$$m([A]_0) = \mu(A) \qquad \forall A \in \mathcal{B}$$

Tale misura è strettamente positiva. Posto $\forall A' \in \mathcal{A}_1$

$$m'(A') = m(h(A'))$$

risulta che m' ha le stesse proprietà di m per il Lemma (10.5) m' induce a sua volta su $\mathcal{B}$ una σ-finita , σ-misura ν ponendo

$$\nu(A) = m'([A]_1) \qquad \forall A \in \mathcal{B} .$$

Tale misura sarà nulla su $\mathfrak{I}_1$. Per il Teorema di Teoria della misura (cfr. [1] pag. 77), analogo ad riultato (2), $\exists\, A_0 \in \mathcal{B}$ con $\nu(A_0) = 0$ ed $\exists\, A_1 \in \mathfrak{I}_1$ $\ni'$ $\mathbb{R} = A_0 \cup A_1$; ma questo porta che ν e poi m' ed m sono identicamente nulle (assurdo).

§11. - m-omomorfismi, atomi, ed interpretazione negli spazi di Stone.

DEF. Siano $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{A}'$ due algebre Booleane ed $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ un omomorfismo.

Supponiamo che esistano:

$$(1) \quad A = \bigcup_{t\in T}^{\mathcal{A}} A_t \qquad \text{e} \qquad \bigcup_{t\in T}^{\mathcal{A}'} h(A_t) \qquad (2)$$

Da $A_t \subset A$ segue che $h(A_t) \subset h(A)$ e quindi $\bigcup_{t\in T}^{\mathcal{A}'} h(A_t) \subset h(A)$.

Orbene diremo che l'omomorfismo h preserva l'unione Boolena (1) se esiste la (2) e risulta:

$$(3) \qquad h(A) = \bigcup_{t\in T}^{\mathcal{A}'} h(A_t) \quad .$$

Analogamente si definisce un omomorfismo che preserva l'intersezione .

Diremo che h è un m-omomorfismo se preserva tutte le unioni (1) (e quindi tutte le intersezioni), con card $T \leq m$.

L'omomorfismo h si dice poi completo se è un m-omomorfismo $\forall m$.

Le definizioni appena date vanno confrontate con la (4) del § 8, precisamente se h è un isomorfismo surgettivo allora è completo.

DEF. 2. $0 \neq a \in \mathcal{A}$ si dice atomo di $\mathcal{A}$ se non eiste $B \in \mathcal{A} - \{0,a\}$ con $B \subset a$.
Un'algebra A si dice atomica $\Longleftrightarrow \forall A \in \mathcal{A} - \{0\}\ \exists$ un atomo $a \subset A$.

La nozione di atomo per un'algebra Booleana è l'analoga di quella di insieme ridotto ad un sol punto (singoletto) per un campo.

Si vede facilmente che

(4) (a atomo di $\mathcal{A}$) $\Longleftrightarrow$ $\beta_a = \{A \in \mathcal{A} : a \subset A\}$ è un ultrafiltro.

PROP. (11.1). Sia $\mathcal{A}$ un'algebra Booleana e poniamo $\forall A \in \mathcal{A}$

$$h(A) = \{a \in \mathcal{A} : a \text{ atomo di } \mathcal{A} \text{ e } a \subset A\}.$$

Allora h è un omomorfismo completo di $\mathcal{A}$ nel campo $\mathcal{P}(X)$ dove $X = h(1)$ è l'insieme di tutti gli atomi di $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{A}$ è atomica allora h è un isomorfismo.

Se h è un isomorfismo di $\mathcal{A}$ sul campo $\mathcal{A}^*$ dei clopen dello spazio di Stone X di $\mathcal{A}$ allora

a atomo di $\mathcal{A}$ $\Longleftrightarrow$ $h(a)$ è un singoletto di X

a atomo di $\mathcal{A}$ e $h(a) \in \mathcal{A}^*$ $\Longleftrightarrow$ $h(a)$ è un punto isolato di X

$\mathcal{A}$ atomica $\Longleftrightarrow$ $Y = \{x \in X : x \text{ isolato}\}$, $\overline{Y} = X$

$\mathcal{A}$ priva di atomi $\Longleftrightarrow$ X è denso in sé, cioé non ha punti isolati.

Evidentemente ogni algebra Booleana finita è atomica ed ha 2^n elementi se n è il numero degli atomi.

DEF. 3. - Sia X uno spazio topologico, $C \subset X$, diremo che C è un m-chiuso (m-aperto) $\overset{\cdot}{\Longleftrightarrow}$ $C = \bigcap_{t \in T} A_t$ $\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)$ con A_t clopen e card $T \leq m$.

DEF. 4 - Se X è uno spazio topologico totalmente sconnesso diremo che è estremamente sconnesso $\overset{\cdot}{\Longleftrightarrow}$ $\forall A$ aperto : $\overline{A}$ aperto ($\Longleftrightarrow$ $\forall C$ chiuso $\overset{\circ}{C}$ é chiuso).

Orbene si ha il seguente

Teorema (11.2). Se $\mathcal{A}$ è un'algebra Booleana ed X é il suo spazio di Stone si ha:

a) $\mathcal{A}$ m-completa $\Longleftrightarrow$ $\forall A$ m-aperto di X: $\bar{A}$ è aperto
$\Longleftrightarrow$ $\forall C$ m-chiuso di X : $\mathring{C}$ è chiuso

b) $\mathcal{A}$ completa $\Longleftrightarrow$ X è estremamente sconnesso (cfr. [1] pag.85-86).

Col teorema di rappresentazione si è visto che ogni algebra Booleana è isomorfa ad un campo d'insiemi $\mathcal{A}^*$. Se $\mathcal{A}$ è una m-algebra, anche $\mathcal{A}^*$ è una m-algebra, ma in generale non è un m-campo (cfr. Osserv. (9.1) ed esempi A ecc.).

Ma addirittura è possibile provare che $\forall$ cardinale infinito m esistono algebre che non sono isomorfe ad alcun m-campo (cfr. [1] pag. 97).

Dal teorema di rappresentazione segue il seguente

Teorema (11.3). Se $\mathcal{A}$ è una m-algebra allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

1) $\mathcal{A}$ è isomorfa ad un m-campo d'insiemi
2) $\forall A \in \mathcal{A} - \{0\}$ $\exists$ un m-ultrafiltro β $\ni'$ $A \in \beta$
3) $\forall A \in \mathcal{A} - \{1\}$ $\exists$ un m-ideale massimale $\mathfrak{J}$ $\ni'$ $A \in \mathfrak{J}$
4) $\forall A \in \mathcal{A} - \{0\}$ $\exists$ una m-misura a 2 valori m $\ni'$ $m(A) = 1$
5) $\forall A \in \mathcal{A} - \{0\}$ $\exists$ un m-omomorfismo " h $\ni'$ $h(A) = 1$ $(\in \mathcal{A})$
(cfr. [1] pag.98).

Teorema (11.4)

$\mathcal{A}$ algebra Booleana completa è isomorfa ad un campo completo d'insiemi $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ è atomica.

In tal caso $\mathcal{A}$ è isomorfa a $\mathcal{P}(X)$ dove X è l'insieme degli atomi di $\mathcal{A}$.

(cfr. [1] pag. 105).

Teorema (11.5)

Per ogni σ-algebra $\mathcal{A}$ esiste un σ-campo $\mathfrak{F}$ ed un σ-ideale $\mathfrak{J}$ tale che $\mathcal{A}$ è isomorfa ad $\mathfrak{F}/\mathfrak{J}$.

Precisamente

Se X è lo spazio di Stone di $\mathcal{A}$, sia $\mathfrak{F}$ il più piccolo σ-campo contenente $\mathcal{A}^*$ (l'insieme dei clopen di X), $\mathfrak{J} = \{ B \in \mathfrak{F} : B$ di 1ª categoria$\}$ (è un σ-ideale). Allora $\mathcal{A}$ è isomorfa ad $\mathfrak{F}/\mathfrak{J}$ e precisamente se $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ è un isomorfismo surgettivo, allora

$$\tilde{h}(A) = [h(A)]_{\mathfrak{J}} \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

è un isomorfismo di $\mathcal{A}$ su $\mathfrak{F}/\mathfrak{J}$.
(Per la dim. cfr. [1] pag. 117).

Il teorema precedente non vale per $m > \aleph_0$.

§ 12 - Applicazioni alla teoria della misura.

Data una misura μ su un campo $\mathfrak{F}$ (cfr. §2 -c) non è sempre possibile estenderla ad una σ-misura μ' sul σ-campo $\mathfrak{F}'$ σ-generato da $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F}'$ è il più piccolo σ-campo contenente $\mathfrak{F}$).

La condizione necessaria e sufficiente che permette tale estensione è la seguente:

(1) $\forall \{A_n ; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathfrak{F}$ disgiunti, se $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$ allora

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) .$$

Ricordato che se $\mathfrak{F}$ è un campo perfetto, ogni unione numerabile di elementi non vuoti e disgiunti di $\mathfrak{F}$, non appartiene ad $\mathfrak{F}$ (cfr. Prop. 15,§ 6), si ha:

Prop. (12.1). Ogni misura su un campo perfetto, può essere estesa ad una σ-misura.