"Scattering" per l'equazione delle onde negli spazi simmetrici di rango 1 e di tipo non-compatto.

Giuliana GIGANTE (LECCE)

INTRODUZIONE. -

La teoria dello scattering per l'equazione delle onde negli spazi simmetrici del tipo non compatto e di rango 1, è già stata studiata nel 1976 da Semenov-Tian-Shansky.

Semenov ottiene la rappresentazione per traslazioni dall'andamento asintotico delle soluzioni di un sistema iperbolico di equazioni, che si riduce all'equazione delle onde, nel caso di spazi di rango 1.

Nel 1979, Lax e Phillips si occupano del medesimo problema nel caso particolare dello spazio iperbolico reale di dimensione 3 ed ottengono la rappresentazione per traslazioni dalla trasformata di Radon.

In questo lavoro, estendiamo il metodo di Lax e Phillips allo studio dello scattering su ogni spazio simmetrico di tipo non compatto e di rango 1. Questo approccio ha il merito di essere più semplice di quello di Semenov e consente di entrare in maggior dettaglio nell'argomento.

Particolare importanza assume la conoscenza della funzione $c(\lambda)$ che compare nella formula di inversione per la trasformata di Fourier nello spazio. Nel caso degli spazi iperbolici reali di dimensione dispari, $c(\lambda)^{-1}$ è un polinomio e la costruzione e le proprietà della rappresentazione per traslazioni è una diretta generalizzazione del lavoro di Lax e Phillips, mentre negli altri casi, in cui $c(\lambda)^{-1}$ presenta dei punti singolari, non valgono più alcune proprietà come il principio di Huygens e la causalità della matrice dello scattering.

1. PRELIMINARI. -

Sia X uno spazio simmetrico riemanniano del tipo non-compatto e di rango 1. Sia $G = I_0(X)$ la componente connessa principale del gruppo delle isometrie di X e sia K il sottogruppo di isotropia nel punto $j \in X$. X è allora diffeomorfa a G/K e la sua struttura riemanniana proviene dalla forma di Killing dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di G.

Sia dx la misura G-invariante su M.

Consideriamo la decomposizione e Cartan di $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g} = \check{t} + p$$

dove $\check{t}$ è l'algebra di Lie di K; scegliamo un sottospazio massimale abeliano a di p (per ipotesi esso ha dimensione 1). Sia Λ^+ l'insieme delle radici ristrette positive di α, g_α l'autospazio associato ad α e sia

$$\rho = 1/2 \sum_{\alpha \in \Lambda^+} (\dim g_\alpha)\alpha$$

Con η indichiamo l'algebra di Lie nilpotente $\sum_{\alpha \in \Lambda^+} g_\alpha$ mentre $m = \{X \in \check{t} : [X,a] = 0\}$. Siano A, N e M i sottogruppi di G con algebre di Lie a, η e m rispettivamente. La forma di Killing induce misure euclidee su a e sul suo duale a^*: denoteremo queste misure moltiplicate per $1/\sqrt{2\pi}$ con ds' e $d\lambda'$ rispettivamente.

Lo spazio quoziente $B = K/M$ viene detto bordo di X e db sarà la misura K-invariante su B normalizzata da $\int_B db = 1$.

Un horociclo in X è un'orbita in X di un sottogruppo di G coniugato ad N. Indichiamo con $\xi(x,b)$ l'unico horociclo per b passante per x e con $a(x,b)$ l'unico elemento di A tale che $\xi(x,b) = ka.\xi_0$ dove $kM = b$ e $\xi_0 = N.j$. Sia inoltre $A(x,b) = \log a(x,b)$; $|A(x,b)|$ è allora la distanza di j da $\xi(x,b)$ ([4], p. 136).

Nel caso degli spazi iperbolici reali, nella loro realizzazione come palla unitaria B^n con struttura riemanniana

$$ds^2 = (1 - \Sigma_1^n x_i^2)^{-2}(\Sigma_1^n dx_1^2)$$

il bordo è S^{n-1} con la misura usuale, mentre gli horocicli sono (n-1)-sfe re tangenti al bordo ed

$$A(x,b) = \log \left[(1-|x|^2)/|x-b|^2\right]^{(n-1)/2} \qquad ([2], \text{ p. } 108)$$

e $$\rho = \frac{n-1}{2}$$

2. LA TRASFORMATA DI FOURIER.-

Sullo spazio simmetrico X si definisce la trasformata di Fourier per $f \in C_c^\infty(X)$ (C^∞ a supporto compatto) nel modo seguente

$$\tilde{f}(\lambda,b) = \int_X f(x) \exp\left[(-i\lambda + \rho)A(x,b)\right] dx$$

per $\lambda \in a^*$ e $b \in B$

e vale la seguente formula di inversione nel caso di rango 1

$$f(x) = 1/2 \int_{a^* \times B} \tilde{f}(\lambda,b) \exp\left[(i\lambda+\rho)A(x,b)\right] |c(\lambda)|^{-2} d'\lambda\, db$$

dove $c(\lambda)$ ha le seguenti proprietà: $\overline{c(\lambda)} = c(-\lambda)$, $p(\lambda) = c(\lambda)^{-1}$ è analitica e del tipo $\lambda.q(\lambda)$, inoltre $c(\lambda)$ si estende come funzione meromorfa alla complessificazione di a^*.

L'espressione di $c(\lambda)$ in [2], p. 64, mostra che essa si scrive come un prodotto di fattori del tipo

$$\Gamma(a+i\xi)/\Gamma(b+i\xi) \; ^{(1)} \qquad \text{con } a,b > 0 .$$

Se $\text{Im } z < 0$, anche $c(z)$ ha una espressione del tipo sopra indicato e si verifica facilmente che in $\text{Im } z < 0$, $p(z) = c(z)^{-1}$ è limitata da un polinomio.

---

(1) Γ è la funzione Gamma.

L'applicazione $f \to \tilde{f}$ si estende ad una isometria tra $L^2(X)$ e $L^2(a^* x B)$, dove su $a^* x B$ si consideri la misura $1/2|c(\lambda)|^{-2} d\lambda\, db$.

3. LA TRASFORMATA DI RADON. -

La trasformata di Radon è definita, per $f \in C_c^\infty(X)$, nel modo seguente:

se $\xi = \xi(x,b)$ allora $\hat{f}(\xi) = \int_\xi f(x) ds(x)$

dove $ds(x)$ è l'elemento di volume indotto su ξ dalla struttura riemanniana di X.

Nel corso di questo lavoro, intenderemo però per trasformata di Radon di f, la funzione $\hat{f}$ definita su $a \times B$ da $\hat{f}(s,b) = \hat{f}(\xi)$ dove ξ è l'horociclo per b che ha distanza segnata s da j, ovvero $\xi = \xi(x,b)$ dove $A(x,b) = s$.

Si ha allora:

(1) $\tilde{f}(\lambda,b) = \int_a \hat{f}(x,b) \exp(-i\lambda+\rho)s) ds'$ ([2],p. 93)

e

(2) $e^{\rho s} \int_B \hat{f}(s,b) db = e^{-\rho s} \int_B \hat{f}(-s,b) db$ ([3], p.680) .

Notiamo che, per ogni $b \in B$, la funzione della variabile reale λ

$$\tilde{f}(\lambda,b) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s,b)\, e^{(-i\lambda+\rho)s} ds$$

è la trasformata di Fourier della funzione della variabile reale s:

$$\hat{f}(s,b) e^{\rho s} .$$

E' facile verificare, dall'espressione di $\overline{p(\lambda)} = c(-\lambda)^{-1}$ (vedere 2), che l'operatore

$$(\mathcal{P}\, g)(s) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(\lambda) \overline{p(\lambda)} e^{i\lambda s} d\lambda$$

definito sulle funzioni $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ è un operatore pseudodifferenziale [1]

Φ è un operatore differenziale quando $p(\lambda)$ è un polinomio; ciò accade nel caso degli spazi iperbolici di dimensione dispari.

Se $f \in C_c^\infty(X)$, $\Phi(e^{\rho s}\hat{f}(s,b))$ risulta, per ogni $b \in B$, una funzione a quadrato sommabile in $\mathbb{R}$ la cui trasformata di Fourier è la funzione $\overline{p(\lambda)}\,\tilde{f}(\lambda,b)$.

Si ha così la seguente formula di inversione per la trasformazione di Radon:

$$(3)\quad f(x) = c\int_B e^{\rho A(x,b)}\left(\int_{\mathbb{R}} p(\lambda)e^{i\lambda A(x,b)}\,\widetilde{\Phi(e^{\rho s}\hat{f}(s,b))}(\lambda)d\lambda\right)db$$

dove $c = (2\sqrt{2\pi})^{-\frac{1}{2}}$

Notiamo che si ha

$$\|f\|^2_{L^2(X)} = c\int_B\left(\int_{\mathbb{R}} |\Phi\, e^{\rho s}\hat{f}(s,b)|^2 ds\right)db$$

e, per polarizzazione,

$$(f,g)_{L^2(X)} = c\int_B\int_{\mathbb{R}} \Phi(e^{\rho s}\hat{f}(s,b)\,\overline{\Phi(e^{\rho s}\hat{g}(s,b)}ds\, db.$$

4. TEORIA ASTRATTA DELLO SCATTERING. -

Sia H uno spazio di Hilbert e $U(t) : H \to H$, $-\infty < t < \infty$, un gruppo ad un parametro di operatori unitari.

Due sottospazi chiusi di H, $\mathcal{D}_-$ e $\mathcal{D}_+$ vengono detti rispettivamente "incoming" e "outgoing" per il gruppo $U(t)$, se

---

(1) Useremo la notazione $\sim$ sia per la trasformata di Fourier di funzioni di variabile reale, sia per le funzioni su X .

i. $U(t)\mathcal{D}_- \subset \mathcal{D}_-$ per $t \leq 0$

ii. $U(t)\mathcal{D}_+ \subset \mathcal{D}_+$ per $t \geq 0$

iii. $\bigcap_{t<0} U(t)\mathcal{D}_- = 0 = \bigcap_{t>0} U(t)\mathcal{D}_+$

iv. $\overline{\bigcup U(t)\mathcal{D}_-} = \overline{\bigcup U(t)\mathcal{D}_+} = H$

Se $U(t)$ possiede uno spazio uotgoing (incoming), allora esistono due isometrie $R_\pm : H \to L^2(\mathbb{R},\mathcal{N})$, dove $\mathcal{N}$ è un opportuno spazio di Hilbert, tale che

$R_\pm$ trasforma $\mathcal{D}_\pm$ in $L^2(R_\pm,\mathcal{N})$ e l'azione di $U(t)$ in H nella traslazione per t in $L^2(\mathbb{R},\mathcal{N})$. Le rappresentazioni R_+ e R_- vengono dette rispettivamente rappresentazione per traslazione outgoing e incoming.

L'operatore di scattering $S = R_- R_+^{-1}$ è allora un operatore unitario di $L^2(\mathbb{R},\mathcal{N})$ in sé, che commuta con le traslazioni.

Se $L^2(\mathbb{R}_-,\mathcal{N})$ è un sottospazio invariante per S, si dice che S è causale.

La proprietà di causalità si può esprimere,utilizzando la trasformata di Fourier $\sim$:

L'operatore $\mathcal{S} = \tilde{\ } S^{\sim -1}$ è causale se mappa lo spazio di Hardy $\mathcal{Q}_+$[1] in sé.

Notiamo che l'operatore $\mathcal{S}$ è la moltiplicazione per una funzione $\mathcal{S}(\sigma)$, i cui valori sono operatori unitari di $\mathcal{N}$ in sé.
$\mathcal{S}(\sigma)$ si dice "matrice dello scattering ([6]).

(1) $\mathcal{Q}_+$ consiste delle funzioni f olomorfe nel semipiano superiore e a valori in $\mathcal{N}$ e tali che

$$\int |f(\xi+i\eta)|^2 d\xi < C \qquad \forall\eta > 0$$

5. LA RAPPRESENTAZIONE PER TRASLAZIONI. -

Sia X come in sezione 1 e sia Δ l'operatore di Laplace - Beltrami su X. Si ha

$$\Delta \exp[(\rho-i\lambda)A(x,b)] = -(\rho^2+\lambda^2)\exp[(\rho-i\lambda)A(x,b)]$$

e dunque l'operatore $L = \Delta + \rho^2$ ha le funzioni $\exp[(\rho-i\lambda)A(x,b)]$ come autofunzioni per gli autovalori $-\lambda^2$. Si ha allora, per ogni $f \in C_c^\infty(X)$:

$$\widehat{Lf}(s,b) = e^{-\rho s}\, \partial_s^2(e^{\rho s}\hat{f}) .$$

Infatti, per ogni fissato $b \in B$ $\lambda^2(\widetilde{Lf}(\lambda,b)$ è la trasformata di Fourier di $-\partial_s^2(e^{\rho s}\widehat{Lf})$ ma, essendo $\widetilde{Lf}(\lambda,b) = -\lambda^2\tilde{f}(\lambda,b)$, esso è anche la trasformata di Fourier di $-\partial_s^4(e^{\rho s}\hat{f})$. Si ha pertanto per f in $C_c^\infty(X)$

$$e^{\rho s}\widehat{Lf} = \partial_s^2(e^{\rho s}\hat{f}) .$$

Proviamo ora che

<u>se</u> $u(x,t)$ <u>con</u> $x \in X$ <u>e</u> $t \in \mathbb{R}$ <u>è a supporto compatto in</u> X, <u>allora</u> $(u,Lu) \leq 0$.

Si ha

$$(u,Lu) = c \int_B (\Phi(e^{\rho s}\hat{u}),\Phi(e^{\rho s}\widehat{Lu}))db = c \int_B (\Phi(e^{\rho s}\hat{u}),\Phi\partial_s^2(e^{\rho s}\hat{u}))db.$$

Notiamo ora che $\partial_s\Phi = \Phi\partial_s$ e che, essendo u a supporto compatto, $\Phi(e^{\rho s}\hat{u})$, $\Phi(\partial_s(e^{\rho s}\hat{u}))$ e $\Phi(\partial_s^2(e^{\rho s}\hat{u}))$ sono in $L^2(\mathbb{R})$.

La funzione $\gamma = \Phi(e^{\rho s}\hat{u}) \cdot \overline{\Phi(\partial_s(e^{\rho s}\hat{u}))}$ è allora in $L^1(\mathbb{R})$ così come la sua derivata

$$\partial_s\gamma = (\partial_s\Phi(e^{\rho s}\hat{u})) \cdot \overline{\Phi(\partial_s(e^{\rho s}\hat{u}))} + \Phi(e^{\rho s}\hat{u}) \cdot \overline{\Phi(\partial_s^2(e^{\rho s}\hat{u}))}$$

Possiamo allora applicare il teorema di Stokes per varietà complete ([1]), per concludere che $\int_{\mathbb{R}} \partial_s\gamma \, ds = 0$ e quindi $(u,Lu) = -c \int_B (\int |\Phi(\partial_s(e^{\rho s}\hat{u}))|^2 ds)db \leq 0$

Inoltre $(u,Lu) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(\partial_s(e^{\rho s}\hat{u})) = 0$ per quasi tutti i $b \in B \Longleftrightarrow \lambda\,\overline{p(\lambda)}\tilde{u}(\lambda,b) = 0$ per quasi tutti i b $\Longleftrightarrow \tilde{u}(\lambda,b) = 0$ per quasi tutti i $b \Longleftrightarrow u = 0$.

Osservazione.

La positività di $-(u,Lu)$ e gli stessi argomenti usati in [5] p.640 danno un risultato analogo a teorema 3.3. per ogni spazio X come sopra, cioé per ogni compatto $K \subset X$, esiste una costante c_K tale che

$$\int_K u^2\, dx \leq -c_K(u,Lu) \qquad \forall u \in C_c^\infty(X).$$

Consideriamo l'equazione delle onde

$$u_{tt} = Lu \tag{4}$$

Dalla teoria classica delle equazioni iperboliche, il problema (4), con i valori iniziali

$$u(x,0) = f_1 \quad \text{e} \quad u_t(x,0) = f_2 \qquad \text{per } f_1, f_2 \in C_c^\infty(X)$$

ha una sola soluzione $u(x,t)$ in $C^\infty(M\times\mathbb{R})$.

L'energia $\quad \|u\|_E^2 = \|u_t\|^2 - (u,Lu)$

per le soluzioni di (4) non dipende dal tempo t (la verifica è una facile conseguenza della simmetria di L) ed è ovviamente positiva.

Nell'insieme dei dati $F = \{f_1, f_2\}$ in $C_c^\infty(X)$

$$\|F\|_E^2 = \|f_2\|^2 - (f_1, Lf_1)$$

è allora una norma. Il completamento di C_c^∞ rispetto alla norma dell'energia sarà denotato con H.

L'operatore A dato su H da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ L & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero $A(\{f_1,f_2\}) = \{f_2,Lf_1\}$ è il generatore del gruppo ad un parametro di operatori $U(t)$, unitari rispetto alla norma dell'energia, che legano il dato iniziale $F(0) = \{f_1,f_2\}$ al dato al tempo $t: F(t) = \{u(.,t), u_t(.,t)\}$.

Nello studio dello scattering per il gruppo di operatori $U(t)$ nello spazio H iniziamo dalla definizione di due isometrie $R_\pm : H \to L^2(\mathbb{R},\mathcal{N})$ dove $\mathcal{N} = L^2(B)$, candidate per essere le rappresentazioni per traslazioni, e solo successivamente, definiremo i sottospazi incoming e outgoing.

Poniamo

$$(R_+F)(s,b) = -c^{\frac{1}{2}}\,\Phi(\partial_s(e^{\rho s}\hat{f}_1) - e^{\rho s}\hat{f}_2)$$

se $F = \{f_1,f_2\} \in C_c^\infty$.

Si ha
$$\alpha \cdot \quad \| R_+f\|_{L^2(\mathbb{R},\mathcal{N})} = \| F\|_E \quad .$$

Possiamo dunque estendere R_+ ad H, completamento di C_c^∞ nella norma dell'energia.

Dimostrazione di α :

$$\| R_+F\|^2 = c\int_B\int_{\mathbb{R}} |\Phi(\partial_s(e^{\rho s}\hat{f}_1) - e^{\rho s}\hat{f}_2)|^2\, ds\, db =$$

$$= c\| \Phi(\partial_s(e^{\rho s}\hat{f}_1))\|^2 + c\, \|\Phi(e^{\rho s}\hat{f}_2)\|^2 -$$

$$- c(\Phi(e^{\rho s}\hat{f}_2), \Phi(\partial_s(e^{\rho s}\hat{f}_1))) \qquad -c(\Phi(\partial_s(e^{\rho s}\hat{f}_1)), \Phi(e^{\rho s}\hat{f}_2))$$

mentre

$$\| F\|_E^2 = \| f_2\|^2 + c\int_B(\int |\Phi(\partial_s(e^{\rho s}\hat{f}_1))|^2 ds)db =$$
$$= \| f_2\|^2 + c\, \| \Phi(\partial_s(e^{\rho s}\hat{f}_1))\|^2$$

La conclusione segue ora dai seguenti fatti

i. $\| f_2\|^2 = c\| \Phi(e^{\rho s}\hat{f}_2)\|^2$ (vedi sezione 3)

ii. Parte reale $(\Phi(e^{\rho s}\hat{f}_2), \Phi(\partial_s(e^{\rho s}\hat{f}_1))) = 0$.

Per ii.:

denotiamo con Φ_1 e Φ_2 gli operatori pseudodifferenziali che hanno per simboli rispettivamente p_1 e p_2 dove

$p(\lambda) = p_1(\lambda) + ip_2(\lambda)$. Si ha $p_1(\lambda) = p_1(-\lambda)$ e $p_2(\lambda) = -p_2(-\lambda)$. Allora, se $g_2(s) = \int_B \hat{f}_2(s,b)db$ e $g_1(s) = \int_B \hat{f}_1(s,b)db$:

parte reale $(\Phi(e^{\rho s}\hat{f}_2), \Phi(\partial_s(e^{\rho s}\hat{f}_1))) = \int_{\mathbb{R}} \Phi_1(e^{\rho s}g_2)\cdot\Phi_1(\partial_s(e^{\rho s}g_1))\,ds +$

$+ \int_{\mathbb{R}} \Phi_2(e^{\rho s}g_2)\cdot\Phi_2(\partial_s(e^{\rho s}g_1)))ds.$

Da (2), $\Phi_1(e^{\rho s}g_2)$ e $\Phi_2(\partial_s(e^{\rho s}g_1))$ sono funzioni pari, mentre $\Phi_2(e^{\rho s}g_2)$ e $\Phi_1(\partial_s(e^{\rho s}g_1))$ sono funzioni dispari.

β. R_+ <u>trasforma</u> $U(t)$ <u>nella traslazione a destra di</u> t <u>unità</u>.

Sia F un dato in C_c^∞ , dobbiamo provare che

$$(R_+U(t)F)(s) = (R_+F)(s-t).$$

Ponendo $U(t)F = \{f_1[t], f_2[t]\}$:

$$(5)\qquad (\partial_s + \partial_t)(R_+U(t)F) = -c^{\frac{1}{2}}\Phi[\partial_s^2(e^{\rho s}\widehat{f_1[t]}) -$$

$$- \partial_s(e^{\rho s}\widehat{f_2[t]}) + \partial_t\partial_s(e^{\rho s}\widehat{f_1[t]}) - \partial_t(e^{\rho s}\widehat{f_2[t]}))]$$

Ma $\{f_1[t],f_2[t]\}= \{u(x,t),u_t(x,t)\}$ dove $u(x,t)$ è soluzione di (4) con dato iniziale $\{f_1,f_2\}$.

Si ha dunque $\widehat{Lf_1[t]} = \partial_t(\widehat{f_2[t]})$ da cui

$$e^{-\rho s}\ \partial_s^2\,(e^{\rho s}\ \widehat{f_1}[t])(s,b)) = \partial_t\ \widehat{f_2}[t]\ (s,b)$$

e

$$\widehat{f_2}[t](s,b) = \partial_t\ \widehat{f_1}[t](s,b).$$

Pertanto (5) diventa

$$(\partial_s + \partial_t)(R_+U(t)F)(s,b) = -\ c^{\frac{1}{2}}\ \Phi(\partial_s\partial_t(e^{\rho s}\ \widehat{f_1}[t])\ - \partial_s(e^{\rho s}\ \widehat{f_2}[t]))(s,b) = 0$$

Ciò dimostra che $R_+U(t)F$ è solo funzione di $s-t$.

γ. R_+ <u>è una isometria di H su tutto</u> $L^2(\mathbb{R}\times B)$.

Denotiamo con $Y_\nu(b)$ le armoniche sferiche in $L^2(B)$.

Consideriamo l'insieme delle funzioni del tipo $h(s)Y_\nu(b)$, al variare di h tra le funzioni C_c^∞ a supporto compatto in R^+. Esse sono funzioni $f \in C_c^\infty(X)$ quando si usino su X coordinate polari ([4]). E' facile verificare che, per opportuna scelta di g

$$\hat{f}\ (s,b) = g(s)Y_\nu(b) \quad \text{e} \quad \tilde{f}(\lambda,b) = l(\lambda)Y_\nu(b)$$

dove $l(\lambda)$ è la trasformata di Fourier in $\mathbb{R}$ di $e^{\rho s}\ g(s)$.
Sia ora $F = \{0,f\}$; allora

$$(R_+F)(s,b) = c^{\frac{1}{2}}\ \Phi(e^{\rho s}\ \hat{f}) = c^{\frac{1}{2}}\ \Phi(e^{\rho s}g)Y_\nu(b) = k(s)Y_\nu(b)$$

Poiché anche $R_+U(t)F$ appartiene all'immagine di R_+, allora anche $k(s-t)Y_\nu(b)$, al variare di t in R, vi appartengono. I traslati di k generano $L^2(\mathbb{R})$ se e solo se $\tilde{k}$ non si annulla su un insieme di misura positiva, e poiché, per ogni $b \in B$, $\overline{p(\lambda)}\ \tilde{f}(\lambda,b)$ è la trasformata di Fourier reale di $\Phi(e^{\rho s}\ \hat{f})$ si ha $\overline{p(\lambda)}\tilde{f}(\lambda,b) = c^{-\frac{1}{2}}\tilde{k}(\lambda)Y_\nu(b)$.

Essendo f a supporto compatto , $\tilde{f}(\lambda,b)$ è una funzione intera di λ ([4]); se $\tilde{k}(\lambda)$ si annullasse su un insieme di misura positiva dovrebbe essere $\tilde{f} \equiv 0$

e quindi $f \equiv 0$.

Vale la seguente formula per la soluzione $u(x,t)$ dell'equazione delle onde con dato iniziale $F \in C_c^\infty$

$$(6) \qquad u(x,t) = c \int_B \exp \rho A(x,b) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda(A(x,b) - t)} q(\lambda) \widetilde{R_+F}(\lambda,b) d\lambda \right) db$$

dove $\widetilde{R_+F}(\lambda,b)$ denota la trasformata di Fourier della funzione $s \to R_+F(s,b)$

Dimostrazione. -

Si ha, per $f \in C_c^\infty(X)$

$$\int_B \exp \rho A(x,b) \left(\int_{\mathbb{R}} p(-\lambda) q(\lambda) \tilde{f}(\lambda,b) \exp(i\lambda A(x,b))\, d\lambda \right) db =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} p(-\lambda) q(\lambda) \left(\int_B \exp((\rho + i\lambda) A(x,b))\, \tilde{f}(\lambda,b) db \right) d\lambda = 0$$

siccome $\int_B \exp((\rho+i\lambda)A(x,b))\tilde{f}(\lambda,b)db$ è una funzione pari di λ([4]), mentre $p(-\lambda)q(\lambda)$ è una funzione dispari.

La formula (3) di inversione per la trasformata di Radon conclude la dimostrazione nel caso $t = 0$. In modo analogo si dimostra che $u_t(x,0)=f_2(x)$.

Per $t \neq 0$, si ha se $F \in C_c^\infty$

$$u(x,t) = c \int_{\mathbb{R}} q(\lambda) e^{-i\lambda t} \left(\int_B \exp((i\lambda+\rho)A(x,b)) \widetilde{R_+F}(\lambda,b) db \right) d\lambda$$

Ma $\int_B \exp((i\lambda+\rho)A(x,b))\widetilde{R_+F}(\lambda,b)db$ è una autofunzione di L legata all'autovalore $-\lambda^2$ ([2]), da cui

$$Lu(x,t) = -c \int_{\mathbb{R}} q(\lambda) e^{-i\lambda t} \lambda^2 \left(\int_B \exp((i\lambda+\rho)A(x,b)) \widetilde{R_+F}(\lambda,b) db \right) d\lambda$$

$$= \partial_t^2 u(x,t).$$

Dunque, se $F \in C_c^\infty$, $u(x,t)$, data in formula (6), è la soluzione dell'equazio ne delle onde con dato iniziale F.

Consideriamo, per $F \in H$, la distribuzione su $\mathbb{R} \times M$:

$$(7)\quad u(x,t) = 1/2 \int_B \exp(\rho\, A(x,b))(Q_+F)(A(x,b)-t,b)db$$

dove $(Q_+F)(s,b)$ indica, per ogni b, la distribuzione temperata che è antitrasformata di Fourier della funzione

$$\lambda \to q(\lambda)\widetilde{R_+F}(\lambda,b).$$

Formula (7) dà una soluzione distribuzionale dell'equazione delle onde $Lu = u_{tt}$.

Dimostriamo ora che, <u>per ogni</u> b, <u>la distribuzione temperata</u> $Q_+F(s,b)$ <u>ha supporto in</u> $\mathbb{R}^+$ <u>se e solo se</u> $\operatorname{supp} R_+F \subset \mathbb{R}^+$.

Innanzitutto la distribuzione temperata $Q_+F(s,b)$ è,per ogni b, in qualche spazio di Sobolev $H^{-\mu}(\mathbb{R})$ ([8]).

Riportiamo qui il teorema di Paley-Wiener per gli spazi $H^{\mu}(\mathbb{R})$, ([8]), con $\mu \in \mathbb{Z}$:

sia k una distribuzione temperata appartenente ad $H^{\mu}(\mathbb{R})$.
Si ha:

$\operatorname{supp} k \subset R^+ \iff \exists\, \Phi(z)$ olomorfa nel semipiano $\operatorname{Im} z = \eta < 0$ e

$$\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2+\eta^2)^{\mu}\, |\Phi(\xi+i\eta)|^2\, d\xi < C \qquad \forall \eta < 0$$

e che verifica l'una o l'altra delle seguenti condizioni

$$\int (1+\xi^2)^{\mu}\, |\Phi(\xi+i\eta)-\tilde{k}(\xi)|^2\, d\xi \to 0 \quad \text{se} \quad \eta < 0 \ \text{e} \quad \eta \to 0$$

o

$$\lim_{\eta<0\to 0} \Phi(\xi+ i\eta) = \tilde{k}\,(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}\,.$$

Sia $\operatorname{supp} R_+F \subset \mathbb{R}^+$ e sia Φ la sua trasformata di Fourier.

Allora $q(z)\Phi(z)$ è olomorfa in $\mathrm{Im} z < 0$ e si verificano facilmente le altre condizioni che garantiscono che $q(z)\Phi(z) = \Psi(z)$ è trasformata di Fourier di una distribuzione con supporto in $\mathbb{R}^+$; tale distribuzione è Q_+F.

Viceversa se $\mathrm{supp}\, Q_+F \subset \mathbb{R}^+$ e $\Psi(z)$ è la sua trasformata di Fourier, allora $\Psi(z)/q(z) = \Phi(z)$ è la trasformata di Fourier di una distribuzione con supporto in R^+, che è ovviamente R_+F.

Definiamo ora il sottospazio outgoing $\mathcal{D}_+$ come l'insieme di tutti i dati $F \in H$ tali per cui $\forall t > 0, U(t)F(x)$ si annulla per $d(x,j) < t$.

Per provare che $\mathcal{D}_+$ è effettivamente lo spazio outgoing della trasformazione R_+, basta provare che $R_+\mathcal{D}_+ = L^2(\mathbb{R}^+)$.

a. $R_+\mathcal{D}_+ \supset L^2(\mathbb{R}^+)$.

Siano $\mathrm{supp}\, R_+F \subset \mathbb{R}^+$ e $d(x,j) < t, t > 0$; allora $\mathrm{sup}\, Q_+F \subset \mathbb{R}^+$ e, per ogni $b \in B$, $A(x,b) \leq d(x,j) < t$ pertanto $F \in \mathcal{D}_+$.

b. $R_+\mathcal{D}_+ \subset L^2(\mathbb{R}^+)$

Per dimostrare che, se $F \in \mathcal{D}_+$ allora $\mathrm{supp}\, R_+F \subset \mathbb{R}^+$, abbiamo bisogno di una generalizzazione di teorema 3.8 di [5], (vedi nota (1)) .

Lemma. -(1) Sia k una distribuzione su $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ e sia

---

(1) La dimostrazione è esattamente come nel caso n=3 fino al calcolo delle radici di $P_h^*(\ ) = 0$. A questo punto dobbiamo sostituire in(8)$K(s,b)=e^{-\rho\mu(m)s}\chi_h(b)$ $m=0,1,\ldots,h-1$ e ricordare l'epressione di ρ e di $\exp\rho A(x,b)$ per gli spazi iperbolici nella loro realizzazione come palla unitaria in $\mathbb{R}^n$:

(8) $\quad u(x,t) = 1/2 \int_B (\exp\rho A(x,b))k(A(x,b)-t,b)db$

i. $u(x,t) = 0 \ \forall\ x,t \Longleftrightarrow$ le h-sime componenti armoniche sferiche di k sono della forma

$$\varepsilon.\ k_h(s) = \int k.Y_h(b)db = \Sigma\, k_{m,h}\, e^{-\mu(m)s\rho} \qquad \underline{0\le m\le h-1}$$

dove $\mu(m) = \begin{cases} 1+\dfrac{2m}{n-1} & \text{per gli spazi iperbolici reali} \\ 1+\dfrac{2m}{n} & \text{per gli spazi iperbolici complessi} \\ 1+\dfrac{m}{n+2} & \text{per gli spazi iperbolici quaternionici .} \end{cases}$

ii. $u(x,t) = 0$ se $d(x,j) < t \Longleftrightarrow$ vale ε per $s < 0$

iii. $u(x,t) = 0$ se $d(x,j) < -t \Longleftrightarrow$ vale ε per $s > 0$

iv. $u(x,t) = 0$ se $d(x,j) < a -|t| \Longleftrightarrow$ vale ε per $|s| < a$

Sia $F \in \mathcal{D}_+$ e applichiamo ii nel caso di $k = Q_+F$; poiché Q_+F è temperata si ottiene supp $Q_+F \subset \mathbb{R}^+$ e dunque supp $R_+F \subset \mathbb{R}^+$.

(Continuazione della nota di pag. 13.

$\rho \quad \exp\rho\, A(x,b)$

$\dfrac{n-1}{2} \qquad \left(\dfrac{(1-|x|^2}{(|b-x|^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$ caso reale

$\dfrac{n}{2} \qquad \left(\dfrac{1-|z|^2}{|1-z\cdot\bar{b}|^2}\right)^{\frac{n}{4}}$ caso complesso

$\dfrac{n+2}{2} \qquad \left(\dfrac{1-|z|^2}{|1-z\cdot\bar{b}|^2}\right)^{\frac{n+2}{2}}$ caso quaternionico

Qui z e b denotano le coordinate complesse e quaternioniche di x e b nella palla unitaria.

La rappresentazione "incoming R_- si ottiene mediante riflessione rispetto ad s della funzione

$$-c^{\frac{1}{2}}\,\mathcal{P}(\partial_s(e^{\rho s}\hat{f}_1) + e^{\rho s}\hat{f}_2) \quad \text{se} \quad F = \{f_1,f_2\} \in C_c^\infty$$

e lo spazio incoming $\mathcal{D}'_-$ è l'insieme dei dati $F \in H$ tali per cui, $\forall t < 0$, $u(x,t) = 0$ se $d(x,j) < -t$.

Il principio di Huygens, che si enuncia nel modo seguente:

se il dato iniziale $F = \{f_1,f_2\}$ è tale che $f_1(x) = f_2(x) = 0$ per ogni x per cui $d(x,j) > a$, allora $u(j,t) = 0$ per $|t| > a$

vale esclusivamente per gli spazi iperbolici reali di dimensione dispari.

Si ha ovviamente $\hat{f}_1$ e $\hat{f}_2 = 0$ per $|s| > a$ e, da (7)

$$u(j,t) = 1/2 \int_B (Q_+F)(-t,b)db.$$

Se M è uno spazio iperbolico reale di dimensione dispari, allora Q_+F è un operatore differenziale sulle trasformate di Radon $\hat{f}_1$ e $\hat{f}_2$ e quindi $Q_+F(-t,b) = 0$ per ogni $b \in B$ se $|t| > a$. Negli altri casi, il principio di Huygens non vale, infatti $u(j,t)$ è antitrasformata di Fourier di $q(-\lambda) \int_B \widetilde{R_+F}(-\lambda,b)db$. Essendo $u(j,t)$ a supporto compatto, $q(-\lambda) \int_B \widetilde{R_+F}(-\lambda,b)db$ si estende ad una funzione olomorfa intera. Ne segue che $q(\lambda)$ è olomorfa intera e ciò si verifica, per le limitazioni di $q(\lambda)$ date in sezione 2, solo quando $q(\lambda)$, e quindi $p(\lambda)$, è un polinomio.

5. LA MATRICE DELLO SCATTERING. -

Per ogni fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice dello scattering $\mathcal{S}$ è data da $\mathcal{S}(\lambda)$; $L^2(B) \longrightarrow L^2(B)$ dove $\mathcal{S}(\lambda)f = p(\lambda)(-\lambda\ \tilde{f}_1(-\lambda,b) + \tilde{f}_2(-\lambda,b))$ se f è data da $p(-\lambda)(\lambda\tilde{f}_1(\lambda,b) - \tilde{f}_2(\lambda,b))$

$\mathcal{G}$ è causale se e solo se p è un polinomio.

Supponiamo che $\mathcal{G}$ sia causale; al variare di f_1, f_2 in $C_c^\infty(X)$ le funzioni $g : (\lambda,b) \to p(-\lambda)(\lambda\tilde{f}_1(\lambda,b)-\tilde{f}_2(\lambda,b))$ appartengono ad $\mathcal{Q}_+$. L'ipotesi di causalità implica che anche le funzioni $p(\lambda)(-\lambda\tilde{f}_1(-\lambda,b)+\tilde{f}_2(-\lambda,b))$ appartengono ad $\mathcal{Q}_+$. Ne segue che $p(\lambda)$ deve estendersi ad una funzione olomorfa in $\operatorname{Im} z > 0$ e quindi che p è un polinomio.

Viceversa se p è un polinomio, allora X è uno spazio iperbolico reale di dimensione dispari. Per tali spazi, non c'è alcuna difficoltà ad estendere gli argomenti svolti nel caso di dimensione 3 in [5].

Inoltre, procedendo esattamente come in [5] si ottiene la seguente espressione per la matrice dello scattering nel caso degli spazi iperbolici reali di dimensione dispari:

$$S(\sigma) = \sum_{o}^{\infty}{}_k \oplus B_k(\sigma)\, Q_k \qquad \text{dove}$$

$$B_k(\sigma) = \varepsilon_k \prod_{m=1}^{k} \frac{\sigma + i\mu(m)\rho}{\sigma - i\mu(m)\rho} \qquad |\varepsilon_k| = 1 \quad \mu(m) = 1 + \frac{2m}{n-1}$$

e Q_k è la proiezione ortogonale di N su tutto lo spazio generato dalle armoniche sferiche di ordine k.

6. Un'osservazione sulla trasformata di Radon. -

E' ovvio che se g si annulla fuori della palla di centro j e raggio r $B(j,r)$ allora

$$\hat{g}(s,b) = 0 \qquad \text{per } s > r \quad \text{e per ogni } b.$$

Non possiamo stabilire la proposizione inversa, ma dimostriamo che se $g \in L_2(x)$ e se $\Phi(e^{\rho s}\hat{g}) = 0$ per $s > r$ e per ogni b allora

$$g = 0 \qquad \text{fuori di } B(j,r).$$

Dimostrazione. -

Siano

$$\mathcal{D}_{+}^{r} = U(r)\mathcal{D}_{+} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{D}_{-}^{r} = U(-r)\mathcal{D}_{-} .$$

Premettiamo due osservazioni.

1ª Osservazione. -

Come Corollario del Lemma di Sezione 5 e del Lemma analogo per distribuzioni n del tipo

$$u(x,t) = \int_B \exp(\rho A(x,b)k_{-}(A(x,b)+t,\ b)db$$

si hanno i seguenti risultati:

$R_{+}\mathcal{D}_{+}^{r}$ consiste delle funzioni $h(s,b)$ a quadrato sommabile e nulle per $s < r$.

$R_{+}\mathcal{D}_{-}^{r}$ consiste delle funzioni $h(s,b)$ a quadrato sommabile e tali che se $R_{+}F = h$ con $F \in \mathcal{D}_{-}^{r}$ allora $Q_{+}F$ soddisfa ε per $s > -a$.

$R_{-}\mathcal{D}_{-}^{r}$ consiste delle funzioni $h(s,b)$ a quadrato sommabile nulle per $s < a$

$R_{-}\mathcal{D}_{+}^{r}$ consiste delle funzioni $h(s,b)$ a quadrato sommabile e tali che se $R_{-}F = h$ con $F \in \mathcal{D}_{+}^{r}$ allora $Q_{+}F$ soddisfa ε per $s > -a$.

2ª Osservazione. -

Con un procedimento analogo a quello usato in Lemma 3.11 [5], ma ragionando su Q_{+} invece che su R_{+} si può provare che:

se il dato $(0,f)$ è tale che

$$f = 0 \qquad \text{per } d(x,j) < r$$

allora

$(0,f)$ si approssima con dati $(0,f_N)$ appartenenti a $\mathcal{D}^r_+ + \mathcal{D}^r_-$.

Utilizzando tali fatti possiamo dimostrare ora il risultato enunciato:

se $\Phi(e^{\rho s} g) = 0$ per $s > r$ e per ogni $b \in B$, allora si ha se
$G = (0,g)$

$R_+ G = 0$ per $s > r$

$R_- G = 0$ per $s > r$

pertanto G è E-ortogonale a $\mathcal{D}^r_+ + \mathcal{D}^r_-$.

Per la 2^a osservazione, G è E-ortogonale ai dati $(0,f)$ per cui sia $f = 0$ per $d(x,j) < r$.

Se ne deduce che g è ortogonale in $L^2(X)$ ad ogni $f \in L^2(X)$ nullo in $B(j,r)$, ovvero $g = 0$ fuori di $B(j,r)$.

B I B L I O G R A F I A

[1] M.P.Gaffney, *A special Stokes's theorem for complete riemannian manifolds*, Ann. of Math. 60,140-145,1954.

[2] S.Helgason, *A duality for symmetric spaces with applications to groups representations*, Adv. in Math., 5,1-154,1970

[3] S. Helgason, *Duality and Radon trasform for symmetric spaces*, Amer.J.Math. 85,667-692,1963

[4] S.Helgason, *Harmonic analysis on homogeneous spaces*, Proc. Sym. in Pure Math., 26 Amer. Math.Soc., 101-146,1973

[5] P.D.Lax-R.S.Phillps, *Translation representation for the wave equation*, Commun. on Pure and App. Math., XXXII,5,617-667,1979.

[6] P.D.Lax-R.S.Phillips, *Scattering theory*, Academic Press, N.Y. 1967

[7] M.A.Semenov-Tian-Shansky, *Harmonic Analysis on Riemannian symmetric spaces of negative curvature and scattering theory*, Math.U.S.S.R. Izv,10,535-563,1976

[8] G. Talenti, *Sulle equazioni integrali di Wiener-Hopf*, Boll. UMI, (4),7 suppl. fasc. 1,18-11+,1973.