di una trasformazione di second'ordine sui periodi, e connessione con le  $\mathcal{P}u$  a invarianti reali e  $\Delta > 0$ .

Veniamo ora a considerare l'effetto sulle FTG estese di ordine 4 dovuto ad una trasformazione di 2° ordine sui periodi. Come trasformazione di riferimento<sup>59)</sup> conviene scegliere una che muti una nell'altra due  $\mathcal{P}u$  a invarianti reali, l'una con  $\Delta > 0$  e l'altra con  $\Delta < 0$ .

Si hanno due possibilità di scelta di tali trasformazioni, che verranno indicate con le lettere  $F$  e  $H$ ; la loro azione sui periodi è mostrata nei diagrammi di Fig. 18 (ove sono indicati con una tilde i periodi trasformati). In particolare la trasformazione  $F$ , se applicata ad una  $\mathcal{P}u$  a invarianti reale con  $\Delta > 0$ , la muta in uso con  $\Delta < 0$ ; la trasformazione  $H$  fa l'opposto.<sup>60)</sup> La successione delle due trasformazioni  $FH = HF$ , applicata ad una qualunque  $\mathcal{P}u$ , dà luogo al dimezzamento di entrambi i periodi, cioè alla duplicazione dell'argomento.

Poiché, come vedremo, in termini di FTG l'una dell'una o dell'altra trasformazione porta agli stessi risultati, conviene studiare in dettaglio il caso della trasformazione  $H$ , che verrà applicata, come spiegato, alle funzioni ellittiche con invarianti reali e  $\Delta < 0$  (descrivibili quindi in termini di FTG estese con  $\lambda$  reale compreso tra  $-1$  e  $+1$ ). Molti risultati però avranno validità generale. La trattazione riguarderà sia l'effetto della

---

59) Come mostrato nel già citato capitolo del testo di TRICOMI, tutte le trasformazioni di 2° ordine sono riconducibili l'una all'altra mediante trasformazioni di 1° ordine, e quindi lo studio delle trasformazioni di 2° ordine può essere limitato ad una sola tra esse, scelta in modo opportuno.

60) In termini delle trasformazioni studiate in dettaglio nel TRICOMI, si ha  $F = CLBD$ ,  $H = DLBD$ , ove le lettere indicano le trasformazioni di 1° ordine  $(B, C, D)$  e di 2° ordine  $(L)$  descritte nel testo, e applicate in successione a partire da quella di destra.



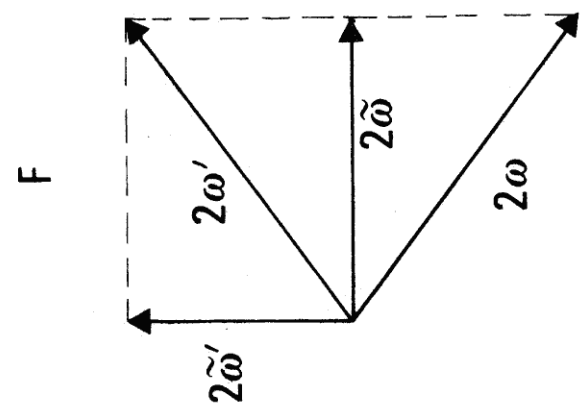
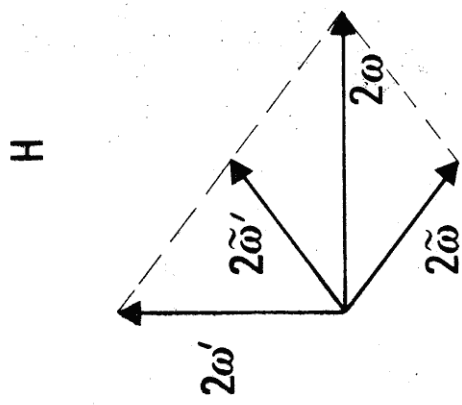


fig. 18

trasformazione sulle funzioni di Jacobi (e quindi sulle FTG) che l'effetto sulle  $\mathcal{P}u$ . Conviene quindi parametrizzare la  $\mathcal{P}u$  di partenza in modo opportuno, descrivendola in termini di due parametri reali uno dei quali sia proprio  $\lambda$  (in modulo  $\leq 1$ ), mentre per l'altro si può prendere la quantità  $r_3 = \sqrt{e_1 - e_3}$ <sup>61)</sup> che, per le  $\mathcal{P}u$  considerate, è sempre reale e non negativa. In questo modo si ottengono delle semplici espressioni per gli invarianti irrazionali  $e_1, e_2, e_3$ , per gli invarianti  $g_2, g_3$  e per l'invariante assoluto  $J$ :<sup>62)</sup>

$$e_1 = r_3^2 \frac{\lambda+3}{6} \quad e_2 = -r_3^2 \frac{\lambda}{6} \quad e_3 = r_3^2 \frac{\lambda-3}{6} \quad (130)$$

$$g_2 = r_3^4 \frac{\lambda^2+3}{3} \quad g_3 = r_3^6 \lambda \frac{(9-\lambda^2)}{27} \quad (131)$$

$$J = \frac{(\lambda^2+3)^3}{27(1-\lambda^2)^2} \quad (132)$$

Dalle espressioni precedenti si trova, come da aspettarsi, che  $J$  dipende solo da  $\lambda$ ; inoltre, tenendo fisso  $\lambda$  e variando  $r_3$ , si percorre l'intera famiglia delle  $\mathcal{P}u$  appartenenti ad un ramo della curva  $J = \text{cost.}$  mostrato in Fig. 15 (l'intera curva si ottiene considerando entrambi i valori  $\pm \lambda$ ). Tali  $\mathcal{P}u$  vanno l'una nell'altra attraverso la relazione di omogeneità (32): se si prende come riferimento la particolare  $\mathcal{P}u$  per cui è  $r_3 = 1$  (per le (68) tale  $\mathcal{P}u$  ha gli stessi periodi delle funzioni di Jacobi e delle FTG associate) tutte le altre  $\mathcal{P}u$  della famiglia si ottengono dalla (32) con  $t=r_3$ .

61) Da ora in avanti verrà usata (data una  $\mathcal{P}u$ ) la notazione abbreviata  $r_1 = \sqrt{e_1 - e_2}$ ,  $r_2 = \sqrt{e_2 - e_3}$ ,  $r_3 = \sqrt{e_1 - e_3}$ , ove la determinazione dei radicali va fatta seguendo la prescrizione data nel TRICOMI. Si ha  $r_1 = k'r_3, r_2 = kr_3$ , ove  $k$  e  $k'$  si riferiscono alle funzioni di Jacobi associate alla  $\mathcal{P}u$  studiata.

62) E' chiaro che le formule seguenti continuano a valere per qualunque  $\lambda$ , anche complesso. Può essere interessante ritrovare i risultati già ottenuti quando si cambia  $\lambda$  in uno dei valori (108): in tal caso  $J$  resta invariato, e così pure i rapporti tra gli invarianti (130), che vengono sostanzialmente solo a scambiarsi di ruolo fra loro.

Indichiamo con  $G_2 = \frac{\lambda^2+3}{3}$  e  $G_3 = \frac{\lambda(9-\lambda^2)}{27}$  gli invarianti relativi a tale funzione.

Per  $|\lambda| \leq 1$ , l'insieme delle  $\mathcal{P}(u|G_2, G_3)$  è rappresentato dalla curva a tratto pieno AFA' in Fig. 15: la continuazione a tratteggio di tale curva corrisponde ai valori reali di  $\lambda$  in modulo maggiori di 1.

Passiamo ora all'effetto della trasformazione H, trattando separatamente il caso della trasformazione delle funzioni di Jacobi e delle  $\mathcal{P}u$ : tutte le quantità trasformate saranno contrassegnate con una tilde. Applicando successivamente le formule date nel TRICOMI relativamente alle trasformazioni che compongono H (v. nota <sup>60</sup>), si trova che l'argomento  $v$  delle funzioni di Jacobi viene trasformato in  $\tilde{v}$  dato da

$$\tilde{v} = 2e^{i\pi/4} \sqrt{kk'} v = e^{i\pi/4} \left( \frac{2}{\alpha} \right) v \quad (133)$$

ove  $k, k', \alpha$  (definito dalla (121)) si riferiscono alle funzioni di Jacobi di partenza, e possono essere tutti espressi in funzioni di  $\lambda$ . Inoltre,  $k$  e  $k'$  si trasformano nel seguente modo:

$$\tilde{k} = \frac{k'+ik}{2e^{i\pi/4} \sqrt{kk'}} \quad \tilde{k}' = \frac{i(k'-ik)}{2e^{i\pi/4} \sqrt{kk'}} \quad (134)$$

Quando  $k$  e  $k'$  sono entrambi reali e positivi (cioè quando si parte dalle funzioni di Jacobi associate alla FTG con  $-1 < \lambda < 1$ ),  $\tilde{k}$  e  $\tilde{k}'$  risultano complessi coniugati, come del resto è da aspettarsi per funzioni di Jacobi associate ad una  $\mathcal{P}u$  con invarianti reali e  $\Delta > 0$  (si veda più avanti). In tal caso dunque si ha

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \kappa e^{-i\delta} \\ \tilde{k}' &= \kappa e^{i\delta} \end{aligned} \quad (135)$$

ove  $\kappa, \delta$  sono reali ( $\kappa > 0$ ), ed esprimibili in funzione di  $\lambda$ :

$$\kappa = \frac{\alpha}{2} \quad \delta = \frac{1}{2} \arcsin \lambda \quad (136)$$

con il solito significato di  $\alpha$ .

Ma la conseguenza più interessante della trasformazione  $H$  si trova calcolando i valori trasformati delle quantità  $\lambda$ ,  $\lambda'$  e  $\alpha$ . Utilizzando le definizioni (104'), (121) e (123), e servendosi delle formule (134), si ottiene infatti, qualunque sia  $\lambda$ :<sup>63)</sup>

$$\tilde{\lambda} = i\lambda' \quad \tilde{\lambda}' = i\lambda \quad \tilde{\alpha} = \frac{2}{\alpha} \quad (137)$$

così che la relazione (126) può essere scritta nella seguente maniera:

$$(1-\lambda^2)(1-\tilde{\lambda}^2) = 1 \quad (138)$$

mentre l'ultima delle (137) può anche essere messa sotto la forma (sostanzialmente equivalente alla (138)):

$$4kk'\tilde{k}\tilde{k}' = 1$$

Quando  $\lambda$  è reale e compreso tra  $-1$  e  $1$  si ritrovano alcune conclusioni già raggiunte nel paragrafo precedente, e cioè che le FTG e FIG trasformate (associabili a una  $\Phi_u$  a invarianti reali e  $\Delta > 0$ ) hanno rispettivamente  $\lambda$  e  $\lambda'$  immaginari puri, mentre la quantità  $\alpha$  che entra nella definizione delle FIG estese si mantiene reale.

Inoltre le (137) confermano quello "scambio di ruolo" tra  $\lambda$  e  $\lambda'$  accennato nella precedente nota<sup>58)</sup>: infatti è la parte immaginaria di  $\tilde{\lambda}'$  a essere limitata tra  $-1$  e  $1$ , mentre  $\lambda$  può assumere qualsiasi valore immaginario puro.

Passiamo ora alle leggi di trasformazione delle funzioni di Jacobi (in cui si mantiene la notazione  $\alpha = 1/\sqrt{kk'}$ ):

---

63) Si intende che, quando  $\lambda$  non è reale e compreso tra  $-1$  e  $1$ , nel qual caso la definizione di  $\lambda'$  e  $\alpha$  non pone problemi, la validità delle (137) è connessa alla scelta di un'opportuna determinazione delle radici che figurano nella definizione di  $\lambda'$  e  $\alpha$ , scelta che risulta sempre possibile. Non è il caso di dilungarsi ulteriormente su questo punto, perché la situazione che interessa di più è quella di  $\lambda'$  e  $\alpha$  reali.

$$\begin{aligned} \tilde{\text{sn}}_v &= \text{sn}(\tilde{v}, \tilde{k}) = e^{i\pi/4} \frac{2}{\alpha} \frac{\text{sn} \, \text{dn}}{\text{dn}^2 + \frac{i}{\alpha^2} \text{sn}^2} (v, k) \\ \tilde{\text{cn}}_v &= \text{cn}(\tilde{v}, \tilde{k}) = \frac{\text{dn}^2 - \frac{i}{\alpha^2} \text{sn}^2}{\text{dn}^2 + \frac{i}{\alpha^2} \text{sn}^2} (v, k) \\ \tilde{\text{dn}}_v &= \text{dn}(\tilde{v}, \tilde{k}) = \frac{\text{cn}}{\text{dn}^2 + \frac{i}{\alpha^2} \text{sn}^2} (v, k) \end{aligned} \quad (139)$$

Di per sé queste relazioni non sembrano molto interessanti, perché (come del resto ci si deve aspettare, data la natura delle  $\mathcal{P}u$  associate) si tratta di formule che mescolano quantità reali e immaginarie. Ma si ottiene una notevolissima semplificazione se si calcolano i rapporti tra le (138) che figurano nelle definizioni (120) delle FIG estese. (A causa dell'ultima delle (137), la (133) può essere riscritta come  $v = e^{i\pi/4} \tilde{\alpha} v$ ). In particolare si ha

$$\frac{\tilde{\text{sn}}_v}{\tilde{\text{dn}}_v} = \frac{\text{sn}(e^{i\pi/4} \tilde{\alpha} v)}{\text{dn}(e^{i\pi/4} \tilde{\alpha} v)} = \tilde{\alpha} \text{Sh}(e^{i\pi/4} v | \tilde{\lambda}') = e^{i\pi/4} \frac{2}{\alpha} S(v | \lambda)$$

e, ricordando nuovamente le (137) e ponendo  $\eta = e^{-i\pi/4}$ , finalmente si ottiene

$$\text{Sh}(v | i\lambda) = \frac{1}{\eta} S(\eta v | \lambda) \quad (140)$$

da cui per derivazione si deduce immediatamente

$$\begin{aligned} \text{Th}(v | i\lambda) &= T(\eta v | \lambda) \\ \text{Ah}(v | i\lambda) &= \frac{1}{\eta} A(\eta v | \lambda) \end{aligned} \quad (141)$$

Queste formule di trasformazione forniscono la generalizzazione della relazione (29') che fa passare dalle FTG alle FIG: si vede che oltre alla ro-

tazione dell'argomento nel piano complesso, è necessario, quando  $\lambda \neq 0$ , ruotare anche  $\lambda$  (che dopo l'operazione assume il significato di  $\lambda'$ ). A dire il vero, la generalizzazione delle (29') attraverso le (141) può apparire incompleta, perché delle quattro radici quarte di  $-1$  intervengono in tali formule solo i valori  $\eta = e^{-i\pi/4}$  ed  $\eta = -e^{-i\pi/4} = e^{3i\pi/4}$  (la validità delle (141) in quest'ultimo caso è un'immediata conseguenza della parità delle FTG). Tuttavia vi sono numerose maniere di accertare cosa succede quando nei secondi membri delle (141) si inserisce uno degli altri due valori possibili (complessi coniugati dei precedenti, e che verranno per il momento indicati con  $\eta^*$ ). Un metodo lungo, ma istruttivo, consiste nel considerare, invece della trasformazione H, la trasformazione  $F^{64}$ ; si può anche calcolare dalle (139) il rapporto  $\tilde{S} = \tilde{s}\tilde{n} v / \tilde{d}\tilde{n} v / \tilde{c}\tilde{n} v$ ; ma il procedimento più rapido consiste nel porre  $\eta^* = i\eta$  (come è sempre il caso) e di utilizzare opportunamente le relazioni (109) e (110). In particolare la (140) con questo procedimento dà luogo a

$$\text{Sh}(v|-i\lambda) = \frac{1}{\eta^*} S(\eta^* v|\lambda) \quad (142)$$

e per derivazione si ottengono le analoghe delle (141).

Tutte le formule di trasformazione possono essere infine messe insieme con una notazione compatta del tipo:

---

64) L'effetto della trasformazione F non verrà trattato in dettaglio per motivi di brevità, e ne saranno soltanto riportati qui i risultati più importanti, che sono molto simili a quelli a quelli già ottenuti per la trasformazione H. In particolare, le formule (133), (137) e (139) restano le stesse, con la sostituzione (dappertutto di  $e^{i\pi/4}$  con  $e^{3i\pi/4}$ , e di  $i$  con  $-i$ , mentre nelle (134) vanno semplicemente scambiati fra loro  $k$  e  $k'$ .  
E' chiaro che l'ultima delle (137) e la (138) restano invariate.

$$\begin{aligned}
 Ah(v|-\eta^2\lambda) &= \frac{1}{\eta} A(\eta v|\lambda) \\
 Th(v|-\eta^2\lambda) &= T(\eta v|\lambda) \\
 Sh(v|-\eta^2\lambda) &= \frac{1}{\eta} S(\eta v|\lambda)
 \end{aligned}
 \tag{143}$$

ove  $\eta$  è ora una qualsiasi radice quarta di  $-1$ . Si ritrova quindi la generalizzazione completa delle (29') (riprodotte per  $\lambda = 0$ ).

Si tenga presente che le (143) valgono per qualunque  $\lambda$ , anche se, come più volte ripetuto, i casi che più interessano sono quelli di  $\lambda$  reale o immaginario puro, corrispondenti alle  $\Phi_u$  con invarianti reali.

E' chiaro che, mediante l'uso delle (143), si ottengono immediatamente le formule di addizione e sottrazione, gli sviluppi in serie, etc., per le FIG estese, a partire dalle analoghe espressioni per le FTG estese, richiamate nel §III.2. Si ottengono così con gran facilità tutti i risultati enunciati nel paragrafo precedente.

Passiamo ora al problema della trasformazione delle  $\Phi_u$ , la cui soluzione permetterà di esprimere in maniera semplice tutte le  $\Phi_u$  a invarianti reali e  $\Delta > 0$  in termini di FTG estese con  $\lambda$  reale, in modo da coinvolgere solo quantità reali per valori reali dell'argomento. Come effetto della trasformazione  $H$  su una  $\Phi_u$  con  $\Delta < 0$  (parametrizzata secondo le (130)-(132)), si ha la seguente espressione per gli invarianti irrazionali della funzione trasformata:

$$\begin{aligned}
 \tilde{e}_1 &= e_2 + 2ir_3^2kk' = r_3^2\left(-\frac{\lambda}{3} + i\sqrt{1-\lambda^2}\right) \\
 \tilde{e}_2 &= -2e_2 = \frac{2\lambda}{3} r_3^2
 \end{aligned}
 \tag{144}$$

$$\tilde{e}_3 = e_2 - 2ir_3^2kk' = r_3^2\left(-\frac{\lambda}{3} - i\sqrt{1-\lambda^2}\right)$$

Quando  $-1 < \lambda < 1$  la  $\Phi u$  trasformata è del tipo voluto ( $e_2$  reale,  $e_1$  ed  $e_3$  complessi coniugati): nel caso particolare  $\lambda = \pm 1$  le  $\Phi u$  trasformate sono le stesse  $\Phi u$  (degeneri) di partenza, in cui sono permutati tra loro  $e_1, e_2, e_3$ .

E' facile convincersi che, quando  $\lambda$  varia da  $-1$  a  $1$  e  $r_3$  da  $0$  a  $\infty$ , l'insieme delle  $\Phi u$  trasformate copre tutte e sole le  $\Phi u$  a invarianti reali e discriminante positivo.

Il modulo  $\rho$  e la fase  $\phi$  di  $\tilde{e}_1$  sono dati da

$$\rho = \frac{r_3^2}{3} \sqrt{9-8\lambda^2} \quad (145)$$

$$\cos \phi = -\frac{\lambda}{\sqrt{9-8\lambda^2}} \quad \sin \phi = \frac{3\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{9-8\lambda^2}} \quad \cotg \phi = -\frac{1}{3} \lambda' \quad (146)$$

e gli invarianti  $\tilde{g}_2, \tilde{g}_3$  e l'invariante assoluto  $\tilde{J}$  si esprimono nella forma

$$\tilde{g}_2 = -\frac{4}{3} r_3^4 (3-4\lambda^2) \quad \tilde{g}_3 = \frac{8}{27} r_3^6 \lambda (9-8\lambda^2) \quad (147)$$

$$\tilde{J} = \frac{(3-4\lambda^2)^3}{27(1-\lambda^2)}$$

Le (146) mostrano che  $\phi$  dipende soltanto da  $\lambda$  (in un certo senso,  $\cos \phi$  gioca per le  $\Phi u$  con  $\Delta > 0$  il ruolo che gioca  $\lambda$  quando  $\Delta < 0$ , mentre  $\rho$  si può dire che rappresenti un parametro "di omogeneità" analogo a  $r_3^2$ ). Le (147) e (148) mostrano che le funzioni di tipo equianarmonico ( $J = g_2 = 0$ ) si ottengono trasformando le  $\Phi u$  corrispondenti a  $\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  (valore già incontrato in precedenza): le (137) quindi affermano che per tali funzioni si ha  $\tilde{\lambda} = \pm i\sqrt{3}$  e  $\tilde{\alpha} = 1$ . Con un po' d'algebra si può controllare dalle formule precedenti che  $\tilde{k}$  e  $\tilde{k}'$  risultano complessi coniugati



secondo le formule (135) già viste: in termini di  $\phi$  si ha

$$\cos 2\delta = \frac{1}{2\kappa} 2 = (1+9 \cotg^2 \phi)^{-1/2}$$

$$\tilde{\lambda} = 2i\kappa^2 \sin 2\delta = -3i \cotg \phi$$

Utilizzando in queste formule le (146) si ritrovano le (136) e (137).  
 Come  $\mathcal{P}u$  di riferimento tra tutte quelle corrispondenti allo stesso valore di  $\lambda$  (o di  $\phi$ ) conviene scegliere la trasformata della  $\mathcal{P}(u|G_2, G_3)$ , che sarà indicata con  $\tilde{\mathcal{P}}u = \mathcal{P}(u|\tilde{G}_2, \tilde{G}_3)$ , ove i valori di  $\tilde{G}_2, \tilde{G}_3$  si ottengono dalle (147) ponendo  $r_3 = 1$ . Quando  $|\lambda| \leq 1$  l'insieme di tali  $\mathcal{P}u$  è rappresentato in Fig. 15 dai punti della curva ALA' (a tratto pieno): il prolungamento tratteggiato di tale curva corrisponde alle  $\mathcal{P}u$  trasformate quando  $\lambda$  è reale e in modulo maggiore di 1: tali  $\mathcal{P}u$  continuano ad avere  $\Delta < 0$ , come è controllabile (oltre che dalla Figura) anche da molte fra le formule date (p.es. la (144) e la (148)<sup>65</sup>). Quando  $|\lambda| < 1$  tutte le  $\mathcal{P}u$  trasformate hanno, per costruzione, un periodo reale e un periodo immaginario uguali a quelli delle  $\mathcal{P}u$  di partenza<sup>66</sup>): ne segue che tutte le  $\tilde{\mathcal{P}}u$ , rappresentate dai punti della curva ALA', hanno il periodo reale e quello immaginario uguali a quelli delle corrispondenti FTG con parametro  $\lambda$ , e giocano quindi il ruolo che, nel caso delle FTG ordinarie, gioca la  $\mathcal{P}(u|-4,0)$ , ripetutamente incontrata nella trattazione del §II.5 (e che in Fig. 15 è rappresentata dal punto L, mentre la  $\mathcal{P}(u|1,0)$  è rappresentata dal punto F)<sup>67</sup>).

Ogni  $\tilde{\mathcal{P}}u$  potrà quindi essere semplicemente espressa in termini delle FTG estese, con un opportuno valore di  $\lambda$  (in modulo  $\leq 1$ ), mediante formule che, per  $\lambda = 0$ , devono ricondursi alle (62) e (63). Tali formule sono immediatamente ricavabili combinando opportunamente fra loro le (168) riferite alla  $\tilde{\mathcal{P}}u = \mathcal{P}(u|\tilde{G}_2, \tilde{G}_3)$ , e alle funzioni di Jacobi ad essa direttamente associate

65) In questo caso nelle (145) e (146)  $\rho$  e  $\phi$  perdono il loro significato di modulo e argomento.

66) Ciò è più vero nel caso di  $|\lambda| > 1$ .

67) La relazione tra le due  $\mathcal{P}u$  corrispondenti (per ogni  $\lambda$ ) è sempre riconducibile ad un'equazione del tipo di quella ottenibile confrontando la (73) con la (62).

(e a cui corrispondono FTG estese con  $\lambda$  immaginario puro). Contrassegnando con una tilde tutte le grandezze pertinenti alle summenzionate funzioni, si ha:

$$\tilde{\wp}u - \tilde{e}_2 = \tilde{r}_3^2 \frac{\operatorname{dn}^2(\tilde{r}_3 u, \tilde{k})}{\operatorname{sn}^2(\tilde{r}_3 u, \tilde{k})} \quad (149)$$

Dalle (144) con  $r_3 = 1$  si ha:

$$\tilde{r}_3 = \sqrt{2} e^{i\pi/4} \frac{4}{\sqrt{1-\lambda^2}} = e^{i\pi/4} \frac{2}{\alpha} = e^{i\pi/4} \tilde{\alpha}$$

(ricordando l'ultima delle (137)).

Inserendo infine tale valore nella (149), e utilizzando anche la seconda delle (144) con  $r_3 = 1$ , si ottiene:

$$\tilde{\wp}_x = \frac{2\lambda}{3} + \frac{i}{\operatorname{Sh}^2(e^{i\pi/4} x | i\lambda)} = \frac{2\lambda}{3} + \frac{1}{S^2(x|\lambda)} \quad (150)$$

Nei passaggi si è tenuto conto dell'espressione (137) per  $\tilde{\lambda}'$ , e si è utilizzata la (140) con  $\eta = e^{-i\pi/4}$ .

Derivando la (150) rispetto a  $x$  si ottiene:

$$\tilde{\wp}'_x = -2 \frac{1}{A^3} (x|\lambda) \quad (151)$$

La (150) e la (151) combinate permettono facilmente di ottenere delle relazioni analoghe alle (63), in cui al posto di  $\wp$  va messo  $\tilde{\wp} - \tilde{e}_2 = \tilde{\wp} - \frac{2\lambda}{3}$ , che, come più volte sottolineato, è il quadrato di una funzione uniforme. E' di immediata verifica la relazione  $\tilde{\wp}''_x = 6\tilde{\wp}^2_x - \frac{1}{2} \tilde{G}_2$ .

Si è quindi ottenuta una semplice relazione che (con l'aiuto della relazione di omogeneità) permette di esprimere tutte le  $\wp u$  a invarianti reali e  $\Delta > 0$  in termini delle FTG estese di ordine 4, rimanendo nel campo reale per

valori reali dell'argomento.

### III.5 Il problema dell'estensione delle FTG di ordine 3 e 6.

Gli interessanti risultati ottenuti nei paragrafi precedenti con il procedimento di estensione delle FTG e FIG di ordine 4 possono far pensare che una procedura dello stesso tipo possa essere applicata anche per le FTG di ordine 3 (o 6), in modo da ottenere una descrizione completa della famiglia delle funzioni ellittiche, stavolta a partire dalla classe delle  $\mathcal{P}_u$  con  $\Delta > 0$  (centrate intorno alle  $\mathcal{P}_u$  equianarmoniche). Invece, come verrà discusso in questo paragrafo, il parallelismo tra i due casi non si verifica. Infatti, cominciando col considerare la situazione più semplice (FTG di ordine 3), vediamo quali funzioni vengono descritte quando si effettua un'estensione semplice, che conserva le aree, in cui la funzione  $F$  definita dalla (91) sia un polinomio in  $A$  e  $T$  (chiaramente omogeneo di grado 3). La validità delle condizioni (92) e (93) fissa in modo univoco la dipendenza funzionale di  $F$  da  $A$  e  $T$  nella forma  $A^2T + AT^2$ , in modo che per tale estensione si ha (come al solito, si è eliminata nei simboli l'indicazione dell'ordine  $n$  delle FTG, e di tutti gli altri argomenti quando il farlo non ingenera confusione):

$$A^3 + T^3 + \Lambda(A^2T + AT^2) = 1 \quad (152)$$

(Per il parametro moltiplicativo si è usato il simbolo  $\Lambda$ , perché si vuole riservare il simbolo  $\lambda$  alla quantità che distingue fra loro le FTG estese di ordine 4, e che, come visto nel paragrafo precedente, può servire a distinguere anche le  $\mathcal{P}_u$  con  $\Delta > 0$ ).

Ebbene, le funzioni che soddisfano la relazione (152) e il sistema differenziale di tipo (95) ad essa conseguente non ricoprono, al variare di  $\Lambda$ , l'intera classe delle funzioni ellittiche, ma restano, per così dire, confinate nell'ambito delle  $\mathcal{P}_u$  equianarmoniche, perché sono sempre riconducibili

a opportune combinazioni lineari delle FTG ordinarie <sup>68)</sup>. Più precisamente, come è facile, benché noioso, controllare, le funzioni cercate sono date da (con ovvio significato dei simboli):

$$\begin{aligned} A(x|\Lambda) &= a A(\gamma x + \delta|0) + b T(\gamma x + \delta|0) \\ T(x|\Lambda) &= b A(\gamma x + \delta|0) + a T(\gamma x + \delta|0) \end{aligned} \tag{153}$$

ove <sup>69)</sup>

$$a+b = (1+\Lambda)^{-1/3}, \quad a-b = (1-\frac{\Lambda}{3})^{-1/2}(1+\Lambda)^{1/6}$$

$$\gamma = (1-\frac{\Lambda}{3})^{1/2}(1+\Lambda)^{1/6}, \quad \delta = \arctan(\gamma a) = \arccos(-\gamma b)$$

68) Si ritrova la stessa situazione tentando un'estensione di tipo analogo per le funzioni trigonometriche ordinarie (n=2): si ottiene infatti per le funzioni estese una combinazione lineare di seni e coseni.

69) Per  $\Lambda$  reale, si vede che si rimane nel campo reale per argomenti reali solo quando è  $-1 < \Lambda < 3$ ; tuttavia le funzioni sono definibili per qualunque  $\Lambda$ , e, se  $\Lambda$  è reale, risultano reali quando  $x$  è reale e prossimo a zero, come si può accertare esaminando la struttura delle curve parametriche. I casi  $\Lambda = -1$  e  $\Lambda = 3$  si ottengono passando opportunamente al limite nelle (153), e forniscono soluzioni non periodiche [per  $\Lambda = 3$  si ritrovano le FTG di ordine 1 (eq.(7))]. Probabilmente anche in questo caso, come si è visto per le FTG estese di ordine 4, la soluzione per  $\Lambda$  esterno all'intervallo  $(-1,3)$  è riconducibile alla soluzione per  $\Lambda$  interno a tale intervallo mediante un'opportuna trasformazione. Tuttavia, dato lo scarso interesse del problema, lo studio in tale direzione non è stato affrontato.

Per  $n=6$ , invece, il ragionamento che porta al risultato precedente non si può ripetere, e il sistema differenziale delle FTG estese con  $F(A,T)$  data da un polinomio omogeneo di grado 6 ammette soluzioni non banali. Vi sono diverse maniere di scegliere la forma di  $F(A,T)$ : le più semplici portano alle relazioni seguenti:

$$A^6 + T^6 + 2\Lambda A^3 T^3 = 1 \quad (154)$$

oppure:

$$A^6 + T^6 + 3\Lambda(A^2 T^4 + A^4 T^2) = 1 \quad (155)$$

di cui forse l'ultima è preferibile <sup>70)</sup>.

Tuttavia anche queste funzioni non sembrano essere adatte per la descrizione della classe delle funzioni ellittiche al variare di  $\Lambda$ : infatti, con l'eccezione di alcuni valori di  $\Lambda$ , esse sembrano piuttosto descrivere particolari classi di funzioni iperellittiche. Infatti, gli integrali associati alla definizione di alcune semplici funzioni inverse (come quelli per  $\text{arcS}$ , immediatamente definibili dalle (154) o (155) tenendo presente le (101), o, nel caso (154), anche quello per  $\text{arcAT}$ ) non sembrano riconducibili ad integrali ellittici, per quanto complicati, come invece dovrebbe essere il caso <sup>71)</sup>. Naturalmente, queste conclusioni non sono sicure al 100%, in quanto non è stata fornita un'effettiva dimostrazione riguardo alla non riconducibilità degli integrali in questione ad integrali ellittici: tuttavia la loro validità appare piuttosto probabile.

In tale situazione, se si vuole portare ugualmente avanti lo studio del problema della descrizione delle funzioni ellittiche in termini di opportune FTG estese con  $n=3$  e  $6$ , si possono assumere due diversi punti di vista:

a) cercare estensioni delle FTG (ovviamente semplici) che però non conservano

---

70) Infatti nel caso (154) si vede che si ricade nello stesso tipo di funzione (Pu equianarmonica) per tre valori di  $\Lambda$  ( $0, \pm 1$ ), mentre nel caso (155) ciò accade solo per  $\Lambda=0$ , e per  $\Lambda=1$  si ottengono invece le funzioni trigonometriche ordinarie.

71) In particolare, gli integrali in questione non ricadono in nessuno dei casi trattati nel volume di GRÖBNER-HOFREITER, *Integraltafel*n (1. Teil), Ed. Springer, che contiene un'ampia collezione di integrali riconducibili ad integrali ellittici.

le aree;

b) cercare un'estensione delle FTG che conservi le aree, preparandosi a trovare dei risultati di aspetto complicato.

Sia il primo che il secondo procedimento portano in generale a più soluzioni. Tuttavia, a giudizio di chi scrive, un'estensione che non conservi le aree ha un minore interesse matematico, perché, in un certo senso, la dipendenza funzionale della  $F$  da  $A$  e  $T$  diviene abbastanza arbitraria, e soggetta a criteri soggettivi di scelta. Per questa ragione, accenneremo a un solo possibile esempio di soluzione di tale tipo (per  $n=3$ ) alla fine di questo paragrafo, senza discuterlo a fondo. Invece, un procedimento di estensione che conservi le aree, e che riproduca la FTG ordinarie per  $\Lambda = 0$ , deve seguire (come vedremo) delle linee piuttosto rigide, che permettono di trattare in modo unitario i vari possibili casi. E' allo studio di tale procedimento che verrà dedicata la maggior parte della trattazione di questo paragrafo.

Poiché la maniera più diretta per definire un'estensione che conserva le aree consiste nell'uso delle relazioni (101), analogamente a quanto già fatto nel caso dell'ordine 4 partiamo da un'espressione per  $S_3$  (estesa) che generalizzi la definizione deducibile dalle (41), e precisamente (con  $\alpha, \beta, B$  per il momento supposti reali):

$$S_3(x) = \frac{1 + \frac{1}{B} P'(\alpha x + \beta)}{1 - \frac{1}{B} P'(\alpha x + \beta)} \quad (156)$$

Nella (156) non sono stati di proposito indicati gli invarianti della  $P'$ : infatti, attraverso la relazione di omogeneità si può scegliere una qualunque  $P_u$  appartenente ad una famiglia con  $J = \text{cost.}$  ( $1 \geq J \geq -\infty$ ) definendo in modo opportuno le tre costanti  $\alpha, \beta, B$  che figurano nella (156). Più precisamente, detto  $t$  il parametro di omogeneità che fa passare da una  $P_u$  ad un'altra [eq.(32)],  $\alpha$  e  $\beta$  variano proporzionalmente a  $t^{-1}$ ,  $B$  proporzionalmente

a  $t^3$ . Se si vuole però che le costanti che figurano nella (156) si mantengano reali, si può passare solo da una  $Pu$  ad un'altra con lo stesso segno di  $g_3$ : e, dato che la (156) deve includere il caso particolare delle FTG ordinarie, deve essere  $g_3 \geq 0$ . Le  $Pu$  con lo stesso  $J$  e  $g_3 < 0$  intervengono soltanto nella definizione delle FTG estese sull'asse immaginario, analogamente a quanto già trovato per le FTG ordinarie (si vedano ad es. le eq. (38)).

La condizione  $S(0) = 0$  (si sopprime nuovamente da ora in poi l'indice 3) richiede che sia  $B = -P'\beta$ ; poiché, senza perdita di generalità, si può sempre supporre  $\beta$  reale e compreso tra 0 e  $\omega_2$ , si ha  $B > 0$ . La scelta di  $\beta$  (che si deve ridurre a 1/3 del periodo reale per  $g_2 = 0$ ) fissa la relazione <sup>72)</sup> tra il periodo delle funzioni e il valore di  $m$ , definibile come il minimo argomento reale  $> 0$  per cui  $S(m) = \infty$ : è chiaro che si ha la relazione

$$\alpha m = 2(\omega_2 - \beta) \quad (157)$$

ove (è bene ricordare)  $\omega_2$  rappresenta il semiperiodo reale della  $Pu$ .

Per ricavare l'espressione di  $A^2$  e  $T^2$ , secondo il metodo già sperimentato, si deriva la (156) rispetto a  $x$ , ottenendo (con  $B = -P'\beta$ :

$$\frac{T^2}{A^2} = \frac{\left(1 + \frac{P'(\alpha x + \beta)}{P'\beta}\right)^2}{-\frac{2\alpha}{P'\beta} P''(\alpha x + \beta)}$$

La condizione  $T^2(0) = 1$  fissa  $\alpha = -\frac{2P'\beta}{P''\beta} > 0$ , e finalmente si arriva alle espressioni (con  $u = \alpha x + \beta$ ):

$$\frac{A^2}{T^2} = \frac{\left(1 + \frac{P'u}{P'\beta}\right)^2}{4\left(\frac{P''u}{P''\beta}\right)} \quad (158)$$

---

72) Più avanti si vedrà infatti che, fissato  $\beta$ , resta determinato anche  $\alpha$ .

che risultano chiaramente indipendenti della particolare scelta della  $\mathcal{P}u$  nella famiglia  $\{J = \text{cost}, g_3 \geq 0\}$ , o, come si dirà da ora in poi per brevità, "indipendenti da  $t$ " (essendo  $t$  il parametro di omogeneità che fa passare da una  $\mathcal{P}u$  ad un'altra).

Qualunque sia la scelta di  $\beta$  (o meglio del rapporto  $f = \beta/\omega_2$ , che risulta indipendente da  $t$ )<sup>73)</sup>, le(108) mostrano che, lungo l'asse reale, ove  $\mathcal{P}''u$  è sempre positivo, il comportamento delle funzioni  $A$  e  $T$  è sostanzialmente analogo a quello delle FTG ordinarie (con poli semplici nei punti ove  $u$  è nullo o è un multiplo del periodo della  $\mathcal{P}$ ). Invece fuori dall'asse reale si ha una notevole differenza di comportamento, come conseguenza del fatto che, quando  $g_2 \neq 0$ , gli zeri di  $\mathcal{P}''$  sono semplici: quindi in corrispondenza di tali punti sia  $A$  che  $T$  hanno dei punti di diramazione di tipo radice quadrata, ove le funzioni divergono. (Da questo punto di vista il comportamento delle varie funzioni si avvicina a quello delle FTG di ordine 4). I valori di tali punti di diramazione sono dati dalla relazione  $\mathcal{P}u = \pm \sqrt{\frac{g_2}{12}}$ , e per ogni scelta del segno si hanno due punti di tale tipo in un campo fondamentale, così che il numero totale di punti di diramazione in un tale campo ammonta a quattro, che possono essere uniti a due a due da opportuni tagli. La situazione si presenta in modo diverso, per  $g_2$  reale, a seconda che sia  $g_2 > 0$  ( $J < 0$ ) oppure  $g_2 < 0$  ( $J > 0$ ). Per  $g_2 > 0$  il valore di  $\mathcal{P}u$  in corrispondenza dei punti di diramazione è reale: ma, come già visto,  $u$  non può essere reale, e quindi deve essere (a meno di periodi) immaginario puro. I quattro valori possibili per  $u$ , in conseguenza delle ben note proprietà di simmetria delle funzioni di Weierstrass, de

---

73) Vanno comunque sempre esclusi i valori estremi  $f = 0$  e  $f = 1$ , per cui nella (156) le costanti  $B$  e/o  $\alpha$  si annullano o divergono.

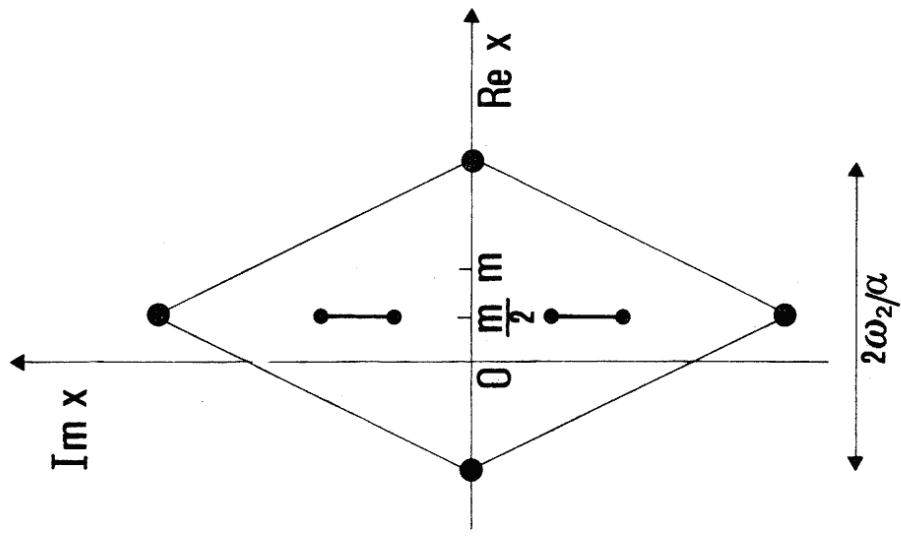


vono costituire due coppie simmetriche rispetto al centro del campo fondamentale ( $\omega_2$  o punti ad esso equivalenti), giacenti su una retta parallela all'asse immaginario. E' facile convincersi che la stessa cosa accade anche per A e T: per non avere l'asse reale intersecato da tagli, si possono unire fra loro i due punti di diramazione giacenti nella metà superiore del campo fondamentale, e i due giacenti nella metà inferiore, mediante un taglio rettilineo parallelo all'asse immaginario, come è mostrato in Fig. 19a, in cui è rappresentato lo schema del campo fondamentale di A e T includente l'origine (ove la parte reale dei punti di diramazione è  $\frac{m}{2}$ ). Invece per  $g_2 < 0$  i valori cercati di  $u$  (e di  $x$ ) [per cui  $\Phi u$  è immaginario puro] sono disposti (sempre per le proprietà di simmetria della  $\Phi u$ ) nei vertici di un rettangolo con i lati paralleli agli assi, centrato nel punto  $u = \omega_2(x=m/2)$  e analoghi, secondo lo schema di Fig. 19b: in questo caso i tagli vanno presi paralleli all'asse reale. Nel limite  $g_2 \rightarrow 0$  la coppia di punti di diramazione uniti da un taglio si "fondono" in un punto situato sulla parallela per  $m/2$  all'asse immaginario (ove  $\Phi u = 0$ ), dando luogo ad ulteriori poli semplici. Ne segue che l'uniformità delle FTG ordinarie, e le loro eccezionali proprietà di simmetria,<sup>74)</sup> appaiono come un fenomeno isolato e non "estendibile", a differenza del caso  $n=4$ , ove le FTG ordinarie rappresentano sì un caso di massima simmetria, ma senza sostanziali differenze rispetto al caso generale. Mentre le espressioni (156) e (158) permettono di risalire abbastanza agevolmente al comportamento delle FTG estese nel piano complesso,

---

74) Si pensi alle formule collegative, che ovviamente non possono valere per  $g_2 \neq 0$ , in quanto ad es. A e T hanno punto di diramazione divergenti,  $1/A$  e  $1/T$  li hanno non divergenti, S e  $1/S$  non li hanno affatto.

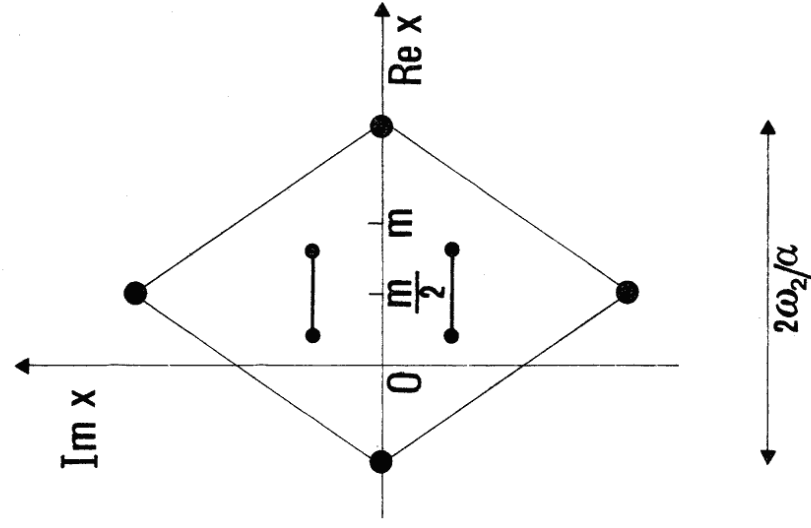
$g_2 > 0$



a)

$g_2 < 0$

- polo
- punto di diramazione



b)

fig.19

invece risulta più complicato ottenere le relazioni differenziali per tali funzioni, e la specificazione della funzione  $F(A,T)$  che entra nella relazione (91). A tale scopo, dalle (156) e (158) si possono ricavare le seguenti formule:

$$\frac{P'u}{P'\beta} = \frac{T - A}{A + T} \quad (159)$$

$$\frac{P''u}{P''\beta} = \frac{1}{(A+T)^2}$$

Inoltre, sfruttando le relazioni tra  $P, P'$  e  $P''$  si può eliminare  $P$  ed arrivare all'identità

$$\frac{2}{3} (P''u - g_2) \sqrt{\frac{P''u}{6} + \frac{g_2}{12}} = P'^2u + g_3 \quad (160)$$

Inserendo le (159) nella (160), e ponendo  $\eta = (T-A)^2$ ,  $\xi = (T+A)^2$ , si ottiene infine la relazione

$$\eta = -\kappa_3 \xi + C(1 - \kappa_2 \xi) \sqrt{\frac{1}{\xi} + \frac{\kappa_2}{2}} \quad (161)$$

ove appaiono le due costanti indipendenti da  $t$ :

$$\kappa_2 = \frac{g_2}{P''\beta}, \quad \kappa_3 = \frac{g_3}{P'\beta^2} \quad (162)$$

mentre la costante  $C = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{(P''\beta)^{3/2}}{P'\beta^2}$ , anch'essa indipendente da

$t$ , si può esprimere in termini di  $\kappa_2$  e  $\kappa_3$  ricordando che, quando  $\xi = 1$ , si deve avere  $\eta = 1$ , il che fornisce

$$C = \frac{1 + \kappa_3}{(1 - \kappa_2) \sqrt{1 + \frac{\kappa_2}{2}}} \quad (163)$$

Quanto alle determinazioni delle radici quadrate, poiché, per  $g_2$  e  $\mathcal{P}_\beta$  reali,  $\kappa_2$  non può mai essere inferiore a  $-2$ , nella (163) va presa la radice aritmetica. Quanto alla (161), la radice che vi figura è una funzione uniforme di  $x$ , e il suo segno si determina prendendo quello positivo nelle vicinanze di  $\xi = 1$ .

Ricordando che  $T^3 + A^3$  si può scrivere sotto la forma

$$T^3 + A^3 = \sqrt{\xi} \left( \frac{3}{4} \eta + \frac{1}{4} \xi \right)$$

dalla (161) e dalla (163) si deduce infine

$$T^3 + A^3 = \frac{1-3\kappa_3}{4} \xi^{3/2} + \frac{3}{4} (1+\kappa_3) \frac{\Phi(\kappa_2 \xi)}{\Phi(\kappa_2)} \quad (164)$$

con  $\Phi(z) = (1-z) \sqrt{1 + \frac{z}{2}}$

La (164) fornisce la relazione cercata, contenente solo le due costanti (indipendenti da  $t$ )  $\kappa_2$  e  $\kappa_3$ . Queste costanti dipendono però ancora in modo essenziale dalla scelta di  $\beta$  (o meglio di  $f = \beta/\omega_2$ ), soggetta al solo vincolo che, per le funzioni equianarmoniche ( $g_2=0$ ), si debba avere  $f = \frac{2}{3}$  (e insieme  $\kappa_2 = 0$ ,  $\kappa_3 = \frac{1}{3}$ , il che trasforma la (161) e la (164) nelle note formule valide per le FTG ordinarie).

Tale scelta non è stata finora fatta esplicitamente, perché di fatto esistono diversi criteri ragionevoli di definire il comportamento di  $f$  in funzione di  $J$  (o di  $\lambda$ ) in modo da soddisfare il limite sopraccennato: scelto uno di tali criteri, resta allora, univocamente determinato il comportamento di  $\kappa_2$  e  $\kappa_3$  in funzione di  $\lambda$ , benché in generale sia complicato esprimerlo mediante una formula esplicita. A differenza del caso  $n=4$ , in cui la procedura di estensione da preferire si raccomandava, per così dire, da sé, in questo caso si hanno diverse possibilità di scelta, nessuna delle quali dà luogo a formule semplici. (La curva parametrica può essere comunque sempre fa-

cilmente tracciata ricavando l'andamento di T-A in funzione di T+A dalla (161), e poi ruotando il grafico di 45° e ridefinendo la scala ).

Un'altra caratteristica della procedura di estensione sopradescritta (che verrà posta in evidenza negli esempi citati più avanti) è che i criteri di scelta più semplici per  $\beta$  non sono applicabili con continuità a tutti i valori di  $\lambda$  (partendo p.es. da  $\lambda = 1$  ed eventualmente estendendo la definizione, attraverso  $\lambda=0$ , anche ai valori negativi di  $\lambda$ ). Prima o poi si arriva infatti ad una "situazione singolare", in cui le formule che definiscono le FTG estese, o le legano tra loro, perdono di significato a causa dell'annullarsi o del divergere di alcune costanti che vi figurano. Un tipico esempio è dato dal verificarsi del caso limite  $\kappa_2 = -2$  (corrispondente a  $\Phi\beta = 0$ ) per cui la (163) perde di senso con tutte le formule ad essa connesse.

Benché, come già affermato, nessun criterio di scelta di  $\beta$  conduca a formule semplici, esiste una scelta particolare che porta ad espressioni meno complicate che negli altri casi: essa consiste nel porre  $\kappa_3$  identicamente uguale a  $\frac{1}{3}$  (cioè a prendere  $\Phi'\beta = -\sqrt{3g_3}$ ). In questo modo nella (164) il primo pezzo del secondo membro si annulla, e il coefficiente del secondo pezzo vale 1, così che si ha:

$$T^3 + A^3 = \Phi(\kappa_2 \xi) / \Phi(\kappa_2) \quad (165)$$

e non risultano neppure troppo complicate le formule di derivazione, ottenibili tramite l'espressione generale (96):

$$A' = T^2 \Phi(\kappa_2) \sqrt{1 + \frac{\kappa_2 \xi}{2} + \frac{1}{2} \kappa_2 \sqrt{\xi} (1 + \kappa_2 \xi)}$$

$$T' = -A^2 \Phi(\kappa_2) \sqrt{1 + \frac{\kappa_2 \xi}{2} - \frac{1}{2} \kappa_2 \sqrt{\xi} (1 + \kappa_2 \xi)} \quad (166)$$

Si può nuovamente usare la (165) e la definizione di  $\phi$  per eliminare la radice delle (166), ottenendo le espressioni delle derivate in forma razionale in A e T:

$$A' = T^2 \frac{A^3 + T^3}{1 - \kappa_2(A+T)^2} \cdot [\phi(\kappa_2)]^2 + \frac{1}{2} \kappa_2(A+T)(1 + \kappa_2(A+T)^2)$$

$$T' = -A^2 \frac{A^3 + T^3}{1 - \kappa_2(A+T)^2} [\phi(\kappa_2)]^2 - \frac{1}{2} \kappa_2(A+T)(1 + \kappa_2(A+T)^2)$$

Il parametro  $\kappa_2$  gioca qui il ruolo del parametro che distingue tra loro le varie famiglie di  $\rho_u$  (e per il quale, nella trattazione generale del §III.1, era stato usato il simbolo  $\lambda$ , qui invece utilizzato con altro significato). Per le  $\rho_u$  a invarianti reali, esso varia da un valore prossimo a .384 ( $\lambda = 1$ ,  $J = -\infty$ ) per poi decrescere a zero per le  $\rho_u$  equianarmoniche ( $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $J = 0$ ) e infine tendere a -2 per  $\lambda \rightarrow 0$  ( $J \rightarrow 1$ )<sup>75)</sup>. In corrispondenza,  $f$  varia da un valore prossimo a  $\frac{3}{4}$  per  $\lambda = 1$ , decresce a  $\frac{2}{3}$  per  $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , raggiunge un minimo, ripassa per il valore  $\frac{2}{3}$  quando  $\kappa_2 = -1$  ( $J = \frac{4}{5}$ ,  $\lambda = .265577\dots$ ) per diventare 1 per  $\lambda = 0$ . E' chiaro che quest'ultima scelta dà luogo ad una situazione singolare, per cui le FTG estese non possono essere definite: non è quindi possibile estendere la validità delle formule precedenti al caso delle  $\rho_u$  con  $g_3$  negativo,<sup>76)</sup> salvo che non si prendano  $\alpha, \beta$  e  $B$  immaginari puri,

75) E' possibile di fatto ricavare una formula esplicita di  $\kappa_2$  in funzione di  $J$ , che tuttavia, essendo piuttosto farraginoso, non verrà riportata.

76) E' possibile evitare la situazione di singolarità per  $\lambda = 0$  con opportune scelte di  $\beta$ : la più ovvia di esse (che consiste nel prendere identicamente  $f = \frac{2}{3}$ ) tuttavia porta ad una situazione di singolarità quando si ritorna alle  $\rho_u$  equianarmoniche dalla parte dei  $g_3$  negativi ( $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ), in quanto per tali funzioni si ha  $\rho_\beta = 0$ ,  $\kappa_2 = -2$ .

nel qual caso si ritrovano le formule ottenibili con l'applicazione della (32) con  $t=i$  nelle espressioni valide per  $g_3$  positivo. D'altro canto, non è nemmeno possibile cercare un'estensione delle FTG attraverso la generalizzazione delle (38) e delle formule loro connesse: infatti per avere le funzioni  $S, A^2, T^2$  prive di punti di diramazione è necessario in tali formule che sia  $P''_{\beta} = \Phi''_{\beta} = 0$ , il che è valido soltanto per  $g_2 = 0$ . E' questa un'altra manifestazione del carattere "speciale" e non generalizzabile delle FTG ordinarie.

Per concludere, resterebbe da discutere il problema delle regole di addizione e sottrazione, duplicazione, e simili: tuttavia, per la sua estrema complicazione, tale problema non verrà trattato.

Nel caso delle FTG di ordine 6, paradossalmente si verifica che il procedimento di estensione secondo le linee già viste è più semplice e immediato di quello per  $n=3$ , anche se le formule di arrivo vengono fuori sempre piuttosto complicate.

Si parte, come già fatto in precedenza, dalla generalizzazione delle (87), che forniscono le espressioni per  $S^3$  e  $\frac{1}{S^3}$ : se si vuole mantenere la caratteristica che tali due quantità siano date dalla stessa espressione con solo un segno di differenza, l'unica scelta possibile (e compatibile con la condizione  $S(0) = 0$ ) risulta la seguente

$$\begin{aligned} S^3(x) \\ \frac{1}{S^3(x)} \end{aligned} = \frac{1}{\sqrt{g_3}} \left[ \sqrt{p'^2(\alpha x) + g_3} \pm p'(\alpha x) \right] \quad (167)$$

Essendo tali quantità chiaramente indipendenti da  $t$  (la costante  $\alpha$  varia proporzionalmente a  $t^{-1}$ ) non è necessario specificare la scelta degli invarianti. Occorre però, se si vuole restare nel campo reale per valori reali dell'argomento, che sia  $g_3 > 0$ . Nel limite  $g_3 \rightarrow 0$  si ha chiaramente una situazione di singolarità.

Nella (167), come del resto nella (87), la radice quadrata deve cambiare di segno quando si passi da  $x$  a  $-x$ .

Derivando ambo i membri rispetto a  $x$  e imponendo che l'estensione conservi le aree, si ottiene:

$$\frac{1/A^2}{1/T^2} = \frac{\alpha}{3} g_3^{-1/6} \left[ \sqrt{P'^2(\alpha x) + g_3} + P'(\alpha x) \right]^{1/3} \frac{P''(\alpha x)}{\sqrt{P'^2(\alpha x) + g_3}} \quad (168)$$

e la condizione  $T^2(0) = 1$  fornisce

$$\alpha = 2^{2/3} g_3^{-1/6} \quad (169)$$

I punti di diramazione di  $S^3, \frac{1}{S^3}$  (e anche  $S$  e  $\frac{1}{S}$ ),  $A^2, T^2$ , sono, analogamente al caso ordinario ( $g_2 = 0$ ), quelli in cui si annulla l'espressione  $P'^2(\alpha x) + g_3$ . Ma mentre per  $g_2 = 0$  gli zeri di tale espressione (coincidenti con gli zeri di  $P(\alpha x)$ ) sono tripli, invece per  $g_2 \neq 0$  si hanno tre zeri distinti, uno dei quali corrisponde ancora a uno zero di  $P(\alpha x)$ , mentre gli altri due, quando  $g_2$  è reale, si trovano più o meno in posizione analoga a quella dei punti di diramazione indicati in Fig. 19. In questo modo le singolarità corrispondenti ai quattro punti di diramazione che definiscono le "stelle" di Fig. 9 sono ora dodici: vi sono diversi modi di unirle a due a due con opportuni tagli in modo che, nel limite  $g_2 \rightarrow 0$ , si ritrovino



le stelle in questione: ma questo problema non verrà discusso qui. Vedremo invece quali altre combinazioni di A e T (oltre a  $S^3 - \frac{1}{S^3}$ ) non hanno punti di diramazione. E' facile convincersi, dalle (168), che  $A^2 T^2$  è una di esse: infatti si ha (sfruttando anche la definizione (169) di  $\alpha$ ):

$$A^2 T^2 = \frac{9}{2} \left( \frac{g_3}{2} \right)^{1/3} \frac{P'^2 u + g_3}{P''^2 u} \quad (170)$$

ove si è posto  $u = \alpha x$ . Anche  $A^6 + T^6$  gode di questa proprietà: si può calcolare facilmente infatti la relazione

$$A^6 + T^6 = \frac{27}{2} \frac{(P'^2 u + g_3)^2}{P''^3 u} \quad (171)$$

Eliminando  $P'^2 u + g_3$  tra la (170) e la (171) si ottiene la seguente espressione per  $P'' u$ :

$$P'' u = \frac{3}{2} \left( \frac{g_3}{2} \right)^{2/3} \frac{A^6 + T^6}{A^4 T^4} \quad (172)$$

A questo punto si può ricavare la relazione che sostituisce la (80) sfruttando nuovamente la (160) (elevata al quadrato). Mediante uso opportuno della (171) e della (172) si arriva infine alla relazione

$$\begin{aligned} A^6 + T^6 &= 1 - \frac{3}{2} \frac{g_2}{P'' u} + \frac{1}{2} \left( \frac{g_2}{P'' u} \right)^3 = \\ &= 1 - \kappa \psi + \frac{4}{27} (\kappa \psi)^3 \end{aligned} \quad (173)$$

ove si è posto  $\psi = \frac{A^4 T^4}{A^6 + T^6}$  e  $\kappa = \left( \frac{4g_2^3}{2g_3} \right)^{1/3}$ : questa costante

si può prendere come quella che discrimina tra loro le varie funzioni, e risulta chiaramente indipendente da  $t$ .<sup>77)</sup>

---

77) Per le  $Pu$  con  $\Delta > 0$ ,  $\kappa$  varia da  $3 \cdot 2^{2/3}$  (in corrispondenza di  $\lambda = 1$ ) a  $\kappa = -\infty$  (in corrispondenza di  $\lambda = 0$ , che, come già detto, dà luogo a una situazione singolare).

La (173) ha il vantaggio (rispetto al caso già discusso di  $n=3$ ) di essere univoca e di esibire in maniera esplicita l'espressione della  $F(A,T) \equiv F(\Psi)$ : tuttavia da essa non è possibile dedurre un'espressione esplicita che permetta di costruire la curva parametrica (quale invece è la (161)).

Resta da concludere con le espressioni differenziali  $A'$  e  $T'$ : esse possono ovviamente essere calcolate mediante la (97), ma qui si preferirà riportare una forma leggermente modificata attraverso l'uso della (173), in modo che risulti evidente la validità della relazione (100):

$$A' = \frac{1}{T} \left[ \frac{2A^6 - T^6}{A^6 + T^6} - \frac{2(A^6 - T^6)}{1 - \frac{2}{3} \kappa \Psi} \right]$$

$$T' = \frac{1}{A} \left[ -\frac{2T^6 - A^6}{A^6 + T^6} - \frac{2(A^6 - T^6)}{1 - \frac{2}{3} \kappa \Psi} \right]$$

Come nel caso  $n=3$ , altre possibili formule (di duplicazione, ecc.) non verranno discusse a causa della loro complicazione.

In contrasto con la farraginosità dei calcoli precedenti, vogliamo ora presentare brevemente (per  $n=3$ ) un esempio di una possibile estensione semplice che non conserva le aree, ma per cui vale la relazione (99). Poiché, anche con questo vincolo, la funzione  $F(A,T) = F(A+T)$  può essere scelta con una certa arbitrarietà, si può imporre che sia mantenuta un'ulteriore relazione valida per  $g_2=0$ . Scegliendo a tale scopo la prima delle (40) (in cui però la definizione dell'argomento  $u$  della  $\mathcal{P}$  deve essere opportunamente specificata), si porrà dunque:

$$\frac{1}{A+T} (x) = \frac{P(\alpha x + \beta)}{P\beta}$$

Derivando rispetto a  $x$  e sfruttando la (99)

$$\frac{T-A}{T+A} = - \frac{\alpha}{P\beta} P'(\alpha x + \beta)$$

Ne segue  $\alpha = -P\beta/P'\beta$  e, mettendo insieme le due equazioni:

$$\frac{A}{T} = \frac{P\beta}{2Pu} \left( 1 + \frac{P'u}{P'\beta} \right)$$

con  $u = \alpha x + \beta$ . Confrontando con la precedente estensione che conserva le aree, si trova che l'espressione formale per  $S$  resta la stessa, mentre quelle per  $A$  e  $T$  sono differenti a causa della sostituzione

di  $\sqrt{\frac{P''u}{P''\beta}}$  con  $\frac{Pu}{P\beta}$ ; il che, ovviamente, porta a proprietà ana-

litiche molto più semplici, e simili a quelle delle FTG ordinarie.

La relazione (91) si determina immediatamente scrivendo la (31), che fornisce

$$(T-A)^2 = \frac{1+\kappa_2+\kappa_3}{T+A} - \kappa_2(T+A)^2 - \kappa_3(T+A)^3 \quad (174)$$

ove si è posto  $\kappa_3 = \frac{g_3}{P'\beta^2}$  (come nel caso che conserva le aree) e

$\kappa_2 = \frac{g_2 P\beta}{P'\beta^2}$  (entrambe le costanti sono indipendenti da  $t$ ). La

scelta di  $\beta$  (anzi, di  $f = \beta/\omega_2$ ) fissa definitivamente entrambe queste costanti, con i soliti valori da assumere per tali quantità quando

$g_2 = 0$ .

Scrivendo per  $T^3+A^3$  l'espressione già vista in precedenza si ottiene infine:

$$T^3+A^3 + \frac{3}{4} \kappa_2 [(T+A)^2-1] - \frac{1-3\kappa_3}{4} [(T+A)^3-1] = 1 \quad (175)$$

Conviene anche qui specificare alcune possibili scelte di  $\beta$ . Prendendo  $\kappa_3 = \frac{1}{3}$  e ponendo  $\Lambda = \frac{3}{4} \kappa_2$ , la (175) si specifica così:

$$T^3 + A^3 + \Lambda [(T+A)^2-1] = 1$$

Il valore di  $\Lambda$ , quando  $\lambda$  decresce a partire da 1, decresce da un valore positivo prossimo a .93 fino a -1 (valore ottenuto per  $\lambda = 0$ ). In tal caso, però, non si ha una situazione singolare, perché, effettuando gli opportuni procedimenti di limite nelle equazioni precedenti, si arriva per  $A$  e  $T$  a funzioni razionali di  $x$ . E' possibile passare anche al caso dei  $\lambda$  negativi, ma in questo caso  $\beta$  diviene immaginario.

Un'altra scelta interessante si ottiene ponendo  $\beta = g_3^{1/3}$ . In questo caso si controlla facilmente che  $1-3\kappa_3 = -\kappa_2$ , così che la (175) assume la forma (con  $\Lambda = \kappa_2/4$ ):

$$A^3+T^3 + \Lambda [(T+A)^3 + 3(T+A)^2-4] = 1$$

Il valore  $\Lambda = -\frac{1}{4}$  (corrispondente a  $\lambda = 0$ ) nuovamente non dà luogo a una situazione singolare, ma produce ancora per  $A$  e  $T$  delle funzioni razionali di  $x$ . Invece si ha una situazione singolare nel limite  $\lambda \rightarrow \pm 1$ , per cui  $\beta \rightarrow 0$  e quindi  $\kappa_2$  diverge.

Le formule differenziali per le varie funzioni non verranno date, perché sono immediatamente ottenibili a partire dalle (95). Quanto al valore della doppia area  $a(x)$  del settore associato alla curva pa-

rametrica (la cui costruzione è immediata a partire dalla (174)), es sa si ottiene dalla formula generale (98), e, nei casi sopradescrit ti, richiede integrali sulla  $\mathbb{P}^1$  (Pu la cui formula risolutiva, pur dando luogo a quantità reali, richiede l'introduzione di immagina ri (si veda al proposito il manuale di GRÖBNER-HOFREITER citato nella precedente nota<sup>71)</sup>).

Per concludere, diremo che sono stati sviluppati ampiamente i calcoli relativi all'argomento di questo paragrafo, nonostante l'aspet to insoddisfacente dei risultati, proprio per rendere chiaro, al di là di ogni dubbio, il fatto che la procedura di estensione delle FTG di ordine  $\neq 4$  non è adatta per descrivere convenientemente la classe delle funzioni ellittiche; e da questo punto di vista, per co si dire, negativo, appare logica l'omissione degli sviluppi dell'ar gomento implicanti complicazioni eccessive.

*L'Autore di questo studio desidera ringraziare vivamente il Prof. W. GROSS dell'Istituto Matematico dell'Università di Roma per una lettura critica del manoscritto, e il Prof. G. ANDREASSI, Direttore dei "Quaderni di Lecce", per l'interesse che ha sempre mostrato in questo lavoro.*