Esempio di anello Booleano è l'anello degli interi modulo 2 cioé $\{0,1\}$ con :

+	0	1
0	0	1
1	1	0

.	0	1
0	0	0
1	0	1

In un anello Booleano si ha (1) $A+A = 0$ (2) $A+B=0 \Longrightarrow B=A$, (3) $A\,B=BA$.

DIM.- (1) $(1+A)(1+A) = (1+A) \Longrightarrow (1+A)+(A+A)=1+A \Longrightarrow$ per la R3) $A+A=0$

(2) Segue che (1) e da R3) per l'unicità dell'elemento B.

(3) $(A+B)(A+B) = A+B \Longrightarrow A^2 + BA + AB + B^2 = A+B \Longrightarrow BA+AB = 0$ e e dalla (2) segue $AB = BA$.

cvd

PROP. 10 - Ogni algebra Booleana è un anello Booleano con le seguenti definizioni di addizione e di moltiplicazione:

$$A + B = A \triangle B$$

$$A \cdot B = A \cap B$$

Viceversa ogni anello Booleano è un'algebra Booleana con le seguenti operazioni:

$$A \cup B = A + B + A\,B$$

$$A \cap B = A \cdot B$$

$$- A = 1 + A$$

In entrambi i casi gli zeri (e le unità) coincidono.
(Per la dim. cfr. [1] pag. 53).

§6 - Campi d'insiemi ridotti e perfetti.

DEFINIZIONE 14 - Se $\mathscr{A}$ è un campo di sottoinsiemi di X, diremo che $\mathscr{A}$ è ridotto se $\mathscr{A}$ separa i punti di X, cioé

$$\forall\, x \neq y \text{ (in X) } \exists A \in \mathscr{A} \ni' \ x \in A \text{ e } y \notin A$$

ESEMPI

1) $\mathscr{P}(X)$ è ridotto (se $x \neq y$ $\exists$ $\{x\}$ che separa x ed y), mentre $\{\emptyset, X\}$ non è ridotto se card $X > 1$.

2) Sia X uno spazio topologico e sia $\mathscr{A} = \{A \subseteq X;\ A \text{ clopen}\}$.

Ricordiamo che se denotiamo con $C(x)$ la componente connessa di x, allora X si dice totalmente sconnesso o totalmente discontinuo (nella terminologia di [2] pag. 127) se $C(x) = \{x\}$ $\forall\, x \in X$. Poiché risulta

$$C(x) \subset \tilde{C}(x) = \bigcap \{A \in \mathscr{A} : x \in A\}^{(*)}$$

(cfr. [2] pag. 127), allora $\mathscr{A}$ è ridotto $\iff \tilde{C}(x) = \{x\}$ $\forall x \in X$. Nel seguito diremo che X è tot. sconnesso se $\mathscr{A}$ è ridotto.

Se X è T_1 ed x è un punto isolato allora $\{x\} \in \mathscr{A}$ e quindi $\tilde{C}(x) = \{x\}$ ma se $\tilde{C}(x) = \{x\}$ non vuol affatto dire che sia x isolato. Quindi X tot. sconnesso non vuol dire che i punti di X siano isolati ($\mathbb{Q}$ è tot. sconnesso ma non ha punti isolati; l'insieme di Cantor è un altro esempio).

Se X è uno spazio topologico e poniamo $xRy \iff y \in C(x)$ allora R è una relazione di equivalenza e lo spazio $\frac{X}{R}$ è totalmente sconnesso (cfr. [2] pag. 128).

PROP. 11 - Ogni campo $\mathscr{A}$ di sottoinsiemi di X è isomorfo ad un campo ridotto $\mathscr{A}'$.

DIM. - L'idea è di mettere in una stessa classe di equivalenza tutti i punti di X non separati da $\mathscr{A}$. Precisamente definiamo:

$$x\ R\ y \iff \forall\, A \in \mathscr{A} : x \in A \implies y \in A.$$

Si vede facilmente che R è una relazione di equivalenza (in particolare $x\ R\ y \implies y\ R\ x$ in quanto se $A \in \mathscr{A}$ e $y \in A$ e per assurdo $x \notin A$ allora $-A \in \mathscr{A}$, $x \in -A$ e quindi $y \in -A$).

(*) La $\tilde{C}(x)$ viene a volte detta pseudo-componente connessa di x. $C(x)$ è sempre chiuso. Se lo spazio è loc. connesso allora $C(x)$ è anche aperto e quindi $C(x) \in \mathscr{A}$ e $C(x) = \tilde{C}(x)$. Ogni spazio tot. connesso è T_2.

Denotiamo con $X' = \frac{X}{R}$, $x' = [x]$

e $A' = \{x' ; x \in A\}$. Allora

$$h(A) = A'$$

definisce un isomorfismo di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}' = \{A' ; A \in \mathcal{A}\}$ ed $\mathcal{A}'$ è un campo ridotto. Infatti se $x' \neq y' \iff x \not R y \iff \exists A \in \mathcal{A} \ni' x \in A$ e $y \notin A \iff \exists A' \in \mathcal{A}'$ $\ni'$ $x' \in A'$ e $y' \notin A'$. cvd

DEFINIZIONE 15 - Un campo $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X si dice perfetto se ogni ultrafiltro di $\mathcal{A}$ è determinato da un punto di X, cioé è del tipo $\beta_x = \{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ con $x \in X$ (*).

Esempi

3) Ogni campo $\mathcal{A}$ composto da un numero finito d'insiemi è perfetto.
Infatti se β è un ultrafiltro di $\mathcal{A}$, detto $A_0 = \bigcap\{A : A \in \beta\}$, essendo tale intersezione finita, risulta $A_0 \in \beta$ e quindi necessariamente $\beta = \{A \in \mathcal{A} : A_0 \subset A\} = \beta_x$ $\forall x \in A_0$.

4) Sia X infinito e sia $\mathcal{A} = \{A \subset X ;$ A finito o cofinito (cioé $-A$ è finito)$\}$ allora $\beta = \{A \in \mathcal{A}$: A cofinito$\}$ è un ultrafiltro di $\mathcal{A}$ non determinato da alcun punto di X, pertanto $\mathcal{A}$ non è perfetto.

5) Sia X infinito e sia $\mathcal{A}_1$ un campo di sottoinsiemi di X contenente tutti i singoletti $\{x\}$ di X. Risulta $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$ (con riferimento a 4)) e $\mathfrak{F} = \{A \in \mathcal{A}_1$: : A cofinito$\}$ è un filtro. Se β è un ultrafiltro contenente $\mathfrak{F}$, β non è principale e quindi $\mathcal{A}_1$ non è perfetto.

6) Sia X uno spazio topologico compatto ed $\mathcal{A} = \{A \subset X$: A clopen$\}$, allora $\mathcal{A}$ è un campo perfetto. Infatti se β è un ultrafiltro di $\mathcal{A}$, β ha la proprietà dell'intersezione finita, in quanto $A_i \in \beta$ $i \in \{1,2,\dots,n\} \implies \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \beta$ e

---

(*) Tali ultrafiltri β_x sono detti anche fissi o principali o primi (Defin. analoga vale per gli ideali massimali principali).

quindi $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$. Inoltre β è costituito da chiusi, quindi per una nota caratterizzazione dei comp ti (cfr. [3] pag. 584) risulta $A_0 = \bigcap_{A \in \beta} A \neq \emptyset$.

Risulta allora

$$\beta = \{A \in \mathcal{A} : A \supset A_0\} = \beta_x \qquad \forall x \in A_0.$$

PROP. 12 - Se $\mathcal{A}$ è un campo di sottoinsiemi di X, ridotto e perfetto allora, detto $[\mathcal{A}]$ l'insieme degli ultrafiltri di $\mathcal{A}$, l'applicazione $X \ni x \to \beta_x \in [\mathcal{A}]$ è una bigezione, cioé ogni ultrafiltro di $\mathcal{A}$ è determinato da <u>un unico</u> punto di X. Quindi $\operatorname{card} X = \operatorname{card} [\mathcal{A}]$

DIM.

L'applicazione è surgettiva perché $\mathcal{A}$ è perfetto. L'applicazione è ingettiva perché se $x \neq y$ allora $\exists A \in \mathcal{A}$ $\ni'$ $x \in A$ e $y \notin A$, quindi $A \in \beta_x - \beta_y$ e $\beta_x \neq \beta_y$.

cvd

<u>Osservazione</u> 2. Se X è uno spazio topologico compatto e totalmente sconnesso allora $\mathcal{A} = \{A \subset X;\ A \text{ clopen}\}$ è ridotto e perfetto. Orbene il viceversa è anche vero, nel senso specificato dal seguente:

TEOREMA 13 - Se $\mathcal{A}$ è un campo ridotto e perfetto di sottoinsiemi di X, allora su X si può definire una topologia $\mathcal{T}$ che lo rende compatto e totalmente sconnesso ed $\mathcal{A}$ diventa l'insieme dei clopen per quella topologia.

DIM.

Basta considerare $\mathcal{A}$ come base della topologia $\mathcal{T}$. Risulta

$$\mathcal{T} = \{\bigcup_{A \in \mathcal{B}} A;\ \text{con } \mathcal{B} \subset \mathcal{A}\} \quad \text{(cfr. [3] pag. 549).}$$

Evidentemente $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$, quindi ogni elemento A di $\mathcal{A}$ è aperto, ma è anche chiuso essendo $-A \in \mathcal{A}$ aperto. Se denotiamo con $\mathcal{A}_1$ l'insieme dei clopen di $\mathcal{T}$ risulta pertanto

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1,$$

ed essendo $\mathcal{A}$ ridotto, lo spazio topologico $(X,\mathcal{T})$ è totalmente sconnesso. Proviamo che $(X,\mathcal{T})$ è compatto. Basterà provare che se $\{A_i : i \in I\} \subset \mathcal{A}$ è un ricoprimento di X, esiste J finito $\subset$ I $\ni'$ $X = \bigcup_{i\in J} A_i$. Supposto per assurdo che $\forall$ J finito $\subset$ I : $\bigcup_{i\in J} A_i \neq X$, allora $\bigcap_{i\in J} A'_i \neq \emptyset$, $(A'_i = -A_i)$ quindi $\mathcal{B} = \{A'_i : i \in I\} \subset \mathcal{A}$ ha la proprietà dell'intersezione finita e genera un filtro proprio $\mathcal{F}$ (cfr. Prop. 4' pag. 4). Sia β un ultrafiltro contenente $\mathcal{F}$ (e quindi $\mathcal{B}$). Poiché $\mathcal{A}$ è perfetto $\exists\, x_0 \in X$ $\ni'$ $\beta = \beta_x$ e quindi $x_0 \in \bigcap_{i\in I} A'_i$ cioé $\bigcup_{i\in I} A_i \neq X$ contro l'ipotesi. Proviamo ora che

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A} .$$

Sia $A \in \mathcal{A}_1$. Essendo A aperto, è esprimibile come unione di elementi di $\mathcal{A}$, cioé

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i \qquad \text{con } A_i \in \mathcal{A}$$

Essendo A chiuso ed X compatto, A è compatto e quindi esiste J finito $\subset$ I $\ni'$ $A = \bigcup_{i\in J} A_i$. Pertanto come unione finita di elementi di $\mathcal{A}$ risulta $A \in \mathcal{A}$

cvd

<u>Osservazione</u> 3 - La topologia $\mathcal{T}$ del teorema precedente è <u>univocamente</u> determinata da $\mathcal{A}$ e dalle condizioni del teorema. Infatti se $\mathcal{T}_1$ è un'altra topologia che rende X compatto, totalmente sconnesso e con $\mathcal{A}$ coincidente con l'insieme dei clopen, essendo $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}_1$ segue che $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1$.

Considerata allora l'applicazione identica

$$i : (X,\mathcal{T}_1) \to (X,\mathcal{T})$$

questa è continua, ed essendo $(X,\mathcal{T}_1)$ compatto, i è un omeomorfismo (cfr. [3] pag. 589 ,[6] pag. 141) e quindi $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$.

PROP. 14 - Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due campi perfetti e ridotti di sottoinsiemi di X e di Y rispettivamente.

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono isomorfi, allora gli spazi X ed Y topologizzati come indicato nel teorema 13 sono omeomorfi.

DIM.

Sia $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un isomorfismo di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{B}$.

Se $x \in X$, $h(\beta_x)$ è un ultrafiltro di $\mathcal{B}$ (cfr. prop.7), come tale è determinato da un unico punto $\varphi(x) \in Y$ (cfr. prop. 12), cioé:

$$h(\beta_x) = \beta_{\varphi(x)}.$$

Si è così definita l'applicazione $\varphi : X \to Y$ e risulta $\forall A \in \mathcal{A}$

$$x \in A \iff \varphi(x) \in h(A) \quad (y \in B \iff \varphi^{-1}(y) \in h^{-1}(B))$$

Tale applicazione φ è bigettiva ed ha le seguenti proprietà:

$$\forall\ A \in \mathcal{A} : \varphi(A) = h(A)$$

$$\forall\ B \in \mathcal{B} : \varphi^{-1}(B) = h^{-1}(B)$$

Di conseguenza se G è un aperto di X allora $G = \bigcup_{i \in I} A_i$ con $A_i \in \mathcal{A}$

e $\varphi(G) = \varphi(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} \varphi(A_i) = \bigcup_{i \in I} h(A_i)$; quindi $\varphi(G)$ risulta unione di

elementi di $\mathcal{B}$ e perciò è aperto in Y.

Analogamente se G_1 è aperto in Y, si prova che $\varphi^{-1}(G_1)$ è aperto in X.

cvd

<u>Osservazione</u> 4. Se $\mathcal{A}$ è un campo perfetto (ma non necessariamente ridotto) allora, definendo $\mathcal{C}$ come nel teorema 13 si ottiene uno spazio topologico compatto ed $\mathcal{A}$ coincide con la famiglia dei clopen. Però (X,τ) non solo non è totalmente sconnesso, ma in generale non sarà neanche T_0.

PROP. 15 - Se $\mathcal{A}$ è un campo perfetto di sottoinsiemi di X e $\{A_i ; i \in I\}$ è un sottoinsieme infinito di elementi di $\mathcal{A}$, non vuoti e mutualmente disgiunti, allora $A = \bigcup_{i\in I} A_i \notin \mathcal{A}$.

DIM. Se $\mathcal{T}$ è la topologia definita nel teor. 13, per quanto visto nell'osserv. 4, $(X,\mathcal{T})$ è compatto. Se per assurdo $A \in \mathcal{A}$ allora A è chiuso e quindi $\exists$ J finito $\subset I$ $\ni'$ $A = \bigcup_{i\in J} A_i$. Questo è in contrasto con l'ipotesi che I è infinito e le A_i sono non vuote e mutualmente disgiunte.

cvd

§ 7 - Il teorema di rappresentazione di Stone (1934~1938)

Nel §1 abbiamo visto che i campi di sottoinsiemi di un dato insieme X, sono particolari algebre Booleane. In questo paragrafo faremo vedere che data un'algebra Booleana $\mathcal{A}$, questa può sempre essere riguardata, a meno di isomorfismi come un campo di sottoinsiemi, ridotto e perfetto, dello spazio $X = [\mathcal{A}]$ degli ultrafiltri di $\mathcal{A}$.

Teorema 16 - Sia $\mathcal{A}$ un'algebra Booleana, $X = [\mathcal{A}]$. Posto $h : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(X)$ $\ni'$ $h(A) = \{\beta \in X : A \in \beta\} = A^*$ $\forall A \in \mathcal{A}$, allora h è un isomorfismo di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{A}^* = h(\mathcal{A})$, che è un campo ridotto e perfetto di sottoinsiemi di X.

DIM.

Si tratta di provare che $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$, $(A\cap B)^* = A^* \cap B^*$, $(A')^* = (A^*)'$
A tal fine basta osservare che, per definizione:

$$A \in \beta \iff \beta \in A^*$$

Infine $\beta \in (A\cap B)^* \iff A\cap B \in \beta \iff A \in \beta \wedge B \in \beta \iff \beta \in A^* \wedge \beta \in B^* \iff \beta \in A^* \cap B^*$

$$\beta \in (A')^* \iff A' \in \beta \iff A \notin \beta \iff \beta \notin A^* \iff \beta \in (A^*)'.$$

Per provare che h è ingettiva basta provare che $h(A) = \emptyset \Rightarrow A = 0$ o equivalentemente $0 \neq A \in \mathcal{A} \Longrightarrow h(A) \neq \emptyset$.

Se $0 \neq A \in \mathcal{A}$, posto $\varphi = \{B \in \mathcal{A} : B \supset A\}$, risulta φ un filtro di $\mathcal{A}$. Se β è un ultrafiltro contenente φ risulta $\beta \in h(A)$ e quindi $h(A) \neq \emptyset$. Quindi h è un isomorfismo di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{A}^*$.