$$(i)\ \partial_y u\,(x,\sqrt{1-x^2}) = -(x-i\sqrt{1-x^2})^n\ \partial_y u(-x,\sqrt{1-x^2})$$

$$(ii)\ (\partial_x u)\,(\tfrac{1}{2},y) = (\partial_x u)(-\tfrac{1}{2},y)$$

$$(iii)\ (\partial_x u)\,(-\sqrt{1-y^2},y)\ \bar{v}(-\sqrt{1-y^2},y) = (\partial_x u)(\sqrt{1-y^2},y)\bar{v}(\sqrt{1-y^2},y)$$

Si introduce il seguente prodotto scalare (,) nello spazio $\mathcal{L}$ delle funzioni $C_0^\infty(F)$ (funzioni C^∞ a supporto compatto) soddisfacenti le condizioni (c.b.):

$$(u,v) = \int_F u(x,y)\ \bar{v}(x,y)y^{-n-2}\ dx\ dy$$

L'operatore L_0 definito da:

$$L_0(u) = y^2(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) + i\ n\ y(\partial_x u + i\ \partial_y u)$$

per ogni $u \in \mathcal{L}$, risulta essere simmetrico rispetto al prodotto scalare (,) sopra definito.

Per motivi che appariranno evidenti nel seguito, noi prenderemo in considerazione l'operatore $L = L_0 + (\frac{n+1}{2})^2$.

Con $L_2(F)$ denoteremo poi il completamento di $\mathcal{L}$ rispetto alla norma $\|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$ (per ogni $u \in \mathcal{L}$).

n.1. Spettro di L. -

Si denoti con F_0 il sottoinsieme di F:

$$F_0 = \{(x,y) \in F\ /\ y \le a\}$$

dove a è un numero reale ≥ 2, e sia $F_1 = F - F_0$; un semplice calcolo, dà la seguente espressione per $-(Lu,u)$:

$$(1.1)\qquad -(Lu,u) = \int_F \{y^{-n}(|\partial_x u|^2 + |\partial_y u|^2) - i\ n\ y^{-n-1}(\partial_x u)\bar{u} - (\frac{n+1}{2})^2\frac{|u|^2}{y^{n+2}}\}\ dxdy$$

Per ogni $u \in \mathcal{L}$ si ponga:

$$u^{(o)}(u) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u(x,y)\, dx \qquad \forall y \in [1,+\infty[$$

si noti che $u^{(o)}(y)$ può essere definita anche per $y \leq 1$ quando u è nulla per $y \leq 1$ (o più in generale se u è definita su tutta la striscia $S = \{(x,y) \in \pi / \ |x| \leq 1/2\}$).

I seguenti sottospazi di $L_2(F)$:

$H_2 = \{u \in L_2(F)/u$ soddisfa le condizioni (c.b.) e $u^{(o)}(y) = 0 \quad \forall y \geq a\}$

$H_1 = \{u \in L_2(F)/u$ soddisfa le condizioni (c.b.) e $(u,v) = 0 \quad \forall v \in H_2\}$

sono invarianti per l'azione di L; su H_1 risulta poi $-(Lu,u) \geq 0$ eccezion fatta per un sottospazio di dimensione finita; infatti poiché $y\, \partial_x u \in H_2$, si ha:

$$\int_F y^{-n-1} (\partial_x u)\, \bar{u}\, d\,x\,d\,y = 0$$

e procedendo come in [6] si ha:

$$(1.2) \quad -(Lu,u) = \int_{F_o} \{y^{-n}(|\partial_x u|^2 + |\partial_y u|^2) - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \frac{|u|^2}{y^{n+2}}\} \, dxdy +$$

$$+ \int_{F_1} \{y^{-n}|\partial_x u|^2 + y|\partial_y \left(\frac{u}{y^{\frac{n+1}{2}}}\right)|^2\} dxdy - \left(\frac{n+1}{2}\right) \int_{|x| \leq \frac{1}{2}} \frac{u}{a^{n+1}}(x,a)dx \quad .$$

Ma per $a > 2$ si ha (in modo del tutto simile al lemma 4.2. pag. 95 di [6]):

$$\int_{|x| \leq \frac{1}{2}} \frac{u^2}{a^{n+1}} dx \leq \int_{|x| \leq \frac{1}{2}} \{(3+n) \int_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{u^2}{a^{n+2}} dy + \frac{1}{n+1} \int_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{(\partial_y u)^2}{a^n} dy\} dx$$

e pertanto:

$$(1.3) \qquad -(Lu,u) \geq \frac{1}{2} \int_{F_o} y^{-n} |\partial_y u|^2 \, dx\, dy + \int_F y^{-n} |\partial_x u|^2 \, dxdy +$$

$$+ \int_{F_1} y \, |\partial_y (\frac{y}{y^{\frac{n+1}{2}}})|^2 \, dxdy - \{ (\frac{n+1}{2})^2 + (\frac{n+1}{2})(3+n) \} \int_{F_0} \frac{|u|^2}{y^{n+2}} \, dx\, dy$$

da cui introducendo la forma quadratica

$$K(u) = \int_{F_0} \frac{|u|^2}{y^{n+2}} \, dxdy$$

si ha per un opportuno $r > 0$

(1.4) $$r\, K(u) - (Lu,u) \geq 0 \quad .$$

La compatezza di $K(u)$ rispetto alla forma

$$C_0(u) = \int_{F_0} \{ |\partial_x u|^2 + |\partial_y u|^2 + \frac{u^2}{y^{n+2}} \} \, dxdy$$

implica che per ogni $\varepsilon > 0$ risulta $K(u) \leq \varepsilon\, C_0(u)$ su qualche sottospazio di codimensione finita in H_1 e quindi per il lemma 4.3. pag. 97 di [6] segue che

(1.5) $$(Lu,u) < 0$$

su un sottospazio di codimensione finita in H_1.

Possiamo allora enunciare i seguenti fatti per lo spettro di L_0 in H_1 :

1a) ogni punto di $(-\infty, -(\frac{n+1}{2})^2$ appartiene allo spettro L_0 .

1b) fuori dell'intervallo $(-\infty, -(\frac{n+1}{2})^2$ lo spettro di L_0 consiste di un numero finito di autovalori di molteplicità finita .

Cenno di dimostrazione: 1a) fissato $\lambda \in (-\infty, -(\frac{n+1}{2})^2)$ per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $u_\varepsilon \in H_1$ tale che:

$$\| (L - \lambda) u_\varepsilon \| \leq \varepsilon \| u_\varepsilon \| \tag{1.6}$$

le funzioni u_ε si possono trovare esattamente come nel teorema 4.1 pag. 30 di [6], partendo nel nostro caso dalla funzione $y^{\frac{n+1}{2}+i\mu}$ che è un'autofunzione generalizzata per L_0, corrispondente all'autovalore $\lambda = -(\frac{n+1}{2})^2 - \mu^2$.

Per la 1b) basta tener presente la (1.5).

Possiamo allora applicare all'operatore L considerato sullo spazio H_1, la teoria modificata dello scattering secondo Lax e Phillips.

n.2. Equazione delle onde automorfe di peso n.

Consideriamo l'equazione delle onde automorfe di peso n:

$$Lu = u_{tt} \qquad u \in H_1 \tag{2.1}$$

l'energia associata

$$E = \| u_t \|^2 - (u, Lu)$$

è positiva su H_1 eccezion fatta per un sottospazio di dimensione finita.

La disuguaglianza (1.4) suggerisce di considerare su H_1 la forma quadratica:

$$G(u) = E(u) + r\, K(u) .$$

Denotiamo con $\mathcal{H}_G$ il completamento dell'insieme dei dati $f = \{f_1, f_2\}$ (con f_1, f_2 funzioni di H_1) rispetto alla norma:

$$G(f) = \| f_2 \|^2 - (f_1, L f_1) + r\, K(f_1)$$