

Presentazione. -

Lo scopo di questa esposizione è essenzialmente didattico: gli argomenti sono quelli trattati usualmente nei corsi di Meccanica Analitica. La trattazione però non è standard per vari motivi.

Anzitutto sono stati presentati certi preliminari matematici che sono essenziali per lo studio della Meccanica Analitica, ma che sono di solito sconosciuti alla maggior parte di coloro che affrontano per la prima volta questa disciplina: tali argomenti non sono però forniti come pure premesse. Si è cercato invece di mettere in evidenza il fatto che essi sono spesso facce importanti della Meccanica Analitica.

Questo è uno dei motivi per i quali la prima parte, di premesse, è più estesa della seconda: per es. vari argomenti che sono trattati di solito come argomenti di Meccanica Analitica, vengono qui esposti nell'ambito delle equazioni differenziali in generale.

In secondo luogo sono stati inseriti argomenti per così dire complementari (ma non per questo meno importanti) rispetto a quelli usualmente trattati, lasciando invece fuori vari argomenti importanti che si trovano facilmente nella letteratura.

Infine alcuni argomenti sono trattati in maniera del tutto diversa da quella usuale.

L'esposizione in vari punti non cura molto il rigore: in particolare l'ultimo capitolo ha un carattere puramente descrittivo e mira soltanto a fornire qualche idea fondamentale sull'argomento che tratta.

Per concludere è doveroso dire che il capitolo II è una libera riesposizione (con poche aggiunte essenziali per la Meccanica Analitica) di parte del Cap. VI di [4] (v. bibliografia).

Equazioni a derivate parziali del I ordine.

1. Inviluppi.

Si consideri la famiglia ad un parametro di curve

$$(1.1) \quad f(xy; \lambda) = 0$$

dove f è una funzione di classe opportuna nei suoi argomenti, incluso il parametro λ .

Ad ogni valore di λ corrisponde una curva della famiglia. Sia λ_0 un valore fissato di λ e si consideri, oltre alla curva

$$(1.2) \quad f(xy; \lambda_0) = 0$$

la curva

$$(1.3) \quad f(x, y; \lambda_0 + d\lambda) = 0$$

Per determinare i punti di intersezione di (2) e (3) si scriva quest'ultima nella forma:

$$(1.3'). \quad f(xy; \lambda_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} d\lambda + O(\lambda^2) = 0$$

I punti della curva (3) appartenenti anche alla curva (2), soddisfano quindi la relazione:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} + O(\lambda) = 0$$

Se, quando $d\lambda \rightarrow 0$, i punti intersezione tendono a posizioni limite, queste sono fornite dal sistema

$$(1.4) \quad \begin{cases} f(xy; \lambda_0) = 0 \\ \left. \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} = 0 \end{cases}$$

Al variare del valore λ_0 del parametro, i punti individuati dal sistema (4) in generale variano: se essi appartengono ad una curva Γ ,

tale curva è detta l'inviluppo della famiglia (1). Ciò accade, per es., se dal sistema (4) scritto per λ generica, si possono ricavare x e y in funzione di λ .

$$\begin{cases} x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda) \end{cases}$$

ottenendo così la curva inviluppo in forma parametrica (tale curva può consistere di diversi rami).

L'equazione cartesiana dell'inviluppo si ottiene risolvendo rispetto a λ la seconda delle (4) e sostituendo $\lambda(xy)$ nella prima

$$(1.5) \quad f[xy; \lambda(xy)] = 0 .$$

Se l'inviluppo esiste, per es. se ad ogni valore di λ_0 le (4) fanno corrispondere un ben determinato punto P_0 di coordinate $x(\lambda_0)$, $y(\lambda_0)$, la curva Γ_0 della famiglia (1), corrispondente al valore $\lambda = \lambda_0$ e l'inviluppo Γ , sono tangenti nel punto P_0 .

Infatti un sistema di parametri direttori per la normale a Γ_0 è $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})_{\lambda=\lambda_0}$ e per la normale a Γ è $(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y})_{\lambda=\lambda_0}$.

D'altra parte sulla curva Γ_0 si ha : $\frac{\partial f}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda_0} = 0$ e quindi Γ_0 e Γ

in P_0 avendo la stessa normale hanno pure la stessa tangente.

In modo analogo si può procedere nel caso di famiglie di superfici.

Sia data la famiglia

$$(1.6) \quad f(xyz; \lambda) = 0 .$$

Si supponga che la curva intersezione delle due superfici:

$$\begin{cases} f(xyz; \lambda) = 0 \\ f(xyz; \lambda+d\lambda) = 0 \end{cases}$$

quando $d\lambda \rightarrow 0$ tenda ad una posizione limite (curva caratteristica).

Al variare di λ si ottiene una superficie (la quale può consistere di diverse falde) che viene detta involuppo della famiglia ad un parametro (6). Come nel caso precedente, si trova che le equazioni della curva caratteristica sono

$$\begin{cases} f(xyz; \lambda) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

e l'equazione della superficie involuppo si ottiene, eliminando λ fra queste due equazioni, nella forma:

$$f[xyz; \lambda(xyz)] = 0 .$$

Come nel caso precedente, si riconosce che la superficie involuppo è tangente ad ogni superficie della famiglia lungo la rispettiva caratteristica.

Sia data infine una famiglia a due parametri di superfici:

$$(1.7) \quad f(xyz; \lambda, \mu) = 0 .$$

L'equazione della superficie involuppo si ottiene eliminando λ e μ fra la (7) e le equazioni:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0$$

e questa superficie è tangente ad ogni superficie della famiglia (7).

Introducendo una relazione $\mu = \phi(\lambda)$, si può estrarre dalla famiglia (7) una famiglia parziale ad un sol parametro:

$$(1.8) \quad f[xyz; \lambda, \phi(\lambda)] = 0 .$$

In corrispondenza ad ogni scelta della funzione ϕ esiste una diversa famiglia parziale e questa possiede un involuppo la cui equazione si ottiene eliminando λ fra la (8) e la equazione

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{d\mu}{d\lambda} = 0$$

(in questo caso non è $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$).

La estensione delle considerazioni precedenti a famiglie di varietà nello spazio a n dimensioni ($n > 3$) è immediata.

2. Equazioni a derivate parziali del I° ordine: teoria di Cauchy.

Per motivi di evidenza geometrica si esporrà, in maniera d'altra parte molto succinta, la teoria di Cauchy delle equazioni a derivate parziali del primo ordine nel caso di due variabili indipendenti.

Sia data in R^5 una varietà V_4 a quattro dimensioni:

$$(2.1) \quad F(x, y, u, p, q) = 0.$$

Scegliendo u, p, q come funzioni di x e y tali che sussista ancora la (1), queste tre funzioni determinano parametricamente nella varietà V_4 una varietà V_2 . Si supponga che $u(x, y)$ sia di classe C^1 e $p(x, y)$ e $q(x, y)$ siano di classe C^0 . Se sussiste la relazione

$$du(x, y) = p(x, y)dx + q(x, y)dy$$

cioè se

$$p(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x; \quad q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv u_y$$

la funzione $u(x, y)$ è detta una soluzione della equazione a derivate parziali del primo ordine.

$$(2.2) \quad F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Geometricamente la (2) può essere interpretata nel modo seguente: fissato un punto $P_0(x_0, y_0, u_0)$ e R^3 la (2) esprime una relazione fra i parametri direttori p_0, q_0 della normale in P_0 alla superficie $u = u(x, y)$ soluzione della (2) (superficie integrale). In ogni punto P_0 nel dominio di definizione della (2), questa rappresenta una relazione ad un parametro fra tali parametri direttori della normale: facendo va

riare ad es., p , si ottiene q dalla (2). Ciò mostra che esistono in P_0 infiniti elementi di superficie, che soddisfano la (2) e cioè tutti quelli le cui normali soddisfano tale equazione. Queste normali individuano altrettanti piani, ad esse normali e cioè tangenti alle varie superfici menzionate: si tratta dei piani tangenti alle possibili soluzioni della (2) passanti per P_0 . Questi piani passano tutti per P_0 e, in generale, dipendendo come si è detto, da un solo parametro, individuano un cono, il cono di Monge in P_0 . Così la (2) ad ogni punto associa un cono elementare (si tratta, come sempre, di considerazioni locali) come involuppo dei suoi piani tangenti.

Volendo determinare le generatrici del cono di Monge in P_0 , si osservi che una generatrice è contenuta in un piano tangente ad una possibile superficie integrale. Sia

$$(2.3) \quad u - u_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0)$$

l'equazione di un tale piano, dove ovviamente

$$(2.4) \quad F(x_0, y_0, u_0, p, q) = 0 \quad .$$

Scegliendo (se ciò è possibile) come si è accennato prima, p come parametro dell'insieme dei piani in P_0 , si ricava da (4) $q = q(p)$. Volendo procedere in maniera più simmetrica, si ponga

$$(2.5) \quad p = p(\lambda) \quad , \quad q = q(\lambda)$$

adottando un conveniente parametro. Naturalmente le (5) soddisfano alle (4). Due piani corrispondenti a valori prossimi di λ hanno equazioni

$$(2.6) \quad \begin{cases} u - u_0 = p(\lambda)(x - x_0) + q(\lambda)(y - y_0) \\ u - u_0 = p(\lambda + d\lambda)(x - x_0) + q(\lambda + d\lambda)(y - y_0) \end{cases} .$$

Le (6) sono le equazioni della retta intersezione dei detti piani

per P_0 . Si scrivano tali equazioni nella forma

$$(2.6') \quad \begin{cases} u-u_0 = p(\lambda)(x-x_0) + q(\lambda)(y-y_0) \\ u-u_0 = p(\lambda)(x-x_0) + q(\lambda)(y-y_0) + \\ \quad + p'(\lambda)d\lambda(x-x_0) + q'(\lambda)d\lambda(y-y_0) + O^2(d\lambda) . \end{cases}$$

Quando, nella equazione del secondo piano, x y u appartengono alla retta intersezione, la seconda equazione, in virtù della prima si riduce a:

$$p'(\lambda)(x-x_0) + q'(\lambda)(y-y_0) + O(d\lambda^2) = 0 .$$

Al tendere di $d\lambda$ a zero la retta intersezione tende ad una posizione limite, che è una generatrice del cono di Monge. Le generatrici hanno quindi equazioni:

$$(2.7) \quad \begin{cases} u-u_0 = p(\lambda)(x-x_0) + q(\lambda)(y-y_0) \\ 0 = p'(\lambda)(x-x_0) + q'(\lambda)(y-y_0) \end{cases}$$

Le (7) si possono scrivere anche nella forma

$$(2.8) \quad \begin{cases} \frac{du}{ds} = p(\lambda) \frac{dx}{ds} + q(\lambda) \frac{dy}{ds} \\ 0 = p'(\lambda) \frac{dx}{ds} + q'(\lambda) \frac{dy}{ds} \end{cases}$$

La prima delle (8) esprime l'ortogonalità dei vettori $(p(\lambda), q(\lambda), -1)$ $(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dy}{ds})$, cioè la ortogonalità fra la normale al piano tangente e la generatrice presa. Ovviamente questa relazione non basta per individuare la generatrice, e quindi è necessario assegnare un secondo piano (che nelle (2.7) è parallelo all'asse u).

Derivando la (4) rispetto a λ si ha

$$(2.9) \quad F_p p'(\lambda) + F_q q'(\lambda) = 0$$

Il sistema costituito dalla (9) e dalla seconda delle (8) è omogeneo e ammette autosoluzioni se e solo se:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ F_p & F_q \end{vmatrix} = 0$$

cioè se

$$\frac{dx}{ds} = KF_p \quad ; \quad \frac{dy}{ds} = KF_q$$

Allora la prima delle (8) si scrive

$$\frac{du}{ds} = K(pF_p + qF_q)$$

Introducendo il nuovo parametro

$$s'(s) = \int_0^s K(\xi) d\xi$$

si possono scrivere le ultime tre equazioni nella forma

$$(2.10) \quad \frac{dx}{ds} = F_p \quad ; \quad \frac{dy}{ds} = F_q \quad ; \quad \frac{du}{ds} = pF_p + qF_q$$

e queste sono le equazioni di una famiglia di curve, (curve focali o di Monge) quando siano dati i secondi membri. Ad ogni punto della curva $x(s), y(s), z(s)$ è associato un elemento di piano di normale $p(s), q(s), -1$. In base alle (10) la normale $p, q, -1$ a questo elemento di piano è

ortogonale al vettore $\frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} \frac{du}{ds}$ (che è tangente alla curva) e quindi

l'elemento di curva dx, dy, du giace nell'elemento di piano. L'insieme costituito da una curva con gli elementi di piano in tutti i suoi punti costituisce una striscia.

Il sistema delle quattro equazioni (1) e (10) nelle cinque funzioni incognite x, y, u, p, q , è indeterminato. Ogni sua soluzione è detta striscia focale⁽¹⁾. Le strisce focali appartenenti a superfici integrali della (2) sono dette strisce caratteristiche. Ogni superficie integrale è tangente in ogni suo punto al cono di Monge e quindi contiene una striscia caratteristica. Perciò ogni superficie integrale contiene strisce focali.

Se si impone ad una curva focale di appartenere ad una superficie integrale, si perviene a due nuove equazioni.

Si supponga assegnata una superficie integrale $u = u(xy)$. Poiché i membri destri delle (10) sono noti, le prime due di tali equazioni definiscono nel piano xy una famiglia ad un parametro di curve. Se da ogni punto di una di queste curve si conduce la perpendicolare al piano xy fino ad incontrare la superficie integrale data, si ottiene, su questa, una curva. Le prime due delle (10) individuano quindi sulla superficie integrale data, una famiglia ad un parametro di curve e su questa, essendo $u_x = p, u_y = q$ perché u è soluzione di (2), si ha

$$\frac{du}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_y \frac{dy}{ds} = F_p p + F_q q$$

cioè è soddisfatta la terza delle (10). Quindi le curve così generate sono curve focali e generano la superficie integrale.

Dalla (1) si hanno le relazioni:

$$\begin{cases} F_x + F_u p + F_p p_x + F_q q_x = 0 \\ F_y + F_u q + F_p p_y + F_q q_y = 0 \end{cases}$$

(1) Per ogni scelta delle funzioni p e q il sistema (10) (che è autonomo) ha ∞^2 soluzioni.

che valgono identicamente sulla superficie.

Essendo poi $p_y = q_x$, le precedenti si scrivono:

$$(2.11) \quad \begin{cases} F_x + F_u p + F_p p_x + F_q p_y = 0 \\ F_y + F_u q + F_p q_x + F_q q_y = 0 \end{cases}$$

Se allora, sempre mantenendosi sulla superficie, ci si sposta lungo una curva focale, si possono sostituire le quantità F_p e F_q con $\frac{dx}{ds}$ e $\frac{dy}{ds}$ risp., sicché gli ultimi due termini nella prima delle (11) diventano:

$$F_p p_x + F_q p_y = \frac{dx}{ds} p_x + \frac{dy}{ds} p_y = \frac{dp}{ds}$$

e analogamente

$$F_p q_x + F_q q_y = \frac{dq}{ds}$$

In definitiva sulle curve focali giacenti su una superficie integrata sussistono le cinque equazioni differenziali ordinarie:

$$(2.12) \quad \left. \begin{cases} \frac{dx}{ds} = F_p; \frac{dy}{ds} = F_q; \frac{du}{ds} = pF_p + qF_q \\ \frac{dp}{ds} = -(F_x + pF_u); \frac{dq}{ds} = -(F_y + qF_u) \end{cases} \right\} \begin{array}{l} \text{curve} \\ \text{focali} \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{curve focali appartenen} \\ \text{ti a superfici integrali} \\ \text{(curve caratteristiche)} \end{array} \right\}$$

Le ultime due sono le (11).

Il sistema (12) è detto sistema caratteristico della (1). Per questo sistema differenziale ordinario la funzione F è un integrale primo. Infatti, usando le (12), si ha:

$$\frac{dF}{ds} = F_x \frac{dx}{ds} + F_y \frac{dy}{ds} + F_u \frac{du}{ds} + F_p \frac{dp}{ds} + F_q \frac{dq}{ds} = 0$$

e quindi ogni superficie $F = \text{cost}$ è costituita da soluzioni di (12).

Si inverta ora il procedimento seguito.

Anziché partire da una superficie integrale, si parta dal sistema (12): tale sistema è autonomo e definisce una famiglia di ∞^4 curve nello spazio x, y, u, p, q . Allora dalla famiglia a quattro parametri di soluzioni di (12) si estragga una famiglia a tre parametri imponendo la condizione che lungo queste soluzioni la F sia nulla: ogni soluzione del sistema caratteristico che soddisfi la $F = 0$ è detta striscia caratteristica: una curva spaziale $x(s), y(s), u(s)$ che porti tale striscia è detta curva caratteristica.

Sussistono le due proposizioni:

- 1) Su ogni superficie integrale esiste una famiglia ad un parametro di curve caratteristiche e di corrispondenti strisce caratteristiche.
- 2) Se una striscia caratteristica ha un elemento $xyupq$ comune con una superficie integrale essa appartiene tutta alla superficie integrale.

L'ultima affermazione è conseguenza sia del fatto che una superficie integrale è costituita di strisce caratteristiche sia della unicità della soluzione del sistema (12): se la striscia avente un elemento in comune con la superficie non giacesse su questa, dall'elemento comune partirebbe, oltre alla striscia data, anche quella appartenente alla superficie.

Per completezza conviene dare un cenno sul problema di Cauchy che consiste nel ricercare le (eventuali) superfici integrali della (1) che contengono una curva assegnata Γ .

Se la curva Γ non è una caratteristica, la soluzione passante per essa è la superficie luogo ad un parametro delle strisce caratteristiche passanti per i punti di Γ . Se la curva Γ è una caratteristica, per essa passano infinite soluzioni della equazione (1).

Per i particolari si rimanda ai trattati speciali ([1], [2], [3]).

Risulta evidente che la conoscenza della soluzione generale del sistema caratteristico (12) permette di costruire le soluzioni della (1).

Sussiste pure la proposizione inversa: la conoscenza di un integrale completo della (1) permette di risalire alla soluzione generale del sistema (12) (v.nn. 3 e 5).

3. Tipi di integrali delle equazioni del primo ordine.

Una soluzione della (1) dipendente da due parametri

$$(3.1) \quad u = \Psi(x, y, a, b)$$

si dice integrale completo della (1) se la matrice

$$(3.2) \quad \begin{pmatrix} \Psi_x & \Psi_{xa} & \Psi_{xb} \\ \Psi_y & \Psi_{ya} & \Psi_b \end{pmatrix}$$

ha rango 2. Sotto questa ipotesi, quindi, u è detto integrale completo se la (1) soddisfa la (2.1) identicamente per ogni valore di a e b . Poiché i parametri si possono far variare arbitrariamente, si può scegliere in particolare $b = \phi(a)$ dove ϕ è una funzione di classe opportuna. La (1) si può scrivere allora

$$(3.3) \quad u = \Psi(x, y, a, \phi(a))$$

L'inviluppo di questa famiglia ad un parametro di superfici si ottiene facendo sistema fra la (3) e la

$$\Psi_a + \Psi_b \phi'_a = 0 \quad .$$

Se si può ricavare a da questa equazione, si ha una funzione

$$a = a(xy)$$

la quale sostituita nella (3), fornisce una soluzione della (2.1)

$$(3.4) \quad u = u(xy)$$

che è l'inviluppo della famiglia (3). Poiché la (4) dipende dalla scelta della funzione ϕ , si ha in tal modo una soluzione dipendente da una funzione arbitraria: una soluzione di questo tipo si dice integrale generale della (1).

Se la famiglia a due parametri (1) possiede essa stessa un inviluppo, anche questo è soluzione della (2.1) e, come nel caso delle equazioni differenziali ordinarie, è detto integrale singolare. Un integrale singolare si ricava quindi con procedimenti di eliminazione dal sistema

$$(3.5) \quad \Psi(xyab) - u = 0, \quad \Psi_a = 0, \quad \Psi_b = 0.$$

L'esistenza di un integrale singolare è una proprietà della equazione (2.1) e la sua determinazione non dipende dalla conoscenza di un integrale completo. Infatti sostituendo la (3.1) nella (2.1) si ha:

$$F(xy, \Psi, \Psi_x, \Psi_y) = 0$$

identicamente in a e b (perché Ψ è integrale completo).

Derivando rispetto ad a e b si ha

$$F_u \Psi_a + F_p \Psi_{xa} + F_q \Psi_{ya} = 0$$

$$F_u \Psi_b + F_p \Psi_{xb} + F_q \Psi_{yb} = 0$$

Se Ψ è integrale completo si possono usare le (3.5) e si ha:

$$F_p \Psi_{xa} + F_q \Psi_{ya} = 0$$

$$F_p \Psi_{xb} + F_q \Psi_{yb} = 0$$

Questo sistema, nell'ipotesi

$$\Psi_{xa} \Psi_{yb} - \Psi_{ya} \Psi_{xb} \neq 0,$$

non ha autosoluzioni e quindi è

$$(3.6) \quad F_p = F_q = 0$$

Esiste una connessione stretta fra le curve caratteristiche e gli inviluppi di soluzioni della (2.1). Formando l'inviluppo della famiglia ad un parametro (3)

$$(3.7) \quad \begin{cases} u - \psi(x, y, a, \phi(a)) = 0 \\ \psi_a + \psi_b \phi' = 0 \end{cases}$$

si ottiene la curva di contatto fra l'inviluppo e la superficie della famiglia corrispondente al valore a del parametro. Poiché la funzione ϕ si può scegliere in modo che $\phi(a)$ e $\phi'(a)$ siano valori prefissati, le (7) rappresentano una famiglia a tre parametri di curve. Queste curve sono le caratteristiche della (1). Infatti lungo queste curve sono tangenti due superfici integrali e cioè la (3) e la superficie inviluppo: questo è possibile solo lungo una caratteristica. Ciò fornisce il risultato inverso del precedente. Si ha quindi la proposizione:

Noto un integrale completo della (2.1) si possono ricavare da questo le caratteristiche e cioè la soluzione generale del sistema (2.12) (v.n° precedente).

In questo senso l'equazione a derivate parziali del I ordine e il sistema caratteristico sono equivalenti.

La dimostrazione esplicita della proposizione enunciata verrà data a proposito della forma di Hamilton-Jacobi dell'equazione a derivate parziali nel n° 5 .

4. Caso di n variabili indipendenti. Equazione lineare omogenea.

Estendendo in maniera diretta la discussione del n° 2 si riconosce che all'equazione del primo ordine in n variabili

$$(4.1) \quad F(x^1 \dots x^n, u, p_1 \dots p_n) = 0$$

è associato il sistema caratteristico

$$\frac{dx^i}{ds} = F_{p_i}; \quad \frac{du}{ds} = \sum p_i F_{p_i}; \quad \frac{dp_i}{ds} = -(F_{x^i} + F_u p_i)$$

Le curve e le strisce focali, le curve e le strisce caratteristiche si definiscono in modo ovvio.

Come nel caso tridimensionale si dimostra che una superficie integrale è luogo di curve caratteristiche ed è costituita da strisce caratteristiche. Inoltre se una striscia caratteristica ha un elemento $x^1 \dots x^n, u, p_1 \dots p_n$ in comune con una superficie integrale, essa appartiene a tale superficie.

Il problema di Cauchy è anche analogo al problema del caso tridimensionale e consiste nel ricercare le eventuali soluzioni passanti per una data varietà $(n-1)$ dimensionale Γ .

Si hanno i risultati: se la varietà Γ non è luogo di strisce caratteristiche, il problema di Cauchy ammette una ed una sola soluzione. Se la varietà Γ è luogo di strisce caratteristiche (varietà caratteristica) il problema ammette infinite soluzioni (v. per es. [1]).

Anche nel caso n dimensionale, quindi, la soluzione generale del sistema caratteristico permette di risalire alle soluzioni della equazione a derivate parziali. Per la proposizione inversa vedere i n.n. successivi. Infine un integrale completo è una soluzione della (1) contenente un numero di costanti arbitrarie uguale al numero delle variabili indipendenti.

In particolare se l'equazione (1) è lineare omogenea

$$(4.2) \quad a^i(x^1 \dots x^n) p_i = 0$$

le equazioni caratteristiche sono:

$$(4.3) \quad \frac{dx^i}{ds} = F_{p_i} = a^i$$

$$(4.3') \quad \frac{du}{ds} = \sum p_i a^i = 0$$

$$(4.3'') \quad \frac{dp_i}{ds} = -\sum p_k \frac{\partial a^k}{\partial x^i} = \sum a^k \frac{\partial p_k}{\partial x^i} = \sum \frac{\partial p_k}{\partial x^i} \frac{dx^k}{ds} = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^i} \frac{dx^k}{ds} = \frac{dp_i}{ds}$$

Come si vede le (4.3'') sono conseguenza della (2) e delle (3); la soluzione u della equazione a derivate parziali nel caso lineare omogeneo è poi integrale primo del sistema (3) (che è detto ora esso stesso sistema caratteristico).

Viceversa se $\phi(x^1 \dots x^n)$ è integrale primo del sistema (3), sostituendo in tale integrale le soluzioni del sistema e derivando rispetto ad s si trova

$$(4.4) \quad 0 = \frac{d\phi}{ds} = \sum \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \frac{dx^k}{ds} = \sum \frac{\partial \phi}{\partial x^k} a^k$$

Questa relazione è vera sulle curve integrali del sistema (3), cioè è vera quando le x sono variabili, non indipendenti, bensì vincolate dalle equazioni di una curva soluzione delle (3). Tuttavia la (4) sussiste identicamente nel campo di definizione del sistema (3), perché per ogni punto di tale campo passa una curva integrale del sistema (v. l'identica discussione nel CAP. V n° 1). Poiché ϕ soddisfa identicamente la (4) essa è soluzione della (2).

Gli integrali primi indipendenti del sistema (3) sono $n-1$: ogni integrale primo del sistema è funzione di $n-1$ integrali primi indipendenti e viceversa, come è ovvio, ogni funzione di integrali primi è un integrale primo.

Nel caso della equazione lineare omogenea (2) si può dare quindi espli

citamente la soluzione generale, sotto forma della più generale funzione (di classe C^1) di $n-1$ integrali primi del sistema caratteristico associato (3).

Per maggiori particolari si rimanda a [1].

Il significato geometrico della (2) è evidente. Poiché il primo membro è il prodotto scalare del vettore $(a^1 \dots a^n)$ e del vettore $(\frac{\partial u}{\partial x^1} \dots \frac{\partial u}{\partial x^n})$,

la (2) esprime che ogni superficie integrale è tangente in ogni punto al vettore $(a^1 \dots a^n)$ in quel punto.

Il cono di Monge come è ovvio, degenera nel suo asse $(a^1 \dots a^n)$, (asse di Monge).

5. Forma di Hamilton-Jacobi dell'equazione del primo ordine.

L'equazione generale

$$(5.1) \quad F(x^1 \dots x^n, u, p_1, p_n) = 0$$

può essere ridotta ad una forma che ha grande importanza in dinamica.

Si ponga $u = x^{n+1}$ e sia

$$\phi(x^1 \dots x^{n+1}) = c$$

una famiglia di soluzioni della (1), in forma implicita: risulta ovviamente $\frac{\partial \phi}{\partial x^{n+1}} \neq 0$. Poiché si ha inoltre:

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{n+1}}{\partial x^i} = - \frac{\partial \phi / \partial x^i}{\partial \phi / \partial x^{n+1}}$$

posto $\bar{p}_k = \frac{\partial \phi}{\partial x^k}$ ($k = 1 \dots n$) $x^{n+1} = t$, $\bar{p}_{n+1} = p_t$,

si può scrivere la (1) nella forma:

$$(5.1') \quad F(x^1 \dots x^n, \dots, x^{n+1}, \frac{\bar{p}_1}{p_t}, \dots, \frac{\bar{p}_n}{p_t}) = 0$$

Nell'ipotesi che sia $\frac{\partial F}{\partial p_t} \neq 0^{(1)}$, risolvendo la (1') rispetto a p_t e riscrivendo p in luogo di \bar{p} , si ha infine la (1) nella forma

$$(5.2) \quad p_{t^*} + H(x^1 \dots x^n p_1 \dots p_n) = 0$$

detta forma di Hamilton-Jacobi.

Si indichi con $\mathfrak{F}(x_1 \dots x_n t p_i p_n p_t)$ il primo membro della (2) e si osservi che l'equazione caratteristica relativa alla invariabile t è:

$$\frac{dt}{ds} = \mathfrak{F}_{p_t} = 1$$

Per scrivere il sistema caratteristico della (2) conviene quindi assumere come parametro la t .

Il sistema è allora:

$$(5.3) \quad \frac{dx^i}{dt} = \mathfrak{F}_{p_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -(\mathfrak{F}_{x^i} + \mathfrak{F}_{\phi} p_i) = -\frac{\partial H}{\partial x^i}$$

(i = 1...n)

$$(5.4) \quad \frac{d\phi}{dt} = \sum_{k=1}^{n+1} p_k \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p_k} = \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} + p_t \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p_t} = p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H$$

$$(5.5) \quad \frac{dp_t}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

Come si vedrà nella PARTE II, le (3) sono le equazioni canoniche di un sistema canonico di hamiltoniana H .

La (4) mostra che ϕ è l'azione e la (5) è diretta conseguenza della

 (1) Se risulta $\frac{\partial F}{\partial p_t} = 0$ si risolve la (5.1') rispetto ad un'altra delle p .

(2).

Si può osservare che se si risolve il sistema (3), che è un sistema non autonomo nelle incognite $x_1 \dots x_n, p_1, p_n$ si ottiene direttamente per quadrature la soluzione del sistema (4) (5). Infatti le soluzioni $x^i(t)p_j(t)$ ($i = 1 \dots n$) del sistema (3), poste nel sistema (4) (5), riducono i secondi membri di questa a funzioni della sola t (e dei parametri iniziali): di conseguenza queste due ultime equazioni si integrano per quadrature. Ne segue che in sostanza interessa risolvere il sistema canonico (3).

In conclusione: ogni equazione del primo ordine può essere posta nella forma di Hamilton-Jacobi: il suo sistema caratteristico assume allora forma canonica.

Si è visto nel n° 2 che la risoluzione del sistema caratteristico fornisce le soluzioni dell'equazione del primo ordine ad esso associato. Verrà ora dimostrato che viceversa, la conoscenza di una soluzione completa di una equazione del primo ordine fornisce la soluzione generale del sistema caratteristico associato.

La dimostrazione verrà data partendo dalla equazione nella forma di Hamilton-Jacobi. Ciò non lede la generalità, dato che ogni equazione del primo ordine può essere ridotta a tale forma. D'altra parte la dimostrazione in questo caso è direttamente utile in meccanica e fornisce il teorema che in dinamica va sotto il nome di teorema di Hamilton-Jacobi.

Sia

$$(5.6) \quad u = \phi(x^1 \dots x^n, t, a_1 \dots a_n) + a_{n+1}$$

un integrale completo della (2). Tale integrale contiene un numero di costanti arbitrarie pari al numero delle variabili indipendenti (n° 4).

Nella (6) la funzione incognita compare in (2) solo per il tramite

delle sue derivate: ne segue che una delle costanti arbitrarie è additiva.

Poiché u è un integrale completo sussiste la (3.2). Si assuma esplicitamente che sia:

$$(5.7) \quad \left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial a_i} \right\| \neq 0$$

Per risalire dall'integrale completo u alla soluzione del sistema (3) si costruisca una famiglia ad n parametri di soluzione estratta dalla (6): costruendo poi l'inviluppo di questa famiglia si ottiene una ipersuperficie che è ancora una soluzione della (2) e che tocca ogni elemento della famiglia lungo una curva: tale curva è una caratteristica della (2), cioè una soluzione del sistema (3). In ciò consiste il teorema di Hamilton-Jacobi.

La costruzione della famiglia ad n parametri si può effettuare scegliendo gli $n+1$ parametri $a_1 \dots a_{n+1}$ che figurano nella (6) come funzioni di n parametri $r_1 \dots r_n$:

$$a_i = \omega_i(r_1 \dots r_n) \equiv \omega_i(r) \quad i = 1 \dots n+1 .$$

Introducendo questa nella (6) si ha

$$(5.6') \quad -u + \phi(x^1 \dots x^n + \dots a_1(r) \dots a_n(r)) + a_{n+1}(r) \equiv \\ \equiv \phi(x^1 \dots x^{n+1} \dots a_1 \dots a_{n+1}) = 0$$

Per determinare l'inviluppo ad n parametri occorre far sistema fra la (6') e le sue derivate rispetto alle r :

$$(5.8) \quad \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial \phi}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial r_r} = 0 \quad (r = 1 \dots n)$$

Ricavando le r dalle (8) e sostituendole nella (6') si ottiene la superficie inviluppo.

Questa superficie tocca la generica superficie della famiglia (6') lungo una curva. Ogni curva di contatto corrisponde, in base alla teoria degli involucri, ad una n^{pla} di valori fissi delle r.

Perciò anche le a_i e le $\frac{\partial \omega_i}{\partial r_r}$ sono costanti lungo la generica curva di contatto.

Il sistema (8) riguardato come un sistema algebrico di n equazioni nelle n+1 incognite $\frac{\partial \phi}{\partial a_k}$, ha matrice

$$(5.9) \quad \frac{\partial(\omega_1 \dots \omega_{n+1})}{\partial(r_1 \dots r_n)}$$

di rango n. Perciò le incognite sono proporzionali ai minori della matrice stessa:

$$(5.10) \quad \frac{\partial \phi}{\partial a_k} = \lambda \bar{b}_k \quad (i = 1 \dots n)$$

$$(5.10') \quad \frac{\partial \phi}{\partial a_{n+1}} = \lambda \bar{b}_{n+1}$$

dove $\bar{b}_s (s = 1 \dots n+1)$ è il minore di (9) ottenuto eliminando la linea delle derivate di ω rispetto a r_s . In virtù della costanza delle derivate di ω sulle curve di contatto, si ha:

$$(5.11) \quad \bar{b}_i = \text{cost} \quad (i = 1 \dots n+1)$$

Inoltre è $\frac{\partial \phi}{\partial a_{n+1}} = 1$ e quindi la (10') dà:

$$\lambda = \frac{1}{\bar{b}_{n+1}}$$

Perciò sulle curve di contatto è costante anche λ e, per le (10),(11) risulta infine

$$(5.12) \quad \frac{\partial \phi}{\partial a_i} = \frac{\bar{b}_i}{\bar{b}_{n+1}} \equiv b_i = \text{cost} \quad (i = 1 \dots n+1)$$

La (7) si può scrivere:

$$(5.13) \quad \left| \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial a_j} \right| \right| \neq 0$$

Allora il sistema (12) si può invertire rispetto alle x :

$$(5.14) \quad x^i = x^i(x_{n+1} a_1 \dots a_n b_1 \dots b_n)$$

Le funzioni

$$(5.15) \quad p_j = \frac{\partial \phi}{\partial x^j}$$

calcolate sulle (14) forniscono striscie caratteristiche del sistema (3). Per riconoscerlo basta dimostrare che le (14) e le (15) sono le soluzioni del sistema canonico

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad ; \quad \frac{dp_j}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x^j}$$

Convieni partire dalle soluzioni in forma implicita (12). Derivando rispetto a t si ha:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial a_j \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial a_j \partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial t} = 0$$

Derivando la (2) rispetto a a_j , dopo avervi introdotto la soluzione (6) si ha:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial a_j} + \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial a_j} = 0$$

Gli ultimi due sistemi sono validi in ogni punto del campo di definizione della (2). Sottraendoli a m , a m , si ha

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial a_j \partial x^k} \left(\frac{dx^k}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) = 0$$

In virtù della (4) questo sistema non ammette autosoluzioni e quindi e

$$(5.16) \quad \frac{dx^k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k} .$$

Derivando le (15) rispetto a t si ha :

$$(5.17) \quad \frac{\partial p_k}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial t} .$$

Derivando ancora la (2) rispetto a x^k dopo avervi sostituito la (6') si ha

$$0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial t} + \frac{\partial H}{\partial x^k} + \frac{\partial H}{\partial p_r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^r \partial x^k}$$

ossia usando le (16)

$$-\frac{\partial H}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial t} + \frac{\partial x^r}{\partial t} \frac{d^2 \phi}{\partial x^r \partial x^k} .$$

Confrontando con le (17) si ha infine

$$(5.17') \quad \frac{dp_k}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x^k} .$$

Le (14) e le (15) sono dunque soluzioni del sistema canonico: esse contengono $2n$ costanti arbitrarie e forniscono pertanto la soluzione generale di tale sistema.

Si riconosce quindi che:

- 1) La conoscenza dell'integrale completo (6) fornisce la soluzione generale del sistema canonico. Per ottenere tale soluzione basta invertire le (12) rispetto alle x e introdurre queste ultime nelle (15).
- 2) L'inviluppo fornito dalle (6) con l'introduzione delle $a_i = \omega_i(r)$ è una soluzione della (2) perché è costituita da curve caratteristiche.

La discussione precedente giustifica il metodo che segue in dinamica per costruire la soluzione generale del sistema (3) a partire da un integrale completo ϕ della (2) (v. CAP. IV n° 5). Per costruire tale so-

luzione si uguagliano a delle costanti b_j le derivate di ϕ rispetto alle costanti a (eq. (12)) e poi da queste uguaglianze e dalle (15), con procedimento di inversione e di eliminazione si perviene alla soluzione generale del sistema (3).

La discussione fatta in questo n°o, mette in luce il significato geometrico di tale procedimento.

6. Sistemi completi di equazioni del primo ordine.

Nei capitoli successivi avranno importanza fondamentale certi sistemi di equazioni a derivate parziali del primo ordine, lineari, omogenee, in una sola funzione incognita, ossia sistemi del tipo:

$$(6.1) \quad X_k f \equiv \sum_{i=1}^n a_{ik}(x_1 \dots x_n) \partial_i f = 0 \quad (k = 1 \dots s; s \leq n)$$

Le s equazioni del sistema saranno sempre supposte linearmente indipendenti: in altri termini si supporrà sempre che la matrice a_{ik} abbia rango s . Di conseguenza deve essere $s \leq n$.

Se $s = n$ il sistema (1), come sistema algebrico, ammette la sola soluzione $\partial_i f = 0$ ($i = 1 \dots n$) e quindi può essere solo $f = \text{cost}$. D'ora in avanti si supporrà pertanto $s < n$.

Un sistema del tipo (1) può essere risolto in vari modi, ma nelle applicazioni interessa generalmente non tanto pervenire alla forma esplicita delle (eventuali) soluzioni, quanto sapere se esistono soluzioni distinte dalla soluzione $f = \text{cost}$ e, in caso affermativo, determinare il numero di tali soluzioni. A queste domande risponde in modo conclusivo la teoria dei sistemi completi, della quale si tratteggeranno ora brevemente quegli aspetti che saranno indispensabili nel seguito.

Una soluzione del sistema (1), oltre a soddisfare le equazioni $X_i f = 0$ e $X_k f = 0$ per ogni i e k con $1 \leq i, k \leq s$, soddisfa ovviamente anche le relazioni

$$(6.2) \quad [X_j, X_k] f \equiv (X_j X_k - X_k X_j) f = 0 \quad .$$

L'operatore $[X_j, X_k]$ è detto il commutatore degli operatori lineari X_j e X_k . Un calcolo diretto mostra che il commutatore dei due operatori lineari è ancora un operatore lineare:

$$\begin{aligned} [X_j, X_k] f &= \sum_{r,i=1}^n a_{ij} \partial_i (a_{rk} \partial_r f) - \sum_{r,i=1}^n a_{rk} \partial_r (a_{ij} \partial_i f) = \\ (6.3) \quad &= \sum_{r,i=1}^n a_{ij} (\partial_i a_{rk}) \partial_r f - \sum_{r,i=1}^n a_{rk} (\partial_r a_{ij}) \partial_i f = \\ &= \sum_{h=1}^n [(X_j a_{hk}) - (X_k a_{hj})] \partial_h f \quad . \end{aligned}$$

Si considerino le equazioni (2) relative a tutte le coppie di indici j e k .

Se risulta per una coppia di indici

$$(6.4) \quad [X_j, X_k] = \sum_{\ell=1}^s c_{j,k}^{\ell} X_{\ell}$$

cioè se il commutatore di X_j e X_k è combinazione lineare delle $X_1 \dots X_s$, l'equazione (2), per quella coppia di indici, non è indipendente dalle (1).

Ci si limiti allora a quelle coppie di indici per le quali le (4) non sono soddisfatte. Per ognuna di tali coppie la corrispondente equazione (2) non è combinazione lineare delle (1), ma al tempo stesso deve essere soddisfatta.

Aggiungendo al sistema (1) tutte le equazioni di tipo (2) per le quali i commutatori non soddisfano alla (4), si ottiene un nuovo sistema differenziale di $r_1 + s$ equazioni che ha le stesse soluzioni del sistema (1) (l'aggiunta di equazioni ad un sistema certamente non aumenta il numero delle soluzioni; nel caso presente il numero delle soluzioni resta inalterato quando il sistema (1) viene ampliato mediante l'aggiunta di equazioni (2)).

Ripetendo per il nuovo sistema le operazioni eseguite per il sistema (1) e procedendo nello stesso modo per ogni nuovo sistema ottenuto, si perviene, dopo un numero finito di passi, o ad un sistema di n equazioni indipendenti, nel qual caso l'unica soluzione è $f = \text{cost}$, o ad un sistema di $r < n$ equazioni indipendenti.

$$(6.5) \quad X_i f = 0 \quad (i = 1 \dots r < n)$$

tali che i commutatori $[X_i, X_k]$ ($i, k = 1 \dots r$) sono combinazioni lineari di $X_1 \dots X_r$. Un sistema di questo genere è detto completo (di ordine r): nel caso in cui i commutatori $[X_i, X_k]$ siano tutti nulli, il sistema completo è detto sistema di Jacobi. Per risolvere sistemi di tipo (1) ci si riconduce sempre a sistemi completi.

Per i sistemi completi sussistono le due proposizioni, di cui si omette la dimostrazione (v. per es. [2])

- 1) Ogni trasformazione invertibile di coordinate trasforma un sistema completo in un sistema completo.
- 2) Formando r combinazioni lineari indipendenti con le equazioni di un sistema completo di ordine r , si ottiene ancora un sistema completo (che viene detto equivalente a quello di partenza).

E' conveniente ridurre un generico sistema completo ad un sistema completo avente la forma di Jacobi.

Per vedere che ciò è possibile si parta dal sistema completo:

$$(6.6) \quad \sum_{i=1}^n a_{ik} a_i f = 0 \quad k = 1 \dots r$$

e si supponga che sia di ordine r il minore per il quale $1 \leq i, k \leq r$. Risolvendo il sistema (6) rispetto a $a_1 f \dots a_r f$ si ha un sistema del tipo:

$$(6.6') \quad Z_i f = a_i f + \sum_{k=r+1}^n b_{ki} a_k f = 0 \quad (i = 1 \dots r)$$

Questo sistema è completo perché le equazioni che lo costituiscono sono combinazioni lineari delle equazioni (6). D'altra parte si ha per le (3)

$$\begin{aligned} (Z_j Z_k - Z_k Z_j) &= [(Z_j b_{kh}) - (Z_k b_{jh})] a_h = \\ &= \sum_{h=1}^r [(Z_j b_{kh}) - (Z_k b_{jh})] a_h + \\ &+ \sum_{h=r+1}^n [(Z_j b_{kh}) - (Z_k b_{jh})] a_h . \end{aligned}$$

Poiché per $h \leq r$ le b sono 0 o 1, la prima somma è nulla. Di conseguenza i commutatori delle Z non contengono $a_1 f \dots a_r f$. D'altra parte il sistema (6') è completo e quindi i commutatori delle Z sono del tipo $\sum_{i=1}^r \gamma^i Z_i f$ ossia del tipo $\sum_{i=1}^r \gamma^i a_i f + \sum_{i=1}^r \sum_{j=r+1}^n \gamma^i b_{ji} a_j f$.

L'assenza delle $a_1 f \dots a_r f$ implica allora che le γ^i siano tutte nulle. Si ha così

$$[Z_j Z_k] f = 0 \quad (j, k = 1 \dots r)$$

e cioè il sistema (6') è un sistema di Jacobi.

Si consideri allora, per es., la prima delle equazioni (6'): essa possiede (n. 4) $n-1$ soluzioni indipendenti: $f_i = \phi_i(x^1 \dots x^n)$ ($i=1 \dots n-1$).

Se si esegue un cambiamento di variabili che faccia passare dalle variabili $x^1 \dots x^n$ alle variabili $\phi^1 \dots \phi^{n-1} \phi^n$, (dove ϕ^n è una arbitraria funzione indipendente da $\phi^1 \dots \phi^{n-1}$) il sistema (6') si trasforma in un sistema equivalente (e quindi completo) del quale la prima equazione

è $\frac{\partial f}{\partial \phi^n} = 0$. Risolvendo le restanti equazioni rispetto alle derivate

$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \phi^{r+1}} \dots \frac{\partial \bar{f}}{\partial \phi^{n-1}}$ (\bar{f} è la trasformata di f sotto il cambiamento di

variabili $x \rightarrow \phi$) si ha infine un sistema del tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \phi^{r+i}} + \sum_{h=1}^{n-r} C_{h,r+i} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \phi^h} = 0 \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial \phi^1} = 0 \end{array} \right. \quad i = 1 \dots n-r-1$$

Le prime $r-1$ equazioni di questo sistema costituiscono un sistema di $r-1$ equazioni nelle $n-1$ variabili $\phi^1 \dots \phi^{n-1}$. Si verifica immediatamente che questo sistema parziale è di Jacobi.

Col metodo usato per il sistema (6'), il sistema parziale può essere ridotto ad un sistema di $r-2$ equazioni in $n-2$ variabili, e questo sistema è anch'esso di Jacobi. Così procedendo si perviene infine ad un'unica equazione in $n-r+1$ variabili e questa equazione ha $n-r$ soluzioni indipendenti (n.4). Poiché questa equazione è equivalente al sistema (6') si conclude che questo possiede $n-r$ soluzioni indipendenti. In definitiva:

Un sistema completo di r equazioni in n variabili indipendenti possiede $n-r$ soluzioni indipendenti.

CAPITOLO II

1. Premesse.

Sia $q^1 \dots q^r, z$, un sistema di coordinate nello spazio R^{n+1} e sia

$$(1.1) \quad Q^i(qz) \quad Z = \phi(qz)$$

una trasformazione invertibile.

Sia poi $P_0 \equiv (q_0, z_0)$ un punto di una superficie regolare S^n di equazione cartesiana

$$(1.2) \quad f(qz) = 0$$

La relazione

$$(1.3) \quad dz - p_i dq^i = 0 \quad \left(p_i = - \frac{\frac{\partial f}{\partial q^i}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \right)$$

esprime l'ortogonalità fra lo spostamento (dq, dz) tangente alla superficie e il vettore $(p_i, -1)$.

La relazione (2), scritta nella forma:

$$(1.3') \quad \frac{\partial f}{\partial q^k} dq^k + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

sotto la trasformazione (1), che porta la (2) nella

$$(2') \quad \bar{f}(QZ) = 0$$

(dove $\bar{f}(QZ) = f[q(\phi Z), z(\phi Z)]$),

diventa

$$\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial Q^r} \frac{\partial Q^r}{\partial q^k} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial q^k} \right) dq^k + \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial Q^r} \frac{\partial Q^r}{\partial z} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dz = 0$$

cioè

$$(1.4) \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial Q^r} dQ^r + \frac{\partial \bar{f}}{\partial Z} dz = 0$$

o anche, posto: $P_i = - \frac{\partial \bar{f}}{\partial Q^i} / \frac{\partial \bar{f}}{\partial Z}$.

$$(3'') \quad dZ - P_i dQ^i = 0 \quad .$$

Inoltre, se

$$g(qz) = 0$$

è l'equazione di una seconda superficie Z^n , e le S^n e Σ^n sono tangenti in P_0 , cioè se

$$P_i = \left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial q^i} \right|_{P_0} = \lambda \left. \frac{\partial g}{\partial q^i} \right|_{P_0} \equiv \lambda p'_i; \quad p = \left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \right|_{P_0} = \lambda \left. \frac{\partial g}{\partial z} \right|_{P_0} \equiv p'$$

dalle relazioni

$$P_k = \frac{\partial \bar{f}}{\partial Q^k} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial Q^k} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial Q^k} = p_i \frac{\partial q^i}{\partial Q^k} + p \frac{\partial z}{\partial Q^k}$$

e analoghe, si ha, con notazioni ovvie:

$$P_k = \lambda P'_k; \quad p = \lambda p'$$

e quindi le superfici trasformate \bar{S}^n e $\bar{\Sigma}^n$ sono pur esse tangenti fra loro.

2. Trasformazioni di contatto.

Ci si può porre un problema più generale del precedente. Sia dato in R^{n+1} un campo di vettori covarianti $p_i = p_i(qz)$ ($i = 1 \dots n$), $p = -1$.

Sia assegnata, P_0^{-1} la trasformazione, più generale, della (1).

$$(2.1) \quad \begin{cases} Q^i = \phi^i(q, z, p) & ; & P_i = \psi_i(q, z, p) \\ Z = \phi(q, z, p) & & (i = 1 \dots n) \end{cases}$$

Si vuole sapere sotto quali condizioni la relazione

$$(2.2) \quad dz - p_i dq^i = 0$$

implica necessariamente la relazione

$$(2.3') \quad dZ - P_i dQ^i = 0 .$$

In forza della (1) il primo membro della (3) è della forma:

$$(2.4) \quad dZ - P_i dQ^i = a dz + b_i dq^i + c^i dp_i$$

dove le a, b, c sono funzioni di z, q .

In virtù della (2), la (4) si può scrivere

$$dZ - P_i dQ^i = (ap_i + b_i) dq^i + c^i dp_i$$

che, stante l'indipendenza delle dq^i, dp_i , è nulla se e solo se

$$ap_i + b_i = 0 \quad c^i = 0 .$$

La (4) si riduce quindi:

$$(2.5) \quad dZ - P_i dQ^i = a(dz - p_i dq^i)$$

(sostanzialmente a è un moltiplicatore di Lagrange).

Se $p_i = \frac{\partial f}{\partial q^i}$ dove f è una funzione delle $q^1 \dots q^n$, le (2) rappresentano l'ortogonalità fra lo spostamento tangente alla superficie S di equazione $z = f(q)$ e il vettore $(p_i, -1)$.

Le p_i sono allora funzioni di q, z e sostituendo queste funzioni nelle ϕ^i, ϕ ed eliminando le q si ottiene una equazione $Z = F(Q)$. Le P_i , in virtù delle (3), sono ortogonali a questa superficie. È evidente che due superfici, tangenti nella rappresentazione qz , si mantengono tangenti nella rappresentazione QZ .

Una trasformazione (1), per la quale sussista la (5), è detta trasformazione di contatto non omogenea.

Se nello spazio R^{n+1} si trattano tutte le $n+1$ variabili simmetricamente, conviene scrivere le (1) nella forma:

$$(2.1') \quad Q^i = \phi^i(qp) ; \quad P_i = \psi_i(qp) \quad i = 1 \dots n+1$$

introducendo uno $(n+1)^{\text{mo}}$ componente $\neq -1$ del vettore covariante p . In questo caso il procedimento già seguito porta a scrivere la (5) nella forma:

$$p_i dq^i = a P_i dQ^i$$

e in questa conviene prendere $a = 1$, cambiando per es. la scala dei vettori P_i .

Una trasformazione (1') che soddisfi la relazione

$$(2.6) \quad p_i dq^i = P_i dQ^i$$

è detta trasformazione di contatto omogenea.

La trasformazione non omogenea può pure essere caratterizzata dalla (5) nella quale si divida per a , e si ponga

$$-p_i = \frac{p_i}{a} ; \quad -p_i \rightarrow \frac{p_i}{a} \quad Z = q^{n+1}$$

Con ciò si ha:

$$p_i dQ^i = -dq^{n+1} - p_\alpha dq^\alpha \quad (\alpha = 1 \dots n) .$$

Sostanzialmente non vi è quindi differenza fra trasformazioni di contatto omogenee e quelle non omogenee: si tratta di due descrizioni diverse della stessa situazione, dove, nel primo caso, le variabili sono trattate simmetricamente, mentre, nel secondo caso, una variabile viene isolata dalle altre. Tuttavia è conveniente trattare separatamente le due forme della trasformazione perché le trasformazioni omogenee si prestano a una

trattazione più semplice che può essere utilizzata per le trasformazioni non omogenee.

3. Trasformazioni di contatto omogenee.

Si consideri la trasformazione (2.1) .

$$(3.1) \quad Q^i = \phi^i(q, p) ; \quad p_i = \psi_i(q, p)$$

per la quale sussista la (2.6)

$$(3.2) \quad p_i dQ^i = p_i dq^i .$$

Esplicitando mediante le (1) si ha

$$(3.3) \quad \psi_k \left(\frac{\partial \phi^k}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial \phi^k}{\partial p_i} dp_i \right) = p_i dq^i$$

Per l'indipendenza dei differenziali dq^i, dp_i si ha come condizione necessaria e sufficiente per la validità di (3)

$$(3.4) \quad \psi_k \frac{\partial \phi^k}{\partial q^i} = p_i ; \quad \psi_k \frac{\partial \phi^k}{\partial p_i} = 0 .$$

Se le ψ_k non sono tutte nulle, la matrice $\left| \frac{\partial \phi^k}{\partial p_i} \right|$ è singolare.

Sia $n-r$ il suo rango. Allora fra le ϕ^k , considerate come funzioni delle p , sussistono r relazioni non contenenti queste variabili. Tali relazioni dipendono invece in generale, come è ovvio, dalle q .

$$F_\alpha(q^1 \dots q^n, \phi^1 \dots \phi^n) = 0 \quad (\alpha = 1 \dots r)$$

o anche

$$(3.5) \quad F_\alpha(q^1 \dots q^n; Q^1 \dots Q^n) = 0$$

In base alla (2) i $2n$ differenziali dq^i, dQ^k non sono indipendenti. Il numero dei differenziali indipendenti si ricava dal numero delle F .

Differenziando le (5) si ha

$$(3.6) \quad \frac{\partial F_\alpha}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial F_\alpha}{\partial Q^i} dQ^i = 0$$

La (2) è conseguenza delle (6) e costituisce con queste un sistema algebrico di $r+1$ equazioni nelle $2n$ incognite dq^i, dQ^i . Esiste dunque una combinazione lineare nulla delle righe della matrice del sistema:

$$(3.7) \quad p_i - \rho^\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial Q^i} = 0 ; \quad -p_i - \rho^\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial q^i} = 0 .$$

Queste relazioni esprimono i vettori p, P come trasformati l'uno dell'altro.

Si consideri il sistema di n equazioni lineari nelle r incognite ρ^α :

$$(3.8) \quad \frac{\partial F_\alpha}{\partial q^i} \rho^\alpha = -p_i .$$

Il suo rango è r . Infatti il rango della matrice $\left| \frac{\partial F}{\partial q^i} \right|$ è r in virtù del secondo sistema (3.4) e quindi il primo sistema (7) ammette r soluzioni indipendenti ρ^α . Le ρ^α indipendenti sono in numero di r anche per il secondo sistema se e solo se $\left| \frac{\partial F}{\partial q^i} \right|$ è anch'essa di rango r .

Risolvendo allora r equazioni del sistema (8) corrispondenti ad un minore non singolare di ordine r , si ricavano le ρ^α che sono quindi funzioni lineari di r delle p . Introducendo poi queste espressioni nelle restanti equazioni del sistema (8) si ottengono $n-r$ relazioni fra le q, Q, p , lineari e omogenee nelle p . Accoppiando queste $n-r$ relazioni alle r relazioni (5) e risolvendo questo complesso di n equazioni rispetto alle Q^i , si ottengono le ϕ^i . Ma poiché le $n-r$ equazioni (5) coinvolte contengono le p_i , in forma lineare e omogenea, le Q^i contengono le p_i solo per il tramite dei rapporti di queste ultime: le ϕ^i

sono quindi omogenee di grado zero nelle p e cioè

$$(3.9) \quad p_k \frac{\partial \phi^i}{\partial p_k} = 0 \quad (i = 1 \dots n) .$$

Inoltre dal primo sistema (7): $P_i = \rho^\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial Q^i}$ poiché le p sono contenute solo nelle ρ^α e vi sono contenute linearmente, si vede che le $\psi_i (\equiv P_i)$ sono lineari omogenee nelle p_i .

Perché il sistema $\psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial q^k} = p_k$ ammetta soluzione unica la matrice $\left| \frac{\partial \phi^i}{\partial q^r} \right|$ deve avere rango massimo.

Sotto questa ipotesi ricavando le ψ dal primo sistema (4)

$$\psi_i = \frac{\left| \frac{\partial \phi}{\partial q} \right|^i}{\left| \frac{\partial \phi}{\partial q} \right|}$$

($\left| \frac{\partial \phi}{\partial q} \right|^i$ indica che la i^{ma} colonna della matrice $\left| \frac{\partial \phi}{\partial q} \right|$ è stata sostituita con la colonna delle p_i) e ponendole nel secondo si ha

$$\frac{\partial \phi^i}{\partial p_k} \cdot \frac{\left| \frac{\partial \phi}{\partial q} \right|^i}{\left| \frac{\partial \phi}{\partial q} \right|} = 0$$

ossia

$$\frac{\partial \phi^i}{\partial p_k} \left| \frac{\partial \phi}{\partial q} \right|^i = 0$$

e questo è lo sviluppo, secondo la prima riga, del determinante .

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi^1}{\partial p_k} & \dots & \frac{\partial \phi^n}{\partial p_k} & 0 \\ \frac{\partial \phi^1}{\partial q^1} & \dots & \frac{\partial \phi^n}{\partial q^1} & p_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \\ \frac{\partial \phi^1}{\partial q^n} & \dots & \frac{\partial \phi^n}{\partial q^n} & p_n \end{vmatrix} = 0$$

Di conseguenza si ha:

$$(3.9) \quad \frac{\partial \phi^j}{\partial p_k} = \lambda^{kr} \frac{\partial \phi^j}{\partial q^r}; \quad \lambda^{kr} p_r = 0$$

Il sistema differenziale

$$(3.10) \quad \frac{\partial \phi^j}{\partial p_k} = \lambda^{kr} \frac{\partial \phi^j}{\partial q^r}$$

è integrabile se e solo se le λ^{kr} sono simmetriche negli indici. (La dimostrazione viene lasciata come esercizio).

Moltiplicando allora per $\frac{\partial \phi^\ell}{\partial q^k}$ si ha

$$\frac{\partial \phi^j}{\partial p_k} \frac{\partial \phi^\ell}{\partial q^k} = \lambda^{km} \frac{\partial \phi^j}{\partial q^m} \frac{\partial \phi^\ell}{\partial q^k}$$

e analogamente

$$\frac{\partial \phi^j}{\partial q^k} \frac{\partial \phi^\ell}{\partial p_k} = \lambda^{km} \frac{\partial \phi^j}{\partial q^k} \frac{\partial \phi^\ell}{\partial q^m}$$

Per la simmetria delle λ si ha sommando

$$(3.11) \quad (\phi^j, \phi^\ell) \equiv \frac{\partial \phi^j}{\partial p_k} \frac{\partial \phi^\ell}{\partial q^k} - \frac{\partial \phi^j}{\partial q^k} \frac{\partial \phi^\ell}{\partial p_k} = 0$$

che sono ancora condizioni di integrabilità del sistema (10). Le (ϕ^j, ϕ^ℓ) sono dette parentesi di Poisson (PP).

Siano date, viceversa, n funzioni $\phi^i(qp)$. Si riconosce che esse in dividuano una trasformazione di contatto omogenea se soddisfano le tre condizioni:

- a) le ϕ sono omogenee di grado zero nelle p : $p_i \frac{\partial \phi^j}{\partial p_i} = 0$
- b) la matrice $\left| \frac{\partial \phi}{\partial q} \right|$ è non singolare
- c) le PP delle ϕ sono nulle.

Siano infatti $\psi_1 \dots \psi_n$ n soluzioni del sistema

$$d) \quad \psi_k \frac{\partial \phi^k}{\partial q^l} = p_l \quad \left(\left| \frac{\partial \phi^k}{\partial p^l} \right| \neq \text{per la b)} \right)$$

allora, essendo per le c)

$$\psi_i (\phi^i \phi^l) = 0$$

si ha, usando le condizioni d) e a) e la (4):

$$\psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial p_k} \frac{\partial \phi^l}{\partial q^k} = \psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial q^k} \frac{\partial \phi^l}{\partial p_k} = p_k \frac{\partial \phi^l}{\partial p_k} = 0$$

ossia

$$\left(\psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial p_k} \right) \frac{\partial \phi^l}{\partial q^k} = 0 .$$

La condizione b) assicura che questo sistema possiede solo la soluzione nulla,

$$\psi_j \frac{\partial \phi^j}{\partial p_k} = 0$$

e quindi le ψ soddisfano anche la seconda delle condizioni (3.4).

Si ha così:

Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema di funzioni ϕ^i determini una trasformazione di contatto omogenea per la quale le ψ siano univocamente determinate è che siano soddisfatte le condizioni a)b)c) .

4. Interpretazione geometrica.

Si consideri il caso in cui esiste una sola equazione (3.5)

$$(4.1) \quad F(q, Q) = 0$$

E' conveniente introdurre gli spazi R^n ed \bar{R}^n dove $A(q) \in R^n$ e $\bar{A}(Q) \in \bar{R}^n$.

Assegnata una n^{pla} di valori q_0 delle q , cioè un punto $A_0 \in R^n$, la (1) è l'equazione di una varietà $(n-1)$ dimensionale $\bar{\Sigma}_{A_0} \subset \bar{R}^n$: tutti i punti di $\bar{\Sigma}_{A_0}$ corrispondono, mediante la (1), a P . Volendo scegliere, fra i punti di $\bar{\Sigma}_{A_0}$ un punto determinato, è necessario associare al punto A_0 un vettore \vec{p}_0 .

Questo si può vedere in base alla discussione fatta nel n° precedente direttamente dalle (2.1'). Le relazioni (2.1')

$$(4.2) \quad \begin{cases} Q^i = \phi^i(q, p) \\ P_i = \psi_i(q, p) \end{cases}$$

quando sussiste la (2.6), implicano la (4.1). Ciò vuol dire che, posto $q = q_0$ nelle (4.2), al variare delle p , le prime n delle (4.2) forniscono la $\bar{\Sigma}_{A_0}$, mentre la seconda n^{pla} fornisce certi vettori \vec{p} applicati nei punti di $\bar{\Sigma}_{A_0}$. Un punto particolare \bar{A}_0 sulla varietà $\bar{\Sigma}_{A_0}$ si ottiene introducendo nelle (4.2) accanto alle q_0 , le componenti di un vettore \vec{p}_0 (applicato in A_0). In forza delle (3.7), che ora si riducono a

$$(4.3) \quad p_i = - \rho \frac{\partial F}{\partial q^i} ; \quad P_i = \rho \frac{\partial F}{\partial Q^i}$$

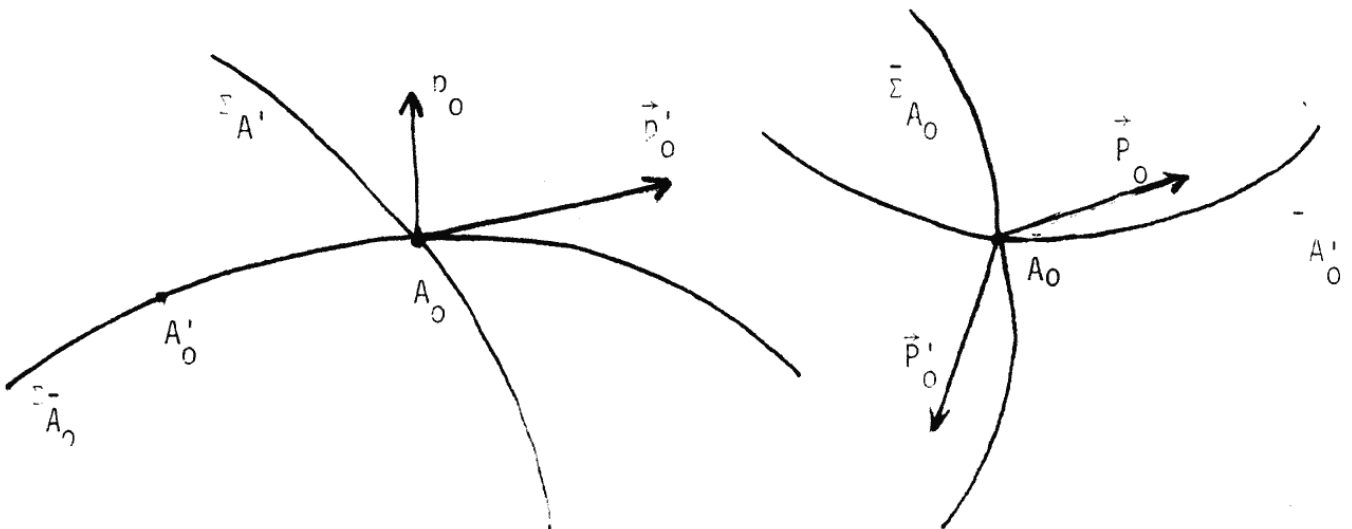
il vettore $\vec{p}_0(q_0, p_0)$ è ortogonale a $\bar{\Sigma}_{A_0}$ nel punto $\bar{A}_0(q_0, p_0)$.

In tal modo le (4.2) fanno corrispondere all'elemento $(n-1)$ dimensionale $(q, p) \equiv V_{n-1} \in \mathbb{C}R^n$, l'elemento $(n-1)$ dimensionale $(CP) \equiv \bar{V}_{n-1} \in \bar{\Sigma}_A$.

D'altra parte la (1) fa corrispondere a \bar{A}_0 una superficie $\Sigma_{\bar{A}_0}$, ovviamente passante per A_0 e se in \bar{A}_0 si applica proprio il vettore \vec{p}_0 precedentemente considerato, mediante le (2) si risale, oltre che al punto $A_0 \in \Sigma_{A_0}$, anche al vettore \vec{p}_0 precedentemente considerato, il quale, in virtù delle (3) è ortogonale a $\Sigma_{A_0}^-$ in A_0 .

Un altro punto $\bar{A}' \in \bar{\Sigma}_{A_0}$ dà luogo, mediante la (1), ad una superficie $\Sigma_{\bar{A}'}$ pur essa contenente A_0 e diversa da $\Sigma_{\bar{A}_0}$. La superficie $\Sigma_{\bar{A}'}$ ha in A_0 una normale covariante \vec{p}' che è legata dalle (2) alla normale portata a $\bar{\Sigma}_{A_0}$ in \bar{A}' .

Così per P_0 passano infinite superfici date dalla (1) ognuna corrispondente ad un diverso punto di $\bar{\Sigma}_A$ ed aventi in A_0 normali diverse. E' ovvio viceversa che, ad es., per \bar{A}_0 passano infinite superfici, ognuna corrispondente ad un diverso punto di $\Sigma_{A_0}^-$ e aventi normali covarianti diverse.



(vedere l'identica discussione nel n° 5 del Cap. VI: tale discussione poggia sulla (3.12) dello stesso capitolo e questa formula è analoga alla (2.6) del capitolo presente).

Sia assegnata ora in R^n una superficie S di equazione $f(q) = 0$. Ad ogni punto $A_0 \in S$ la (1) associa in \bar{R}^n una superficie $\bar{\Sigma}_{A_0}$. Come si è visto or ora, per individuare, mediante le (1) un punto particolare in $\bar{\Sigma}_{A_0}$ occorre dare un vettore \vec{p}_0 . Si scelga il vettore

$$p_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial q^i}$$

e sia \bar{A}_0 il punto di $\bar{\Sigma}_{A_0}$ corrispondente a \vec{p}_0 . A \bar{A}_0 corrisponde in R^n una superficie $\Sigma_{\bar{A}_0}$ con la seguente proprietà: la normale a $\Sigma_{\bar{A}_0}$ in A_0 ha la direzione di \vec{p}_0 e quindi è normale ad S .

In tal modo che (2) associano al punto $A_0 \in S$ una superficie della famiglia (1) che è tangente ad S in A_0 . Poiché ciò si può ripetere per tutti i punti di S , si conclude che dalla famiglia (1), riguardata come una famiglia di superfici negli n parametri Q , si può estrarre una famiglia parziale della quale ogni membro è tangente ad S in un punto. La superficie S è quindi l'involuppo di questa famiglia parziale.

Le componenti $p_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial q^i}$ delle normali ad S sono funzioni delle coordinate del punto di applicazione: $p_i = p_i(q)$. Introducendo queste funzioni nelle (2) si ottengono le n funzioni $Q^i = \phi^i[q, p(q)]$. Al variare di A su S si ottiene allora una superficie \bar{S} la quale, essendo le q vincolate dalla relazione $f(q) \equiv 0$, è la trasformata di S . Se ci si sposta su \bar{S} si ha

$$dQ^i = \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial q^k} + \frac{\partial \phi^i}{\partial p_r} \frac{\partial p_r}{\partial q^k} \right) dq^k$$

dove le dq^k sono prese lungo S , e cioè sono tali che

$$\frac{\partial f}{\partial q^k} dq^k = 0 .$$

Moltiplicando le precedenti per P_i si ha

$$P_i dQ^i = P_i \frac{\partial \phi^i}{\partial q^k} dq^k + P_i \frac{\partial \phi}{\partial p_r} \frac{\partial p_r}{\partial q^k} dq^k .$$

Ma per le (3.4) è $P_i \frac{\partial \phi^i}{\partial p_r} = 0$; $P_i \frac{\partial \phi}{\partial q^k} = p_k$

e quindi

$$(4.4) \quad P_i dQ^i = p_i dq^i = 0$$

Detta $\bar{f}(Q) = 0$ l'equazione di \bar{S} , poiché le dQ^k sono spostamenti tangenti a \bar{S} , le P_i che per le (4) sono ad essi normali, sono del tipo

$$P_i = \mu \frac{\partial \bar{f}}{\partial Q^i}$$

Si scelga ora su S un punto A_0 e sia $\bar{\Sigma}_{A_0}$ la solita superficie in \bar{R}^n . Si prenda ancora su $\bar{\Sigma}_{A_0}$ il punto \bar{A}_0 corrispondente a $p_i = \mu \frac{\partial f}{\partial q^i} \Big|_{P_0}$.

Allora all'elemento di S $(A_0, \frac{\partial f}{\partial q^i} \Big|_0)$ corrisponde su $\bar{\Sigma}_{A_0}$, come si

è detto in precedenza l'elemento $(\bar{A}_0, P_i = \mu \frac{\partial \bar{f}}{\partial Q^i})$. Perciò le normali a

$\bar{\Sigma}_{A_0}$ e ad \bar{S} in \bar{A}_0 sono parallele e le due superfici sono tangenti in

\bar{A}_0 . Ripetendo ciò per tutti i punti di \bar{S} , si vede che questa superficie

è involuppo di una famiglia parziale di superfici $\bar{\Sigma} \subset \bar{R}^n$, appartenente alla famiglia di superfici (1) negli n parametri q .

E' evidente la simmetria fra gli spazi R^n e \bar{R}^n .

Se le equazioni (3.5) sono in numero di r , esse definiscono una varietà ad $n-r$ dimensioni. Quindi un punto A e R^n ha come trasformato un \bar{R}^n tutta una varietà $(n-r)$ dimensionale $\bar{\Sigma}_p(n-r)$. Preso in A un

vettore covariante p_i , le n equazioni $Q^i = \phi^i(qp)$ individuano su $\bar{\Sigma}_A^{n-r}$ un punto determinato \bar{A} . Le restanti equazioni $P_i = \psi_i(qp)$ associano in \bar{A} una normale covariante a $\bar{\Sigma}_P^{n-r}$: infatti ogni spostamento su $\bar{\Sigma}_A^{n-r}$ in \bar{A} soddisfa alla relazione $\frac{\partial F}{\partial Q^i} dQ^i = 0$ ossia $p^\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial Q^i} dQ^i = 0$; di conseguenza per le (3.7) è $P_i dQ^i = 0$. Perciò P_i è, come si è detto, normale a $\bar{\Sigma}_P^{n-r}$.

Come per il caso $r=1$, assegnata una superficie $f(q) = 0$ e determinata la sua trasformata $\bar{f}(q) = 0$ (dove nelle $Q^i = \phi^i(qp)$, in luogo delle p si pongano le $\frac{\partial f}{\partial q^i}$ calcolate su S), la \bar{S} , in ogni suo punto, è tangente ad una $\bar{\Sigma}^{n-r}$ in un punto opportuno di questa.

Infine una discussione analoga si può fare partendo, anziché da una superficie S assegnata di equazione $f(q) = 0$, da una varietà ad un numero minore di dimensioni, data da s equazioni

$$f_i(q) = 0 \quad (i = 1 \dots s < n).$$

In tutta la discussione precedente è fondamentale il fatto che le ϕ , come funzioni delle p , siano fra loro dipendenti: tale dipendenza implica che, fissate le q^i nelle (2), al variare delle p si ottengono punti Q^i non arbitrari, ma appartenenti ad una Σ .

5. Proprietà delle trasformazioni di contatto omogenee.

La discussione precedente può essere invertita: si riconosce in tal modo che l'esistenza delle varietà F_α del n° precedente ha un ruolo di condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una trasformazione di contatto omogenea.

Siano assegnate r equazioni:

$$(5.1) \quad F_\alpha(qQ) = 0 \quad (\alpha = 1 \dots r)$$

e si supponga che le F , come funzioni delle q , siano indipendenti, e cioè il rango della matrice $\left| \frac{\partial F_\alpha}{\partial q} \right|$ sia r .

In corrispondenza ad ogni n^{pla} di valori delle Q , le (1) sono le equazioni di una varietà ad $n-r$ dimensioni. Per individuare le normali a tale varietà, si osservi che, indicando con dq^i ($i = 1 \dots n$) uno spostamento tangente a queste varietà, la normale deve soddisfare alla relazione:

$$(5.2) \quad p_i dq^i = 0$$

In altri termini il vettore di componenti p_i deve essere normale al vettore di componenti dq^i tutte le volte che questo ultimo soddisfa alle relazioni (1), ossia alle relazioni

$$(5.3) \quad \frac{\partial F_\alpha}{\partial q^i} dq^i = 0 \quad (\alpha = 1 \dots r)$$

o ancora sotto la condizione che le dq^i siano legate dalle (3). Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si vede che i vettori normali alla varietà sono tutti e soli della forma:

$$(5.4) \quad p_i = \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial q^i} .$$

Le $n+r$ equazioni (1) e (4) costituiscono un sistema nelle $n+r$ incognite $Q^1 \dots Q^n, \lambda_1 \dots \lambda_r$. Poiché valori arbitrari delle λ forniscono sempre normali alle varietà (1) è chiaro che tali parametri non hanno un particolare interesse e conviene eliminarli fin dall'inizio. In effetti il sistema (4) è equivalente al sistema di equazioni ottenute uguagliando a zero i minori di ordine $r+1$ della matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q^1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial q^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial q^1} & \dots & \frac{\partial F_r}{\partial q^n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_1 & \dots & p_n \end{vmatrix}$$

Naturalmente delle $\binom{n}{r+1}$ equazioni che in tal modo si ottengono interessano unicamente quelle alle quali si perviene uguagliando a zero i soli $n-r$ minori contenenti un minore di rango r della matrice $\left| \frac{\partial F_\alpha}{\partial q^i} \right|$: tali equazioni sono, con notazione ovvia, della forma:

$$(5.5) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q^{i_1}} & \frac{\partial F_1}{\partial q^{i_r}} & \frac{\partial F_1}{\partial q^k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial q^{i_1}} & \frac{\partial F_r}{\partial q^{i_r}} & \frac{\partial F_r}{\partial q^k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i_1} & p_{i_r} & p_k \end{vmatrix} = 0 \quad (k \neq i_1, \dots, i_r)$$

e sono pertanto lineari omogenee nelle p . Ogni eventuale soluzione $\phi^1(qp) \dots \phi^n(qp)$ è quindi omogenea di grado zero nelle p .

Il sistema (1) (5) è risolubile rispetto alle Q se le F_α sono indipendenti come funzioni di tali variabili cioè se la matrice

$\left| \frac{\partial F_\alpha}{\partial Q^i} \right|$ ha rango r . Queste soluzioni siano:

$$(5.6) \quad Q^i = \phi^i(qp) .$$

Riintroducendo le (6) nelle (1) si ottengono delle identità. Derivando queste identità si ha:

$$(5.7) \quad \frac{\partial F_\alpha}{\partial q^1} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial Q^k} \frac{\partial \phi^k}{\partial q^1} = 0; \quad \frac{\partial F_\alpha}{\partial Q^k} \frac{\partial \phi^k}{\partial p_i} = 0$$

Sostituendo le (6) nelle (4) si ricavano certe funzioni $\bar{\lambda}_\alpha$. Posto

$$(5.8) \quad \psi_i = - \bar{\lambda}_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial Q^1}$$

si vede che le ψ_i in virtù delle (7) soddisfano le seconde delle (3.4) e quindi le funzioni $\phi^i \psi_i$ individuano una trasformazione di contatto omogenea.

La condizione sufficiente perché ciò avvenga è che il sistema (1) (4) sia risolubile rispetto al complesso delle variabili Q, λ , cioè che la matrice

$$(5.9) \quad \left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial F_1}{\partial Q^1} & \frac{\partial F_2}{\partial Q^n} & 0 \dots & 0 \\ \frac{\partial F_r}{\partial Q^1} & \frac{\partial F_r}{\partial Q^n} & 0 \dots & 0 \\ \lambda_\alpha \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial q^1 \partial Q^1} \dots \lambda_\alpha \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial q^1 \partial Q^n} & \frac{\partial F_1}{\partial q^1} \dots \frac{\partial F_r}{\partial q^1} & & \\ \lambda_\alpha \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial q^n \partial Q^1} \dots \lambda_\alpha \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial q^n \partial Q^n} & \frac{\partial F_1}{\partial q^n} \dots \frac{\partial F_r}{\partial q^n} & & \end{array} \right| \equiv \Delta$$

abbia rango $n+r$ (per ogni valore delle λ , i cui valori numerici come si è detto, sono irrilevanti, perché ogni loro r -upla individua

una normale alla varietà (1)). D'altra parte come si vede da uno sviluppo esplicito, il non annullarsi della matrice (9) implica che le matrici

$$\left| \frac{\partial F_\alpha}{\partial q^k} \right| \text{ e } \left| \frac{\partial F_\alpha}{\partial c^k} \right| \text{ abbiano entrambe rango } r.$$

In conclusione:

Date r funzioni F_α di $2n$ variabili Q^i e q^i tali che la matrice Δ data dalla (9) sia non singolare sulla varietà $F_\alpha = 0$ per tutti i valori delle λ , le equazioni (6) e (8), individuano una trasformazione di contatto omogenea.

Per una trasformazione di contatto (2.1') le condizioni precedenti, relative alle (3.5) sono necessariamente soddisfatte. Dalla simmetria della matrice (9) segue che, scambiando il ruolo delle q e delle Q nella discussione del presente numero si ottiene una trasformazione di contatto

$$(5.10) \quad q^i = \bar{\phi}^i(QP) ; \quad p_i = \bar{\psi}_i(QP) .$$

Questa trasformazione è l'inversa della (2.1'), come è evidente.

Inoltre prese due trasformazioni di contatto

$$\begin{aligned} q^i &= \bar{\phi}^i(QP) & ; & & p_i &= \bar{\psi}_i(QP) \\ \xi^i &= \pi^i(qp) & ; & & \eta_i &= \sigma_i(qp) \end{aligned}$$

dalle relazioni

$$p_i dq^i = P_i dQ^i \quad \text{e} \quad \eta_i d\xi^i = p_i dq^i$$

segue

$$P_i dQ^i = \eta_i d\xi^i$$

e quindi anche la trasformazione $PQ \rightarrow \xi \eta$ è una trasformazione di contatto.

Poiché la trasformazione identica $Q^i = q^i$; $P_i = p_i$ è certamente una trasformazione di contatto omogenea, il complesso delle trasformazioni di contatto omogenee ha le proprietà:

- 1) la composizione di due trasformazioni di contatto è una trasformazione di contatto
- 2) ogni trasformazione di contatto ammette una trasformazione inversa, che è pur essa una trasformazione di contatto
- 3) esiste la trasformazione di contatto identica.

Di conseguenza il complesso delle trasformazioni di contatto omogenee in $2n$ variabili costituisce un gruppo.

Naturalmente per la trasformazione (10) si hanno le analoghe delle (3.4)

$$(5.11) \quad p_i \frac{\partial q^k}{\partial Q^k} = p_r \quad ; \quad p_i \frac{\partial q^i}{\partial P_k} = 0 \quad .$$

Derivando le prime rispetto a Q^j si ha

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q^j} \frac{\partial q^i}{\partial Q^k} - \frac{\partial p_i}{\partial Q^k} \frac{\partial q^i}{\partial Q^j} = 0$$

o, indicando il primo membro con $\{Q^j, Q^k\}$

$$(5.12) \quad \{Q^j, Q^k\} = 0 \quad .$$

L'espressione $\{Q^j, Q^k\}$ è detta la parentesi di Lagrange (PL) delle quantità Q^j, Q^k .

Dalle seconde delle (11) si ha analogamente:

$$(5.13) \quad \{P_j, P_k\} = 0$$

Infine derivando le prime rispetto alle P_j e le seconde rispetto alle Q^k sottraendo (1).

(1) osservare che nelle equazioni delle PL la covarianza è rovesciata. Infatti le PL sono soltanto dei simboli.

$$(5.14) \quad \{P_j, Q^k\} = \delta_j^k$$

Per $2n$ funzioni $u^1 \dots u^{2n}$ fra loro indipendenti, si hanno le relazioni

$$\frac{\partial q}{\partial u^i} \frac{\partial u^\alpha}{\partial q^k} = \delta_k^i \quad ; \quad \frac{\partial p_i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial p_k} = \delta_i^k \quad ;$$

$$\frac{\partial q^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial p_k} = 0 = \frac{\partial p_i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial q^k}$$

e analogamente

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial q^\sigma} \frac{\partial q^\sigma}{\partial u^\beta} + \frac{\partial u^\alpha}{\partial p_\sigma} \frac{\partial p_\sigma}{\partial u^\beta} = \delta_\beta^\alpha$$

Usando queste relazioni è facile ricavare la relazione che sussiste fra le PL e le PP dalle $2n$ funzioni u . Si ha, scrivendo esplicitamente le somme:

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^n (u^\alpha u^\beta) \{u^\alpha u^\gamma\} = \\ & = \sum_{\alpha, \kappa, \sigma} \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial p_\kappa} \frac{\partial u^\beta}{\partial q^\sigma} - \frac{\partial u^\alpha}{\partial q^\kappa} \frac{\partial u^\beta}{\partial p_\sigma} \right) \left(\frac{\partial p_\sigma}{\partial u^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial p_\sigma}{\partial u^\gamma} \frac{\partial q^\alpha}{\partial u^\alpha} \right) = \\ & = \sum_{\kappa \sigma} \left(\frac{\partial u^\beta}{\partial q^\kappa} \frac{\partial q^\sigma}{\partial u^\gamma} \delta_\sigma^\kappa + \frac{\partial p_\sigma}{\partial u^\gamma} \frac{\partial u^\beta}{\partial q^\kappa} \delta_\kappa^\sigma \right) = \delta_\gamma^\beta \end{aligned}$$

cioè

$$(5.15) \quad (u^\alpha u^\beta) \{u^\alpha u^\gamma\} = \delta_\gamma^\beta$$

Se per es. si ha $u^\beta = Q^\beta$, $u^\gamma = Q^\gamma$, la somma precedente vale

$$\Sigma [(Q^\alpha, Q^\beta) \{Q^\alpha, Q^\gamma\} + (P_\alpha, Q^\beta) \{P_\alpha, Q^\gamma\}] = \delta_\gamma^\beta$$

Analogamente per $u^\beta = Q^\beta$, $u^\gamma = P_\gamma$ e per $u^\beta = P_\beta$, $u^\gamma = Q^\gamma$ si

ha rispett.

$$\Sigma [(Q^\alpha, Q^\beta) \{Q^\alpha, P_\gamma\} + (P_\alpha, Q^\beta) \{P_\alpha, P_\gamma\}] = 0$$

e

$$\Sigma [(Q^\alpha, P_\beta) \{Q^\alpha, Q^\gamma\} + (P_\alpha, P_\beta) \{P_\alpha, Q^\gamma\}] = \delta_\beta^\gamma .$$

Utilizzando le (12), (13) e (14), le ultime tre relazioni diventano

$$(5.16) \quad (Q^\alpha, Q^\beta) = 0 ; (P_\alpha, P_\beta) = 0 ; (P_\alpha, Q^\beta) = \delta_\alpha^\beta$$

Queste relazioni, assieme alle (12), (13 e (14) sono fondamentali: esse non sono però caratteristiche delle trasformazioni di contatto omogenee (vedere il n. 7).

La PP gode di una proprietà notevole e di grande utilità. Date tre funzioni f, g, h delle q, p sussiste l'identità, detta identità di Jacobi:

$$(f(g, h)) + (h(f, g)) + (g(h, f)) = 0$$

che si può dimostrare con un calcolo diretto.

Infine è importante la seguente proprietà delle PP: la PP di una generica coppia di funzioni è invariante sotto trasformazioni di contatto omogenee (anche per questa proprietà v. n° 7): infatti se $u(q, p)$, $v(q, p)$ sono due funzioni delle q, p , si indichino con $\bar{u}(Q, P)$, $\bar{v}(Q, P)$ le loro trasformate sotto la trasformazione di contatto $q, p \rightarrow Q, P$ e cioè le funzioni

$$u[q(Q, P), p(Q, P)] \equiv \bar{u}(Q, P); v[q(Q, P), p(Q, P)] \equiv \bar{v}(Q, P)$$

Allora è

$$(\bar{u}, \bar{v})_{QP} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial Q^i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial P_i} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial P_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Q^i} = \left(\frac{\partial u}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial Q^i} + \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial Q^i} \right) .$$

$$\cdot \left(\frac{\partial v}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial P_i} + \frac{\partial v}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial P_i} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial P_i} + \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial P_i} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial Q^1} + \frac{\partial v}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial Q^1} \right) = (uv)_{qp}$$

che prova l'affermazione fatta.

Come ultima conseguenza della invarianza della PP sotto TC conviene menzionare alcune semplici relazioni che sono utili in dinamica.

Le uguaglianze

$$(Q^i, q^k)_{qp} = (Q^i, q^k)_{QP}$$

in termini espliciti si scrivono

$$\frac{\partial Q^i}{\partial p_s} \frac{\partial q^k}{\partial q^s} = - \frac{\partial Q^i}{\partial Q^s} \frac{\partial q^k}{\partial P_s}$$

e infine

$$(5.17) \quad \frac{\partial Q^i}{\partial p_k} = - \frac{\partial q^k}{\partial P_i} .$$

In modo analogo si riconosce che sussistono le relazioni

$$(5.17') \quad \frac{\partial P_i}{\partial p_k} = \frac{\partial q^k}{\partial Q^1} ; \quad \frac{\partial P_i}{\partial q^k} = - \frac{\partial p_k}{\partial Q^1} ; \quad \frac{\partial Q^i}{\partial q^k} = \frac{\partial p_k}{\partial P_i}$$

6. Trasformazioni di contatto non omogenee.

Come si è visto nel n° 2, se nella relazione

$$(2.6) \quad P_i dq^i = p_i dq^i$$

si pone $p_{n+1} = -1$

si ottiene una trasformazione non omogenea

$$(6.1) \quad \begin{cases} Q^i = \phi^i(q^1 \dots q^{n+1}; p_1 \dots p_n) \\ P_i = \psi_i(q^1 \dots q^{n+1}; p_1 \dots p_n) \end{cases}$$

caratterizzata dalla relazione pfaffiana.

$$(6.2) \quad p_i dq^i = p_\alpha dq^\alpha - dq^{n+1} \quad (i=1 \dots n+1)$$

$$(\alpha = 1 \dots n)$$

Dalle (1) si ha:

$$\psi_i \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \phi^i}{\partial q^\alpha} dq^\alpha + \frac{\partial \phi^i}{\partial p_\alpha} dp_\alpha \right) = - dq^1 + p_\alpha dq^\alpha$$

da cui

$$(6.3) \quad \psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial q^{n+1}} = -1; \quad \psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial q^\alpha} = p_\alpha; \quad \psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial p_\alpha} = 0$$

Queste equazioni si possono ottenere dalle (3.4) ponendo $p_{n+1} = -1$:

ciò prova esplicitamente che una trasformazione di contatto non omogenea si può ottenere da una trasformazione di contatto omogenea ponendo $p_{n+1} = -1$. Geometricamente la variabile q^{n+1} è trattata diversamente dalle altre, come nel caso in cui si scrive, ad es. l'equazione di una superficie nella forma $z = f(xy)$ anziché nella forma $f(xyz) = 0$.

Viceversa, se nelle (3) si pone

$$(6.4) \quad p_\alpha = - p'_\alpha / p'_{n+1}$$

si ha indicando con $\phi'^i(qp')$ la funzione $\phi^i(qp)$

$$(6.5) \quad \frac{\partial \phi'^i}{\partial p'_\alpha} = \frac{\partial \phi^i}{\partial p_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial p'_\alpha} \text{ (non sommare su } \alpha) = - \frac{1}{p'_{n+1}} \frac{\partial \phi^i}{\partial p_\alpha}$$

e, usando quest'ultima:

$$(6.5) \quad \frac{\partial \phi'^i}{\partial p'_{n+1}} = \frac{\partial \phi^i}{\partial p_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial p'_{n+1}} = \frac{\partial \phi^i}{\partial p_\alpha} \left(- \frac{p'_\alpha}{p'^2_{n+1}} \right) = - \frac{p_\alpha}{p'_{n+1}} \frac{\partial \phi^i}{\partial p_\alpha} \left(p_\alpha \frac{\partial \phi^i}{\partial p_\alpha} \right) =$$

Moltiplicando la prima delle (3) per $-p'_{n+1}$ e osservando che è

$$\frac{\partial \phi^i}{\partial q^k} = \frac{\partial \phi'^i}{\partial q^k}, \text{ si ha}$$

$$(6.6) \quad -p'_{n+1} \psi_i \frac{\partial \phi'^i}{\partial q^{n+1}} = p'_{n+1} .$$

Moltiplicando poi per $-p'_{n+1}$ le seconde delle (3) si ha, usando le (4)

$$(6.6') \quad -p'_{n+1} \psi_i \frac{\partial \phi'^i}{\partial q^\alpha} = p'_\alpha .$$

Moltiplicando infine per $-p'_{n+1}$ le ultime delle (3), oppure usando le ultime delle (5) si ha

$$(6.6'') \quad -p'_{n+1} \psi_i \frac{\partial \phi'^i}{\partial q^\alpha} = 0 .$$

Infine dalle seconde delle (5) si ha

$$p'_{n+1} \frac{\partial \phi'^i}{\partial p'_{n+1}} = -p'_\alpha \frac{\partial \phi'^i}{\partial p'_\alpha}$$

e moltiplicando per ψ_i e tenendo conto delle ultime delle (3)

$$(6.6''') \quad 0 = p'_\alpha \psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial p'_\alpha} = p'_{n+1} \psi_i \frac{\partial \phi'^i}{\partial p'_{n+1}} .$$

Introducendo le funzioni

$$\psi'_i(qp') = -p'_{n+1} \psi_i(q^1 \dots q^{n+1}; -\frac{p'_1}{p'_{n+1}} \dots -\frac{p'_n}{p'_{n+1}})$$

le (6), (6'), (6''), (6''') si possono scrivere

$$(6.7) \quad \psi'_i \frac{\partial \phi^i}{\partial q^k} = p'_k ; \quad \psi'_i \frac{\partial \phi'^i}{\partial p'_k} = 0$$

Le (7) mostrano che la trasformazione di contatto $q^i, p'_i \rightarrow \phi'^i, \psi'_i$ è omogenea.

E' ovvio che se si passa dalla trasformazione omogenea ad una non omogenea, col procedimento ora descritto si ottiene la trasformazione omogenea di partenza.

Data lo pfaffiano

$$\psi'_i dq^i = -dq^{n+1} + p'_\alpha dq^\alpha$$

moltiplicandolo per $-\psi'_{n+1}$, si ha

$$-\psi'_{n+1} \psi'_i dq^i = p'_{n+1} dq^{n+1} - p'_{n+1} p'_\alpha dq^\alpha$$

e questo pfaffiano è relativo a una trasformazione di contatto omogenea

$$Q^i = \psi'^i(qp) ; \quad P_i = \psi'_i(qp) = -p'_{n+1} \psi'_i$$

Naturalmente è

$$\left| \frac{\partial \phi'^i}{\partial q^k} \right| = \left| \frac{\partial \phi^i}{\partial q^k} \right| \neq 0$$

e deve essere pure

$$\left| \frac{\partial \phi'^i}{\partial p'_k} \right| \neq 0$$

La dimostrazione di questa ultima proprietà viene lasciata come esercizio.

Conviene ora scrivere le (5.12), (5.13), (5.14) esplicitamente per il caso non omogeneo. A tale scopo basta utilizzare sistematicamente le (5) e le analoghe:

$$(6.8) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \psi'_i}{\partial p'_{n+1}} &= - \frac{\partial}{\partial p'_{n+1}} (p'_{n+1} \psi'_i) = -\psi'_{n+1} - p'_{n+1} \left(- \frac{\partial \psi'_i}{\partial p'_\alpha} \frac{\partial p'_\alpha}{\partial p'_{n+1}} \right) = \\ &= -\psi'_{n+1} + p'_\alpha \frac{\partial \psi'_i}{\partial p'_\alpha} \\ \frac{\partial \psi'_i}{\partial p'_\alpha} &= - \frac{1}{p'_{n+1}} \frac{\partial \psi'_i}{\partial p'_\alpha} \end{aligned} \right.$$

Servendosi di queste, si trova:

$$\begin{aligned} 0 &= (\phi'^i \phi'^k)_{qp'} = \frac{\partial \phi'^i}{\partial p'_\ell} \frac{\partial \phi'^k}{\partial q^\ell} - \frac{\partial \phi'^i}{\partial q^\ell} \frac{\partial \phi'^k}{\partial p'_\ell} = \\ &= \frac{\partial \phi'^i}{\partial p'_\alpha} \frac{\partial \phi'^k}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial \phi'^i}{\partial p'_{n+1}} \frac{\partial \phi'^k}{\partial q^{n+1}} - \frac{\partial \phi'^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \phi'^k}{\partial p'_\alpha} - \frac{\partial \phi'^i}{\partial q^{n+1}} \frac{\partial \phi'^k}{\partial p'_{n+1}} \end{aligned}$$

Utilizzando le (5), tenendo presente che $p'_{n+1} \neq 0$ e definendo una nuova parentesi, si ha:

$$[\phi'^i \phi'^k] = \frac{\partial \phi'^i}{\partial p'_\alpha} \left(\frac{\partial \phi'^k}{\partial p'_\alpha} + p'_\alpha \frac{\partial \phi'^k}{\partial q^{n+1}} \right) - \frac{\partial \phi'^k}{\partial p'_\alpha} \left(\frac{\partial \phi'^i}{\partial q^\alpha} + p'_\alpha \frac{\partial \phi'^i}{\partial q^{n+1}} \right) = 0$$

o anche

$$(6.9) \quad [\phi'^i \phi'^k] = (\phi'^i \phi'^k) + p'_\alpha \left(\frac{\partial \phi'^i}{\partial p'_\alpha} \frac{\partial \phi'^k}{\partial q^{n+1}} - \frac{\partial \phi'^k}{\partial p'_\alpha} \frac{\partial \phi'^i}{\partial q^{n+1}} \right) = 0$$

Analogamente

$$\begin{aligned} (\psi'_i \psi'_k)_{qp'} &= \left(-\psi'_i + \frac{\partial \psi'_i}{\partial p'_\alpha} p'_\alpha \right) \frac{\partial \psi'_k}{\partial q^{n+1}} - \frac{\partial \psi'_k}{\partial p'_\alpha} \left(\frac{1}{p'_{n+1}} \frac{\partial \psi'_i}{\partial p'_\alpha} \right) - \\ &- \left(-\psi'_k + \frac{\partial \psi'_k}{\partial p'_\alpha} p'_\alpha \right) \frac{\partial \psi'_i}{\partial q^{n+1}} + \frac{\partial \psi'_{n+1}}{\partial q^\alpha} \frac{1}{p'_{n+1}} \frac{\partial \psi'_k}{\partial p'_\alpha} \end{aligned}$$

ossia applicando la definizione data dalla parentesi [] :

$$(6.10) \quad [\psi'_i \psi'_k] = \psi'_i \frac{\partial \psi'_k}{\partial q^{n+1}} - \psi'_k \frac{\partial \psi'_i}{\partial q^{n+1}}$$

e analogamente

$$(6.11) \quad [\psi_k \phi^i] = \delta_k^i + \psi_k \frac{\partial \phi^i}{\partial q^{n+1}}$$

Come per il caso omogeneo, si riconosce che $n+1$ funzioni ϕ^i soddisfacenti ad opportune condizioni, individuano una trasformazione di contatto non omogenea.

Siano ϕ^i $n+1$ funzioni soddisfacenti le seguenti condizioni

$$a) \quad \left| \frac{\partial \phi^i}{\partial q^k} \right| \neq 0$$

$$b) \quad [\phi^i \phi^k] = 0 \quad (\text{eqq. (9)}) .$$

Si risolve il sistema di equazioni

$$(6.12) \quad \begin{cases} \psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial q^{n+1}} = -1 \\ \psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial p^\alpha} = p_\alpha \end{cases}$$

Questo sistema lineare di $n+1$ equazioni nelle $n+1$ incognite ψ_i per a) è risolubile con la regola di Cramer.

L'unica soluzione di (12) soddisfa inoltre alle ultime delle (3).

$$(6.13) \quad \psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial p_\alpha} = 0 .$$

Infatti, poiché le ϕ^i soddisfano le (9), moltiplicando queste ultime per ψ_i e sommando su i si ha:

$$\psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial p_\alpha} \left(\frac{\partial \phi^k}{\partial q^\alpha} + p_\alpha \frac{\partial \phi^k}{\partial q^{n+1}} \right) - \frac{\partial \phi^k}{\partial p_\alpha} \left(\psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial q^\alpha} + p_\alpha \psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial q^{n+1}} \right) = 0 .$$

L'ultima parentesi è nulla per le (12). Resta quindi:

$$(6.14) \quad \psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial p_\alpha} \left(\frac{\partial \phi^k}{\partial q^\alpha} + p_\alpha \frac{\partial \phi^k}{\partial q^{n+1}} \right) = 0$$

Questo è un sistema di $n+1$ equazioni nelle n incognite: $\psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial p_\alpha}$

e basta dimostrare che esiste un sistema di n equazioni estratte da (14) aventi la sola soluzione nulla per concludere che le (13), cioè le ultime delle (3), sono soddisfatte. (Ovviamente valori tutti nulli delle incognite soddisfano anche l'ultima equazione). Ciò equivale a trovare,

nella matrice a $n+1$ righe ed n colonne $\left| \frac{\partial \phi^i}{\partial q^\alpha} + p_\alpha \frac{\partial \phi^i}{\partial q^{n+1}} \right|$ un minore di ordine n non nullo.

Risolvendo le prime $n+1$ delle (3) si ha:

$$(6.15) \quad \left| \frac{\partial \phi}{\partial q} \right| \psi_k = (-1)^k \begin{vmatrix} -p_1 \frac{\partial \phi^1}{\partial q^1} & \dots & \frac{\partial \phi^{k-1}}{\partial q^1} & \frac{\partial \phi^{k+1}}{\partial q^1} & \dots & \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial q^1} \\ -p_2 \frac{\partial \phi^1}{\partial q^2} & \dots & \frac{\partial \phi^{k-1}}{\partial q^2} & \frac{\partial \phi^{k+1}}{\partial q^2} & \dots & \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial q^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 \frac{\partial \phi^1}{\partial q^{n+1}} & \dots & \frac{\partial \phi^{k-1}}{\partial q^{n+1}} & \frac{\partial \phi^{k+1}}{\partial q^{n+1}} & \dots & \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial q^{n+1}} \end{vmatrix}$$

Ponendo $\phi_{\alpha}^i \equiv \frac{\partial \phi^i}{\partial q^\alpha}$ si ha, sviluppando il membro destro dell'ultima

riga ((k) indica l'assenza della colonna delle ϕ_k^i)

$$\begin{vmatrix} \phi_1^1 \dots \phi_1^{n+1} & \dots & \phi_1^{k-1} & \phi_1^{k+1} & \dots & \phi_1^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{n+1}^1 \dots \phi_{n+1}^{n+1} & \dots & \phi_{n+1}^{k-1} & \phi_{n+1}^{k+1} & \dots & \phi_{n+1}^{n+1} \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1)^k \\ \dots \\ -1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -p_1 \phi_1^1 \dots \phi_1^{n+1} \\ \dots \\ -p_n \phi_n^1 \dots \phi_n^{n+1} \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1)^k \\ \dots \\ \dots \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
 & + \phi_1^2 \begin{vmatrix} -p_1 & \phi_1^1 & \phi_1^3 \cdots \phi_1^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -p_n & \phi_n^1 & \phi_n^3 \cdots \phi_n^{n+1} \end{vmatrix}^{(k)} + \begin{vmatrix} \phi_1^1 \cdots \phi_1^{n+1} \\ \vdots \\ \phi_n^1 \cdots \phi_n^{n+1} \end{vmatrix}^{(k)} + \begin{vmatrix} p_1 \phi_{n+1}^1 & \phi_1^2 \cdots \phi_1^{n+1} \\ \vdots & \vdots \\ p_n \phi_{n+1}^1 & \phi_n^2 \cdots \phi_n^{n+1} \end{vmatrix}^{(k)} + \\
 (6.16) & + \begin{vmatrix} \phi_1^1 & p_1 & \phi_1^2 & \phi_1^3 \cdots \phi_1^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_n^1 & p_n & \phi_n^2 & \phi_n^3 \cdots \phi_n^{n+1} \end{vmatrix}^{(k)} + \dots
 \end{aligned}$$

Si può notare che questa è una somma di matrici di ordine n aventi a due a due $n-1$ colonne uguali: le colonne diverse contengono (tranne che per la prima matrice) le $p_1 \dots p_n$. Per es. le prime due matrici hanno solo la prima colonna diversa. Sommandole si ha:

$$\begin{vmatrix} \phi_1^1 + p_1 \phi_{n+1}^1 & \phi_1^2 \cdots \phi_1^{n+1} \\ \phi_n^1 + p_n \phi_{n+1}^n & \phi_n^2 \cdots \phi_n^{n+1} \end{vmatrix}$$

Questa matrice differisce ora dalla terza matrice che compare nella (16) per le sole prime due colonne. Si può però osservare che, se si scrive

$$(6.17) \quad \begin{vmatrix} \phi_1^1 + p_1 \phi_{n+1}^1 & \phi_1^2 + p_1 \phi_{n+1}^2 & \phi_1^3 \cdots \phi_1^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \phi_n^1 + p_n \phi_{n+1}^n & \phi_n^2 + p_n \phi_{n+1}^2 & \phi_n^3 \cdots \phi_n^{n+1} \end{vmatrix}$$

si ottiene effettivamente la somma delle prime tre matrici nell'ultimo membro della (16). Infatti scrivendo la (17) come somma di matrici, si ottengono, oltre alle prime tre matrici (16), anche la matrice

$$\begin{matrix} \phi_{r+1} & \phi_{n+1} \\ \phi_{n+1} & \phi_{n+1} \end{matrix} \begin{vmatrix} p & p_1 & \dots & \dots \\ p_1 & p_n & & \end{vmatrix}$$

che ha determinante nullo perché ha due colonne uguali.

E' chiaro allora che, se si procede in questo modo, la somma delle n+1 matrici (16) può essere scritta come un'unica matrice

$$(6.18) \quad \left\| \left\| \frac{\partial \phi^{\ell}}{\partial q^{\alpha}} + p_{\alpha} \frac{\partial \phi^{\ell}}{\partial q^{n+1}} \right\| \right\|$$

Le matrici a destra nella (15) non sono quindi riducibili alle trasposte dei minori di ordine n delle matrici del sistema (14).

Fra le soluzioni ψ_i del sistema (12) date dalle (15), una almeno, sia essa ψ_k , è diversa da zero e quindi la corrispondente matrice a destra nella (15) è diversa da zero. Di conseguenza una almeno delle matrici (18) è diversa da zero e cioè uno almeno dei sistemi di ordine n estratti da (14) ha determinante non nullo. Perciò sussistono le (13).

Si conclude che se le ϕ^i soddisfano le condizioni a) e b) esse individuano una trasformazione di contatto non omogenea.

Appendice al n. 6.

Nel caso in cui la (6.2) sia data esplicitamente nella forma (2.5)

$$(6.19) \quad dZ - P_i dq^i = a(dz - p_i dq^i) \quad (i = 1 \dots n)$$

ci si riconduce alla (6.2) scrivendo:

$$- \frac{1}{a} dZ + \frac{p_i}{a} dq^i = - dz + p_i dq^i$$

dove ora z ha il ruolo della q^{n+1} nella (5.2).

Posto

$$\psi_{n+1} = -\frac{1}{\epsilon}; \quad \psi_i = \frac{P_i}{a}$$

si ha la forma (2).

Le (9),(10) e (11) si traducono facilmente in termini delle ZQP.

Per Q,Z si ha direttamente :

$$[Z Q^{\alpha} = [Q^{\alpha} Q^{\beta}] = 0$$

poiché le funzioni ϕ, ϕ^i che compaiono nelle (2.1) sono dello stesso tipo del caso precedente.

Analogamente usando le (10) si ha:

$$\begin{aligned} [P_{\alpha} P_{\beta}] &= \left[\frac{\psi_{\alpha}}{\psi_{n+1}}, \frac{\psi_{\beta}}{\psi_{n+1}} \right] = \frac{1}{\psi_{n+1}^2} [\psi_{\alpha} \psi_{\beta}] + \frac{\psi_{\beta}}{\psi_{n+1}} \left[\psi_{\alpha} \frac{1}{\psi_{n+1}} \right] + \frac{\psi_{\alpha}}{\psi_{n+1}} \left[\frac{\psi_{\beta}}{\psi_{n+1}} \right] = \\ &= (\text{per le (10)}) = \frac{1}{\psi_{n+1}^2} \left(\psi_{\alpha} \frac{\partial \psi_{\beta}}{\partial z} - \psi_{\beta} \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial z} \right) - \frac{\psi_{\beta}}{\psi_{n+1}^3} \left(\psi_{\alpha} \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial z} - \psi_{n+1} \frac{\psi_{\alpha}}{\psi_{n+1}} \right) - \\ &\quad - \frac{\psi_{\alpha}}{\psi_{n+1}^3} \left(\psi_{n+1} \frac{\partial \psi_{\beta}}{\partial z} - \psi_{\beta} \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned}$$

dove z ha il ruolo di q^{n+1} .

Inoltre:

$$\begin{aligned} [P_{\alpha} Q^{\beta}] &= - \left[\frac{\psi_{\alpha}}{\psi_{n+1}}, Q^{\beta} \right] = - \frac{1}{\psi_{n+1}} [\psi_{\alpha}, Q^{\beta}] + \frac{1}{\psi_{n+1}^2} [\psi_{n+1}, Q^{\beta}] = - \frac{1}{\psi_{n+1}} \left(\delta_{\beta}^{\alpha} + \psi_{\alpha} \frac{\partial Q^{\beta}}{\partial z} \right) + \\ &\quad + \frac{\psi_{\alpha}}{\psi_{n+1}^2} \left(\delta_{n+1}^{\beta} + \psi_{n+1} \frac{\partial Q^{\beta}}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{1}{\psi_{n+1}} \delta_{\alpha}^{\beta} + \frac{\psi_{\alpha}}{\psi_{n+1}} \delta_{n+1}^{\beta} \end{aligned}$$

se $\alpha \neq \beta$ e $\beta \neq n+1$ risulta $[P_{\alpha} Q^{\beta}] = 0$

Se $\alpha = \beta \neq n+1$ si ha:

$$[P_{\alpha} Q^{\alpha}] = - \frac{1}{\psi_0} = a$$

Se, infine, $\alpha \neq \beta = n+1$ si ha

$$[P_\alpha Z] = \frac{1}{n+1} a = a P_\alpha$$

Raccogliendo

$$(6.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} [ZQ^\alpha] = [Q^\alpha Q^\beta] = [P_\alpha P_\beta] = 0, \quad [P_\alpha Q^\beta] = a \delta_\alpha^\beta \\ [P_\alpha Z] = a P_\alpha \end{array} \right.$$

7. Trasformazioni di contatto non omogenee ristrette. (Trasformazioni canoniche).

Se la funzione ϕ^{n+1} è della forma $\phi^{n+1} \rightarrow q^{n+1} + \phi^{n+1} (q^1 \dots q^n p_1 \dots p_n)$ e le ϕ^α non contengono q^{n+1} , la trasformazione di contatto è detta "ristretta".

Sono di questo tipo le trasformazioni canoniche della meccanica analitica. In seguito si userà sistematicamente l'espressione trasformazioni canoniche (T C).

La relazione (6.3)

$$(6.3) \quad \psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial q^{n+1}} = -1; \quad \psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial q^\alpha} = p_\alpha; \quad \psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial p_\alpha} = 0$$

si scrivono per $\phi^{n+1} \rightarrow q^{n+1} + \phi^{n+1} (q^1 \dots q^n \dots p_1 \dots p_n)$:

$$\psi_{n+1} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial q^1} = -1 \quad \text{cioè} \quad \psi_{n+1} = -1$$

$$\psi_\beta \frac{\partial \phi^\beta}{\partial q^\alpha} + \psi_{n+1} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial q^\alpha} = p_\alpha \quad \text{cioè} \quad \psi_\beta \frac{\partial \phi^\beta}{\partial q^\alpha} = p_\alpha - \psi_{n+1} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial q^\alpha}$$

$$\psi_\beta \frac{\partial \phi^\beta}{\partial p_\alpha} + \psi_{n+1} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial p_\alpha} = 0 \quad \text{cioè} \quad \psi_\beta \frac{\partial \phi^\beta}{\partial p_\alpha} = - \psi_{n+1} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial p_\alpha}$$

o infine

$$(7.1) \quad \psi_{n+1} = -1 ; \psi_{\beta} \frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial q^{\alpha}} = p_{\alpha} + \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial q^{\alpha}} ; \psi_{\beta} \frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial p_{\alpha}} = \frac{\partial \phi^1}{\partial p_{\alpha}}$$

Da questa segue che le ψ sono indipendenti da q^{n+1} .

Le (5.9) si scrivono

$$[\phi^k, \phi^{\ell}] = (\phi^k, \phi^{\ell}) + p_{\alpha} \left(\frac{\partial \phi^k}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial \phi^{\ell}}{\partial q^{n+1}} - \frac{\partial \phi^{\ell}}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial \phi^k}{\partial q^{n+1}} \right) = 0 .$$

Per $k, \ell \neq n+1$ è $\frac{\partial \phi^{k, \ell}}{\partial q^{n+1}} = 0$ e quindi le precedenti si riducono alle relazioni:

$$(\phi^k, \phi^{\ell}) = 0$$

Si ha inoltre

$$[\phi^{n+1}, \phi^{\beta}] = (\phi^{n+1}, \phi^{\beta}) - p_{\alpha} \left(\frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial q^{n+1}} - \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial q^1} \frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial p_{\alpha}} \right) = 0$$

ed essendo $\frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial q^{n+1}} = 0 ; \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial q^1} = 1$, resta $(\phi^{n+1}, \phi^{\beta}) = p_{\alpha} \frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial p_{\alpha}}$

Dalle (6.10) segue

$$[\psi_i, \psi_k] = \psi_i \frac{\partial \psi_k}{\partial q^{n+1}} - \psi_k \frac{\partial \psi_i}{\partial q^{n+1}} = 0$$

essendo le ψ indipendenti da q^{n+1} . Poiché inoltre

$$[\psi_i, \psi_k] = (\psi_i, \psi_k) + p_{\alpha} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial \psi_k}{\partial q^{n+1}} - \frac{\partial \psi_i}{\partial q^{n+1}} \frac{\partial \psi_k}{\partial p_{\alpha}} \right)$$

si ha infine

$$(\psi_i, \psi_k) = 0$$

Dalle (6.11) si ha poi, come sopra:

$$[\Psi_k \phi^i] = (\Psi_k \phi^i) = \delta_k^i + \Psi_k \frac{\partial \phi^i}{\partial q^{n+1}} = \delta_k^i \quad (i \neq n+1)$$

$$(\Psi_k \phi^{n+1}) = \delta_k^{n+1} \quad (i = n+1)$$

e quindi

$$\begin{aligned} [\Psi_\alpha \phi^{n+1}] &= (\Psi_\alpha \phi^{n+1}) + p_\beta \left(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial p_\beta} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial q^{n+1}} - \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial q^{n+1}} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial p_\alpha} \right) = \\ &= \delta_\alpha^{n+1} + \Psi_\alpha \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial q^{n+1}} = \Psi_\alpha \end{aligned}$$

e infine

$$(\Psi_\alpha, \phi^{n+1}) = \Psi_\alpha - p_\beta \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial p_\beta}$$

Raccogliendo

$$(7.2) \left\{ \begin{aligned} (\phi^{\alpha\beta}) &= 0 = (\Psi_\alpha, \Psi_\beta) ; (\Psi_\alpha, \phi^\beta) = \delta_\alpha^\beta \\ (\phi^{n+1}, \phi^\beta) &= p_\alpha \frac{\partial \phi^\beta}{\partial p_\alpha} \\ (\Psi_\alpha, \phi^{n+1}) &= \Psi_\alpha - p_\beta \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial p_\beta} \end{aligned} \right.$$

Sicché per le TC le (6.9),(6.10),(6.11) si riducono alle (7.2). La prima riga di queste relazioni coincide con le (5.16) e mostra che le più generali trasformazioni di contatto, per le quali sussistono le relazioni di commutazione, sono le TC. Si riconosce facilmente che anche l'invarianza delle PP di due funzioni sotto TC sussiste come per le trasformazioni omogenee.

Ricalcando il procedimento del n° 3 si riconosce che:

Se le ϕ^α ($\alpha = 1 \dots n$) sono n funzioni, fra loro indipendenti, delle $q^1 \dots q^n, p_1 \dots p_n$, soddisfacenti le relazioni:

$$(\phi^\alpha, \phi^\beta) = 0$$

e ϕ^{n+1} una qualunque funzione di $q^1 \dots q^n, p_1 \dots p_n$ soddisfacente le relazioni

$$(\phi^{n+1}, \phi^\beta) = p_\alpha \frac{\partial \phi^\beta}{\partial p_\alpha}$$

le equazioni

$$(7.3) \quad Q^{n+1} = q^{n+1} + \phi^{n+1}, \quad Q^\alpha = \phi^\alpha; \quad P_\alpha = \psi_\alpha$$

dove le ψ sono univocamente determinate dalle (6.3), determinano una TC per la quale

$$P_{n+1} dQ^{n+1} + P_\alpha dQ^\alpha = - dq^{n+1} + p_\alpha dq^\alpha$$

cioè, essendo $P_{n+1} = -1$:

$$dQ^{n+1} - P_\alpha dQ^\alpha = dq^{n+1} - p_\alpha dq^\alpha$$

e infine

$$(7.4) \quad P_\alpha dQ^\alpha = p_\alpha dq^\alpha + d\phi^{n+1}.$$

Questa relazione caratterizza le TC.

Viceversa, essendo ϕ^{n+1} funzione delle variabili $q^\alpha p_\alpha$, si ha dalla (7.4):

$$\frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial q^\alpha} = - p_\alpha + P_\gamma \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial q^\alpha}$$

$$\frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial p_\alpha} = P_\gamma \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial p_\alpha}$$

e da queste si ricavano le ultime due righe delle (2).

E' facile riconoscere, infine, che se sono date $2n$ funzioni ϕ^α, ψ_α soddisfacenti le relazioni che compaiono nella prima riga delle (2) è possibile determinare una funzione ϕ^{n+1} che soddisfi le restanti relazioni (2).

Dalle (6.3) si ha infatti:

$$(7.5) \quad \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial q^\alpha} = \psi_\gamma \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial q^\alpha} - p_\alpha; \quad \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial p_\alpha} = \psi_\gamma \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial p_\alpha} .$$

Se le ϕ^α, ψ_α sono date, si può dimostrare che le condizioni espresse dalla prima riga della (2) assicurano che i secondi membri delle (5) siano le derivate di un'unica funzione, ϕ^{n+1} e cioè che le (5) sussistono. Si ha infatti con calcolo diretto:

$$\frac{\partial}{\partial q^\beta} \left(\psi_\gamma \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial q^\alpha} - p_\alpha \right) = \frac{\partial \psi_\gamma}{\partial q^\beta} \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial q^\alpha} + \psi_\gamma \frac{\partial^2 \phi^\gamma}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial q^\alpha} \left(\psi_\gamma \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial q^\beta} - p_\beta \right) = \frac{\partial \psi_\gamma}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial q^\beta} + \psi_\gamma \frac{\partial^2 \phi^\gamma}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}$$

e sottraendo

$$\frac{\partial}{\partial q^\beta} () - \frac{\partial}{\partial q^\alpha} () = \{q^\beta q^\alpha\} = 0$$

essendo $\{q^\beta, q^\alpha\}$ la PL delle q rispetto alle ϕ, ψ .

Analogamente si ha

$$\frac{\partial}{\partial p_\beta} \left(\psi_\gamma \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial p_\alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left(\psi_\gamma \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial p_\beta} \right) = \{p_\alpha p_\beta\} = 0$$

e infine

$$\frac{\partial}{\partial p_\beta} \left(\psi_\gamma \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial q^\alpha} - p_\alpha \right) = \frac{\partial \psi_\gamma}{\partial p_\beta} \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial q^\alpha} + \psi_\gamma \frac{\partial^2 \phi^\gamma}{\partial p_\beta \partial q^\alpha} - \delta_{\alpha\beta}$$

$$\frac{\partial}{\partial q^\alpha} \left(\Psi_\gamma \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial p_\beta} \right) = \frac{\partial \Psi_\gamma}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial p_\beta} + \Psi_\gamma \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial p_\beta \partial q^\alpha}$$

e sottraendo

$$\{ p_\beta, q^\alpha \} - \delta_{\alpha\beta} = \delta_\beta^\alpha - \delta_\alpha^\beta = 0 .$$

(Le PL sono nulle in virtù dell'ipotesi che si annullino le P.P.).

Esiste quindi una funzione ϕ^{n+1} soddisfacente le (5): in definitiva tutte le (2) sono soddisfatte e pertanto le $2n$ funzioni ϕ^α, ψ_α soddisfacenti le relazioni canoniche delle PP, individuano una TC.

Questo risultato sarà usato a proposito dei gruppi di funzioni e, in particolare, nel caso degli integrali primi del moto.

Se le ϕ^β sono omogenee di grado zero, nelle p_α si deve ottenere una trasformazione omogenea. Infatti si consideri il sistema :

$$(\phi^{n+1}, \phi^\beta) = 0 \quad (\beta = 1 \dots n) .$$

Date le ϕ^β questo è un sistema differenziale lineare e la identità di Jacobi mostra che esso è completo: esso possiede quindi $2n - n = n$ integrali indipendenti. Ma le ϕ^β sono già n integrali in virtù delle relazioni di commutazione. Quindi ϕ^{n+1} è funzione delle ϕ^β . Le (4) danno in questo caso

$$\Psi_\beta \frac{\partial \phi^\beta}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \phi^\beta} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial q^\alpha} = p_\alpha ; \quad \Psi_\beta \frac{\partial \phi^\beta}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \phi^\beta} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial p_\alpha} = 0$$

ossia

$$\left(\Psi_\beta - \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \phi^\beta} \right) \frac{\partial \phi^\beta}{\partial q^\alpha} = p_\alpha ; \quad \left(\Psi_\beta - \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \phi^\beta} \right) \frac{\partial \phi^\beta}{\partial p_\alpha} = 0$$

Queste relazioni sono le (3.4) quando si ponga

$$\Psi_\beta \rightarrow \Psi_\beta - \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \phi^\beta}$$

e quindi la trasformazione è omogenea.

Si torni ora alle (3). Se $\left| \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial p_\alpha} \right| \neq 0$ eliminando le p_β dalle relazioni $Q^\alpha = \phi^\alpha$ e sostituendole nella $Q^{n+1} = q^{n+1} + \phi^{n+1}$ si ha

$$(7.6) \quad \phi^{n+1} = Q^{n+1} - q^{n+1} = F(q^1 \dots q^n, Q^1 \dots Q^n);$$

questa funzione in dinamica è detta generatrice della TC.

Più in generale se il rango della matrice $\left| \frac{\partial \phi^i}{\partial p_\beta} \right|$ è $n-r$ esistono, oltre alla (6) altre $r-1$ funzioni $F_\alpha(q^1 \dots q^n; Q^1 \dots Q^n)$ ($\alpha = 2 \dots r$) tali che le equazioni

$$(7.7) \quad F_k(qQ) = 0 \quad (k = 1 \dots r)$$

sono conseguenza dell'annullarsi di $\left| \frac{\partial \phi^\beta}{\partial p^\alpha} \right|$.

Come nel caso omogeneo si ricavano le relazioni:

$$P_\alpha = \frac{\partial F}{\partial Q^\alpha} + \rho^\sigma \frac{\partial F_\sigma}{\partial Q^\alpha}; \quad p_\alpha = - \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} - \rho^\sigma \frac{\partial F_\sigma}{\partial q^\alpha},$$

che si riducono alle (3.7).

$$(7.8) \quad P_\alpha = \frac{\partial F}{\partial Q^\alpha}; \quad p_\alpha = - \frac{\partial F}{\partial q^\alpha}$$

se la matrice ha rango massimo.

Come nel caso omogeneo e nel caso non omogeneo generale, le trasformazioni non omogenee ristrette formano gruppo.

Siano allora $qp \rightarrow \rho n$ e $QP \rightarrow qp$ due TC. Dalle relazioni

$$\begin{aligned} \eta_i d \xi^i &= p_i d q^i + d w_1(q\xi) \\ P_i d Q^i &= p_i d q^i + d w_2(qQ) \end{aligned}$$

sottraendo a m a m si ha

$$P_i d Q^i = \eta_i d \xi^i + d(w_2 - w_1).$$

Detta quindi w la generatrice della trasformazione $\xi_n \rightarrow PQ$, si ha

$$(7.9) \quad w = w_2 - w_1$$

dove naturalmente la funzione w va espressa nelle variabili ξ, Q .

A tale scopo, poiché w_2 dipende dalle q e dalle Q , mentre w_1 dipende dalle ξ e dalle q , basta esprimere le q in funzione delle ξ e delle Q .

Dalla TC di generatrice w_1

$$q^i = a^i(\rho n) \quad p_i = b_i(\rho n)$$

e dalla TC di generatrice w_2

$$Q^i = c^i(qp), \quad P_i = d_i(qp)$$

si ottiene per semplice sostituzione la TC individuata da $w_2 - w_1$

$$Q^i = \bar{c}^i(\rho n) \quad P_i = \bar{d}^i(\rho n)$$

Invertendo le prime n di queste si ottengono le $\rho(Q^i)$ che sostituite nelle $a^i(\rho n)$ forniscono le q^i in funzione delle ξ, Q^t .

Come caso particolare della discussione ora fatta, e come del resto è ovvio dalla (4), se una TC ha generatrice w , la TC inversa ha generatrice $-w$.

In dinamica hanno un ruolo fondamentale le famiglie ad un parametro di TC. In generale una famiglia ad un parametro di trasformazioni di contatto

$$(7.10) \quad Q^i = \phi^i(q, p, t) \quad ; \quad P_i = \psi_i(q, p, t)$$

è una famiglia di trasformazioni tali che per ogni valore di t (in un intervallo opportuno) la trasformazione precedente è di contatto. In particolare se le (10) sono trasformazioni canoniche, per ogni valore di t esiste una funzione generatrice della corrispondente trasformazione. Esiste dunque una famiglia di generatrici, ossia una funzione $F(q, Q, t)$. Poiché

per ogni $t = t_0$ la trasformazione è canonica, sussiste la relazione

$$P_i dQ^i = p_i dq^i + dF_{/t=t_0}$$

nella quale $dF_{/t=t_0}$ denota l'espressione $\frac{\partial F}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial^2 F}{\partial Q^i} dQ^i$.

Aggiungendo e togliendo $\frac{\partial F}{\partial t} dt$ (1) si può scrivere

$$P_i dQ^i = p_i dq^i - \frac{\partial F}{\partial t} dt + dF$$

dove ora dF indica il differenziale totale di F nelle $2n+1$ variabili qQt . Questa relazione è fondamentale in dinamica.

8. Trasformazioni di contatto infinitesime.

Si consideri ancora la famiglia ad un parametro (7.10).

Il caso più interessante è quello in cui (7.10) costituiscano un gruppo ad un parametro (nel parametro t): sia $t = 0$ il valore del parametro corrispondente alla identità, cioè:

$$q^i = \phi^i(qp0) ; p_i = \psi_i(qp0)$$

La trasformazione corrispondente ad un valore δt piccolo del parametro è:

$$(8.1) \quad Q^i = q^i + \xi^i \delta t \quad ; \quad P_i = p_i + \eta_i \delta t .$$

Si cominci col caso in cui le trasformazioni siano omogenee. Introducendo Te (1) nella (2.6) si ha:

$$(8.2) \quad \eta_i + p_k \frac{\partial \xi^k}{\partial q^k} = 0 \quad p_k \frac{\partial \xi^i}{\partial p_k} = 0 .$$

Se si introduce la funzione

$$(8.3) \quad c = p_k \xi^k$$

(1) Si suppone F di classe opportuna in tutti i suoi argomenti.

si ha, utilizzando le (2)

$$(8.4) \quad \frac{\partial c}{\partial q^1} = p_k \frac{\partial \xi^k}{\partial q^1} = -\eta_i ; \quad \frac{\partial c}{\partial p_i} = \xi^i + p_k \frac{\partial \xi^i}{\partial p_k} = \xi^i .$$

Confrontando l'ultima con la (3) si ha

$$(8.5) \quad c = p_k \frac{\partial c}{\partial p_k}$$

e quindi c è omogenea di primo grado nelle p .

Ciò si vede anche utilizzando la (3.9) che in questo caso si scrive

$$p_k \frac{\partial \xi^i}{\partial p_k} = 0 .$$

Le ξ^i sono cioè omogenee di grado zero nelle p e quindi, per la (3), c è omogenea di grado uno in queste variabili.

Viceversa, assegnata una funzione c delle q e delle p , omogenea di grado uno nelle p , le ξ e le η definite dalle (4) soddisfano le (2). Infatti si ha

$$p_k \frac{\partial \phi^k}{\partial p_i} = p_k \frac{\partial^2 c}{\partial p_i \partial p_k}$$

e questa è nulla perché c è omogenea di grado uno nelle p . Inoltre in virtù della (5)

$$p_i \frac{\partial \xi^i}{\partial q^k} = p_i \frac{\partial^2 c}{\partial p_i \partial q^k} = \frac{\partial c}{\partial q^k}$$

e quindi sussistono entrambe le (2).

In conclusione

Ogni trasformazione di contatto omogenea infinitesima è definita da equazione del tipo

$$Q^i = q^i + \frac{\partial c}{\partial p_i} \delta t ; \quad P_i = p_i - \frac{\partial c}{\partial q^i} \delta t$$

dove c è omogenea di primo grado nelle p . Inoltre ogni funzione di questo tipo genera una trasformazione di contatto omogenea infinitesima.

Se la trasformazione non è omogenea, preso $p_{n+1} = -1$ le (6.3) si scrivono:

$$(8.6) \quad \eta_i - \frac{\partial \xi^{n+1}}{\partial q^i} + p_\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial q^i} = 0 ; \quad \frac{\partial \xi^{n+1}}{\partial p_\alpha} - p_\beta \frac{\partial \xi^\beta}{\partial p_\alpha} = 0 \quad (\alpha, \beta = 2 \dots n)$$

e se si pone

$$F = p_\alpha \xi^\alpha - \xi^{n+1}$$

si può scrivere infine:

$$\eta_i = - \frac{\partial F}{\partial q^i} ; \quad \xi^\alpha = \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} ; \quad \xi^{n+1} = p_\alpha \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} - F .$$

Viceversa per ogni funzione F delle $q^1 \dots q^{n+1}, p_1 \dots p_n$ le (6) sono soddisfatte e quindi la più generale TC non omogenea infinitesima è definita da equazioni della forma:

$$(8.7) \quad \delta q^{n+1} (p_\alpha \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} - F) \delta t ; \quad \delta q^\alpha = \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \delta t ; \quad \delta p_i = - \frac{\partial F}{\partial q^i} \delta t$$

con F arbitraria.

Queste ultime relazioni sussistono nella stessa forma anche se la TC è ristretta.

9. Notazione compatta.

Nel seguito sarà conveniente, in qualche caso, disporre di una notazione compatta che renda più spediti i calcoli.

Denotando per comodità le variabili $q^1 \dots q^n, p_1 \dots p_n$ rispettivamente con $\omega^1 \dots \omega^{n+1} \dots \omega^{2n}$, e introducendo la matrice antisimmetrica di ordine $2n$:

$$(9.1) \quad \varepsilon^{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{vmatrix}$$

(dove 0 e I denotano rispettivamente la matrice nulla e la matrice unità entrambe di ordine n), e i simboli $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \omega^\alpha}$, si possono scrivere le

PP nella forma:

$$(9.2) \quad (f \ g) = \epsilon^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} f \partial_{\beta} g$$

mentre le condizioni di canonicità di una trasformazione $\omega \rightarrow \Omega$ si esprimono nella forma:

$$(9.3) \quad (\Omega^{\mu} \ \Omega^{\gamma})_{\omega} = \epsilon^{\mu\gamma} \ .$$

Questa notazione compatta rende molto spediti i calcoli. A titolo di esempio si può calcolare il commutatore di due operatori lineari $X_1 \dots X_2$ del tipo

$$X_s = \frac{\partial f_s}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f_s}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \equiv \epsilon^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} f_s \partial_{\beta} \quad (s=1,2)$$

Risulta per una generica funzione g

$$\begin{aligned} (X_1, X_2)g &= \epsilon^{ik} \partial_i f_1 \partial_k (\epsilon^{r\ell} \partial_r f_2 \partial_{\ell} g) - \epsilon^{r\ell} \partial_r f_2 \partial_{\ell} (\epsilon^{ik} \partial_i f_1 \partial_k g) = \\ &= \epsilon^{ik} \epsilon^{r\ell} (\partial_i f_1 \partial_k \partial_r f_2 \partial_{\ell} g + \partial_i f_1 \partial_r f_2 \partial_k \partial_{\ell} g - \partial_r f_2 \partial_{\ell} \partial_i f_1 \partial_k g - \partial_r f_2 \partial_i f_1 \partial_k \partial_{\ell} g) = \\ &= \epsilon^{ik} \epsilon^{r\ell} (\partial_i f_1 \partial_k \partial_r f_2 \partial_{\ell} g - \partial_r f_2 \partial_{\ell} \partial_i f_1 \partial_k g) \end{aligned}$$

che mostra il fatto ben noto che il commutatore di X_1 e X_2 è un operatore lineare del primo ordine.

D'altra parte si ha pure

$$(f_1(f_2g)) = \epsilon^{ik} \partial_i f_1 \partial_k (\epsilon^{r\ell} \partial_r f_2 \partial_{\ell} g)$$

e confrontando col secondo membro della (3) si vede che si può scrivere:

$$(X_1 X_2)g = (f_1(f_2g)) - (f_2(f_1g))$$

e, per l'identità di Jacobi

$$(9.4) \quad (X_1 X_2)g = (g(f_1 f_2)) = \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta (f_i f_k) \partial_\alpha g.$$

In particolare la (4) permette di controllare con facilità se un sistema del tipo:

$$(9.5) \quad X_i f = (f_i f) = 0 \quad (i = 1 \dots r < 2n)$$

è completo o no. Per es. se nella (4) risulta (v.III n° 1) per ogni i e k: $(f_i f_k) = F_{ik}(f_1 \dots f_r)$ si ha

$$\begin{aligned} (X_1 X_2) &= \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta F_{ik} \partial_\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{ik}}{\partial f_\sigma} \partial_\beta f_\sigma \partial_\alpha = \\ &= - \frac{\partial F_{ik}}{\partial f_\sigma} X_\sigma \end{aligned}$$

Poiché i commutatori degli operatori X sono combinazioni lineari degli operatori stessi un sistema di tipo (5) è completo (CAP.I n. 5)

Nel seguito, a seconda della convenienza, si userà la notazione compatta o la notazione esplicita $q p$.

C A P I T O L O III

Gruppi di funzioni.

1. Gruppi di funzioni. Basi di un gruppo.

La teoria dei gruppi di funzioni costituisce un ponte di passaggio fra la teoria delle trasformazioni canoniche e la teoria degli integrali primi del moto.

Sia dato un sistema di s funzioni $f_1 \dots f_s$, fra loro indipendenti, delle variabili $q^1 \dots q^n \ p_1 \dots p_n$. Le loro $\binom{n}{2}$ PP sono esse stesse funzioni delle $q \ p$. Se qualcuna di tali funzioni non è esprimibile come funzione delle $f_1 \dots f_s$, la si aggiunga al sistema di partenza e si formino tutte le PP del nuovo sistema. Così procedendo si perviene infine ad un sistema di $r (\leq 2n)$ funzioni $f_1 \dots f_r$ aventi la proprietà che la PP di ogni coppia di esse è funzione delle $f_1 \dots f_r$ stesse. Ciò è vero anche per tutte le funzioni delle $f_1 \dots f_r$. Infatti se $F_1 = F_1(f_1 \dots f_r)$ e $F_2 = F_2(f_2 \dots f_r)$ si ha

$$(F_1, F_2)_{qp} = \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \frac{\partial F_2}{\partial f_k} (f_1; f_2)_{qp}$$

e questa è ancora una funzione delle $f_1 \dots f_r$.

L'insieme delle $f_1 \dots f_r$ e delle funzioni di esse costituisce un gruppo di funzioni di rango r .

Le r funzioni $f_1 \dots f_r$ o una qualunque r ^{upla} indipendente del gruppo, costituisce una base del gruppo stesso.

Un sottoinsieme del gruppo che sia esso stesso un gruppo è poi un sottogruppo del gruppo dato.

Sussiste la proposizione la cui dimostrazione è lasciata come esercizio.

Se due gruppi di funzioni di ranghi r_1 e r_2 hanno intersezione non vuota, le funzioni comuni costituiscono un sottogruppo di ognuno dei due

gruppi.

Si consideri ora il sistema

$$(1.1) \quad (f_i, g) = 0 \quad (i = 1 \dots r) .$$

Introdotti gli operatori lineari

$$X_i = \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q^k} - \frac{\partial f_i}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial p_k}$$

si ha (II n° 9)

$$(X_i, X_k)g = - \frac{\partial F_{ik}}{\partial f_\sigma} X_\sigma g = 0$$

cioè il sistema (1) è completo. Esso possiede $2n-r$ soluzioni indipendenti $g_1 \dots g_{2n-r}$ le quali, come è facile riconoscere, costituiscono un gruppo di ordine $2n-r$. Infatti dall'identità di Jacobi segue immediatamente che tutte le PP: (g_i, g_j) sono soluzioni del sistema (1) e quindi sono funzioni delle q .

Il gruppo $f_1 \dots f_r$ individua perciò un gruppo di base $g_1 \dots g_{2n-r}$ le cui funzioni hanno PP nulle con le f_i (si dice anche che le g sono in involuzione con le f).

I due gruppi sono detti reciproci e le funzioni di ognuno dei due gruppi sono dette singolari per l'altro gruppo.

Non è escluso naturalmente che la intersezione dei due gruppi sia non vuota e cioè che un gruppo contenga proprie funzioni singolari. È ovvio che le funzioni singolari di un gruppo costituiscono un sottogruppo del gruppo dato e quindi anche del gruppo reciproco. Come corollario si ha che il gruppo reciproco di un gruppo che non contiene funzioni singolari, non contiene neanche esso funzioni singolari.

In particolare un gruppo costituito tutto da funzioni singolari è detto commutativo .

Esso è un sottogruppo del proprio gruppo reciproco e quindi si ha

$r \leq 2n-r$ ossia $r \leq n$.

Poiché si ha, per ogni funzione \bar{f} del gruppo

$$(f_i, \bar{f}) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial f_k} (f_i, f_k)$$

le funzioni singolari appartenenti al gruppo sono le soluzioni del sistema di r equazioni

$$(1.2) \quad (f_i, f_k) \frac{\partial \bar{f}}{\partial f_k} = 0$$

nelle r variabili $f_1 \dots f_r$. Questo sistema ha soluzioni $\bar{f}(f_1 \dots f_r)$ non costanti se e solo se il rango della matrice $\|(f_i, f_k)\|$ è minore di r .

D'altra parte il sistema (2) è del tipo (9.5) Cap. II e quindi è completo. Perciò se $r - m$ è il rango della matrice $\|(f_i, f_k)\|$, il sistema (2) ammette m soluzioni indipendenti e quindi il gruppo dato contiene m funzioni singolari.

Il numero di funzioni singolari coincide pure col numero di relazioni funzionali indipendenti che sussistono fra le funzioni del gruppo dato e quelle del gruppo reciproco.

Infatti se esistono m relazioni funzionali fra le funzioni della base e quelle di una base reciproca g , la matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q^1} & \frac{\partial f_2}{\partial q^1} & \frac{\partial g_1}{\partial q^1} & \frac{\partial g_{2n-r}}{\partial q^1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial p_n} & \frac{\partial f_2}{\partial p_n} & \frac{\partial g_1}{\partial p_n} & \frac{\partial g_{2n-r}}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

ha rango $2n-m$ e quindi esistono m combinazioni lineari nulle delle colonne, per es.

$$\frac{\partial f_i}{\partial q^k} = \sum_{s=m+1}^r \mu_s \frac{\partial f_s}{\partial q^k} + \sum_{s=1}^{2n-r} \mu_s \frac{\partial g_s}{\partial q^k} \quad (i = 1 \dots m)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_k} = \sum_{s=m+1}^r \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial q^k} + \sum_{s=1}^{2n-r} \mu_s \frac{\partial g_s}{\partial q^k} \quad (i = 1 \dots m)$$

si ha così

$$\begin{aligned} (f_i f_j) &= \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \frac{\partial f_j}{\partial q^k} - \frac{\partial f_j}{\partial q^k} \frac{\partial f_i}{\partial p_k} = \\ &= \sum_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial p_k} \frac{\partial f_j}{\partial q^k} + \sum_s \mu_s \frac{\partial g_s}{\partial p_k} \frac{\partial f_j}{\partial q^k} - \\ &- \sum_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial q^k} \frac{\partial f_i}{\partial p_k} - \sum_s \mu_s \frac{\partial g_s}{\partial q^k} \frac{\partial f_i}{\partial p_k} = \\ &= \sum_s \lambda_s (f_s f_j) + \sum_s \mu_s (g_s f_j) \quad \begin{matrix} (i = 1 \dots m) \\ (j = m+1 \dots r) \end{matrix} \\ &= \sum_s \lambda_s (f_s f_j) \end{aligned}$$

poiché le g_s sono singolari per il gruppo dato.

La matrice $(f_{\alpha \beta})$ ha dunque m righe combinazioni lineari delle altre e quindi come si è appena visto, esistono fra le f m funzioni singolari.

D'altra parte se il gruppo contiene m funzioni singolari ϕ_i queste sono funzioni delle funzioni di base

$$\phi_i = A_i(f_1 \dots f_r) \quad i = 1 \dots m$$

Ma le g sono soluzioni del sistema completo

$$(f_{\alpha} g) = 0 \quad (\alpha = 1 \dots r)$$

che dà il gruppo reciproco. Le funzioni g , come soluzioni di detto sistema sono quindi funzioni della base del gruppo reciproco e si ha:

$$\phi_i = A_i(f_1 \dots f_r) = B_i(g_1 \dots g_r) \quad i = 1 \dots m$$

e quindi esistono m relazioni funzionali fra le funzioni del gruppo dato e del suo reciproco.

2. Basi canoniche di un gruppo.

Se le PP delle funzioni di una base hanno soltanto valore 0 o 1, la base è detta canonica.

Un gruppo non commutativo possiede sempre una base canonica. Infatti sia per es. f_1 una funzione non singolare (tale funzione esiste perché il gruppo per ipotesi è non commutativo) e si consideri l'equazione

$$(f_1 f) = \frac{\partial f}{\partial f_k} (f_1 f_k) = -1$$

o esplicitamente:

$$\sum_{k=2}^r (f_1 f_k) \frac{\partial f}{\partial f_k} = -1.$$

Questa equazione lineare del primo ordine ammette certamente soluzioni (I n° 2) e una sua generica soluzione, poiché non sono tutte nulle le $\frac{\partial f}{\partial f_k}$ ($k = 2 \dots r$), è funzione di almeno una f_k con $k \neq 1$. Se ψ_1 è una soluzione e se si indica con ϕ^1 la funzione f_1 , si ha

$$(\psi_1, \phi^1) = 1.$$

Le funzioni ψ_1 e ϕ_1 e $r-2$ funzioni indipendenti del gruppo, costituiscono una base di questo.

Si consideri il sistema omogeneo:

$$(2.1) \quad \begin{cases} (\phi^1, f) = \frac{\partial f}{\partial \psi_1} + (\phi_1 f_\alpha) \frac{\partial f}{\partial f_\alpha} = 0 \\ (\psi_1 f) = -\frac{\partial f}{\partial \phi^1} + (\psi_1 f_\alpha) \frac{\partial f}{\partial f_\alpha} = 0 \end{cases} \quad (\alpha = 3 \dots r)$$

Il commutatore degli operatori lineari nei primi membri si calcola nel modo visto nel 9 del Cap. II e si ha:

$$(\phi^1(\psi_1 f)) - (\psi_1(\phi^1 f)) = ((\phi^1, \psi_1)f) = (1f) = 0.$$

Il sistema è quindi completo. Nelle variabili indipendenti $\phi^1, \psi_1, f_3, \dots, f_r$

esso possiede $r-2$ soluzioni (funzioni di tali variabili): $\bar{f}_3 \dots \bar{f}_r$.

La identità di Jacobi mostra poi che la PP di una generica coppia di soluzioni è ancora una soluzione del sistema (1) e quindi è funzione delle $\bar{f}_3 \dots \bar{f}_r$: le funzioni $\bar{f}_3 \dots \bar{f}_r$ costituiscono perciò un sottogruppo del gruppo di partenza. Se questo sottogruppo è commutativo si ha:

$$(\phi^1 \psi_1) = 1 ; (\phi^1 \bar{f}_\alpha) = (\psi_1 \bar{f}_\alpha) = (\bar{f}_\alpha \bar{f}_\beta) = 0 \quad (\alpha, \beta = 3 \dots r);$$

pertanto le funzioni $\phi^1 \psi_1 \bar{f}_3 \dots \bar{f}_r$ costituiscono una base canonica.

Se il sottogruppo non è commutativo, si procede per esso come per il gruppo di partenza fino a giungere ad un gruppo commutativo o ad esaurire tutte le funzioni. La base così ottenuta:

$$(2.2) \quad \phi^1 \psi_1 \dots \psi_m \quad (m+q = r; q < r)$$

è canonica perché soddisfa le relazioni:

$$(2.3) \quad (\phi^i \psi^k) = 0; (\psi_i \psi_j) = 0 \quad (\phi^i \psi^k) = \delta_{ij}^k$$

$$\left(\begin{array}{l} i, k = 1 \dots m+q \\ \alpha, \beta = 1 \dots m \end{array} \right)$$

Le funzioni $\phi^{m+1} \dots \phi^{m+q}$ sono ovviamente funzioni singolari del gruppo e quindi appartengono anche al gruppo reciproco. Inoltre è chiaro, in base alla definizione di sottogruppo, che ogni sottoinsieme di funzioni della base canonica è base di un sottogruppo del gruppo dato. Se allora dalla base canonica si omette una delle funzioni, per es. ϕ^{m+1} , le funzioni restanti

$$(2.4) \quad \psi_1 \dots \psi_m \phi^1 \dots \phi^{m+2} \dots \phi^{m+q}$$

costituiscono la base di un sottogruppo. D'altra parte la funzione ϕ^{m+1} è singolare non solo per il gruppo dato, ma anche per il sottogruppo e pertanto appartiene al reciproco di questo il quale, quindi, è del tipo:

$$(2.5) \quad \phi^{m+1} u_1 \dots u_{2(n-m)-q+1} .$$

La funzione ϕ^{m+1} non è singolare per il gruppo (5), perché in tal caso essa apparterebbe al reciproco di (5) e cioè al gruppo (4) al quale invece non appartiene). Ciò può anche riconoscersi osservando che le funzioni del gruppo reciproco del gruppo (2) sono le funzioni $\phi^{m+1} \dots \phi^{m+q}$ più certe funzioni che saranno indicate complessivamente con X. Le funzioni del reciproco del gruppo (4) sono $\phi^{m+2} \dots \phi^{m+q}, X$. Se ϕ^{m+1} commutasse con tutte le funzioni del gruppo (5) esso apparterebbe al reciproco di tale gruppo, cioè al gruppo (4) e quindi i gruppi (2) e (4) avrebbero lo stesso gruppo reciproco. Ora ciò non è possibile perché il reciproco di (2) contiene $2n-(2m+q)$ funzioni e il reciproco di (4), contiene $2n-(2m+q-1)$ funzioni.

Essendo ϕ^{m+1} non singolare per il gruppo (5), si può trovare per questo gruppo una funzione ψ_{m+1} non appartenente al gruppo (2) e tale che: $(\psi_{m+1}, \phi^{m+1}) = 1$. Aggiungendo ψ_{m+1} al gruppo di partenza (2) si ottiene un gruppo di ordine $r+1$ per il quale le funzioni $\psi_1 \dots \psi_{m+1}, \phi^1 \dots \phi^{m+q}$ costituiscono una base canonica.

Inoltre il gruppo (2) è un sottogruppo del nuovo gruppo.

Ripetendo il procedimento per le funzioni $\phi^{m+2} \dots \phi^{m+q}$ si perviene infine ad una base canonica di un gruppo di ordine $r+q$ del quale il gruppo di partenza è un sottogruppo.

Le relazioni canoniche

$$(2.6) \quad (\phi^i, \phi^k) = 0 = (\psi_i, \psi_k); (\psi_i, \phi^k) = \delta_i^k \quad (i, k = 1 \dots m+1)$$

mostrano che il nuovo gruppo non contiene funzioni singolari. Infatti per una generica funzione del gruppo risulta per le (6)

$$(f, \phi^i) = \frac{\partial f}{\partial \psi^i}; \quad (f, \psi_i) = - \frac{\partial f}{\partial \phi^i}$$

che mostrano che nessuna funzione effettivamente dipendente dalle ϕ^i, ψ_j è singolare.

Poiché il gruppo di ordine $r+m$ al quale si è pervenuti è privo di funzioni singolari, il gruppo reciproco ha la stessa proprietà (n. 1): tale gruppo ha rango $2n-(r+m)$.

Denotando con $\phi^{r+m+1} \dots \phi^n, \psi_{r+m+1} \dots \psi_n$ una sua base canonica, si ha infine che l'unione dei due gruppi costituisce un gruppo di ordine $2n$ privo di funzioni singolari (gruppo massimale) per il quale l'insieme delle funzioni $\phi^1 \dots \phi^n, \psi_1 \dots \psi_n$ costituisce una base canonica

$$(2.7) \quad (\phi^i \phi^k) = 0 = (\psi_i \psi_k); (\psi_i \phi^k) = \delta_i^k \quad (i, k = 1 \dots n)$$

Raccogliendo si ha:

Un gruppo di ordine r è sottogruppo di un gruppo di ordine $2n$ per il quale esiste una base canonica, cioè una base soddisfacente le (7).

Ricordando i risultati del Cap. II n. 7, si riconosce che le funzioni ϕ^i, ψ_j individuano una trasformazione di contatto non omogenea ristretta (trasformazione canonica). In particolare se le q^i sono omogenee di grado zero nelle p , la trasformazione di contatto è omogenea.

Siano dati due gruppi dello stesso ordine e contenenti lo stesso numero di funzioni singolari. Entrambi i gruppi possono essere estesi a gruppi di ordine $2n$, privi di funzioni singolari. Siano $\phi^1 \dots \phi^n, \psi_1 \dots \psi_n$ e $\phi'^1 \dots \phi'^n, \psi'_1 \dots \psi'_n$ due basi rispettive dei gruppi estesi. In virtù dei risultati del Cap. II n. 7 esistono due funzioni, ϕ^{n+1}, ϕ'^{n+1} tali che le relazioni:

$$(2.8) \quad Q^n = q^{n+1} + \phi^{n+1}(qp); \quad Q^i = \phi^i(qp); \quad P_i = \psi_i(qp)$$

$$(2.9) \quad Q'^{n+1} = q'^{n+1} + \phi'^{n+1}(q'p'); \quad Q'^i = \phi'^i(q'p'); \quad P'_i = \psi'_i(q'p')$$

definiscono due trasformazioni canoniche.

Le trasformazioni

$$qp \rightarrow QP ; QP \rightarrow Q'P' ; Q'P' \rightarrow q'p'$$

sono tutte e tre canoniche (la seconda è l'identità e la terza è l'inversa della (9) che è canonica) e quindi la trasformazione $qp \rightarrow q'p'$ è pur essa canonica (II n° 7).

Essa trasforma le funzioni $\phi^i \psi_i$ nelle funzioni $\phi'^i \psi'_i$ e pertanto può essere individuata in forma implicita dalle $2n$ uguaglianze

$$(2.10) \quad \phi^i(qp) = \phi'^i(q'p'); \quad \psi_i(qp) = \psi'_i(q'p').$$

Alle (13) va aggiunta la relazione:

$$(2.12) \quad Q'^{n+1} + \phi'^{n+1} = q^{n+1} + \phi^{n+1}.$$

D'altra parte le funzioni $\phi'^i, \psi'_i(\phi'^i, \psi'_i)$ in base ai risultati del Cap. II n. 7 individuano, a meno di una costante additiva, la funzione $\phi'^{n+1}(\phi'^{n+1})$ e quindi in sostanza la trasformazione che realmente interessa è quella espressa dalle (10), nelle quali non compaiono le variabili con indice $n+1$.

In meccanica analitica la situazione è esattamente la stessa, come si vedrà nei Capp. IV e V.

3. Gruppi massimali dipendenti da un parametro.

Sia $f_i(q, p, t)$ una base di un gruppo di funzioni di ordine $2n$ nelle $2n$ variabili qp , priva di funzioni singolari (gruppo massimale). Si supponga inoltre che il gruppo dipenda da un parametro t e cioè che le funzioni $f_1 \dots f_{2n}$ costituiscano una base di un gruppo per ogni valore di t in un aperto opportuno.

E' possibile allora dimostrare che ogni base del gruppo è sistema completo di soluzioni di una equazione a derivate parziali del primo ordine, avente forma standard.

Per dedurre l'equazione, si consideri la matrice a $2n$ righe e $2n+1$ colonne (si usa la notazione compatta (II n° 9)

$$(3.1) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial \omega^1} & \frac{\partial f^1}{\partial \omega^{2n}} & \frac{\partial f^1}{\partial t} \\ \frac{\partial f^{2n}}{\partial \omega^1} & \frac{\partial f^{2n}}{\partial \omega^{2n}} & \frac{\partial f^{2n}}{\partial t} \end{vmatrix}$$

Si indichino rispett. con x^α e x^t i minori di ordine $2n$ di questa matrice ottenuti omettendo la colonna delle derivate rispetto ad ω^α e a t rispettivamente.

Poiché le f , come funzioni delle ω sono indipendenti, risulta

$$(3.2) \quad x^t \neq 0$$

Poiché, inoltre, la matrice (1) ha rango $2n$, il sistema

$$x^{-\alpha} \frac{\partial f^i}{\partial \omega^\alpha} + x^t \frac{\partial f^i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1 \dots 2n)$$

nelle $2n+1$ incognite $x^{-\alpha}, x^t$, ammette autosoluzioni e poiché si tratta di un sistema di $2n$ equazioni in $2n+1$ incognite, queste ultime sono proporzionali ai minori della (1).

Viceversa con queste soluzioni $\bar{x}^{-\alpha}, \bar{x}^t$ si può costruire una equazione a derivate parziali

$$(3.3) \quad \bar{x}^{-\alpha} \frac{\partial f}{\partial \omega^\alpha} + \bar{x}^t \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

che ha ovviamente un sistema di soluzioni coincidente con le $2n$ funzioni date $f_1 \dots f_{2n}$.

Ogni funzione delle soluzioni di (3) è anch'essa una soluzione di (3): di conseguenza, quando le f_i costituiscono un gruppo di funzioni, le PP $(f^i f^k)$ sono anch'esse soluzioni di tale equazione

$$(3.4) \quad \bar{x}^{-\alpha} \frac{\partial (f^i f^k)}{\partial \omega^\alpha} + \bar{x}^t \frac{\partial (f^i f^k)}{\partial t} = 0$$

Le (4) si possono scrivere esplicitamente

$$(3.5) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \omega^1} (f^i f^k) & \dots & \frac{\partial}{\partial \omega^{2n}} (f^i f^k) & \frac{\partial}{\partial t} (f^i f^k) \\ \frac{\partial}{\partial \omega^1} f^1 & \dots & \frac{\partial}{\partial \omega^{2n}} f^1 & \frac{\partial}{\partial t} f^1 \\ \frac{\partial}{\partial \omega^1} f^{2n} & \dots & \frac{\partial}{\partial \omega^{2n}} f^{2n} & \frac{\partial}{\partial t} f^{2n} \end{vmatrix} = 0$$

e queste danno una condizione necessaria perché le f^i costituiscano un gruppo (massimale).

E' facile riconoscere che le (5) danno una condizione pure sufficiente perché le f costituiscano un gruppo massimale ad un parametro. Infatti se si esegue la trasformazione di variabili

$$\begin{cases} \xi^i = f^i(\omega, t) \\ t = t \end{cases}$$

in un sistema del tipo

$$(3.6) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial a^{ik}}{\partial \omega^1} & \frac{\partial a^{ik}}{\partial t} \\ \frac{\partial f^1}{\partial \omega^1} & \frac{\partial f^1}{\partial t} \\ \frac{\partial f^{2n}}{\partial \omega^1} & \frac{\partial f^{2n}}{\partial t} \end{vmatrix} = 0$$

le funzioni $a^{ik}(\omega, t)$ si mutano in certe funzioni $\bar{a}^{ik}(\xi, t)$:

$$(3.7) \quad a^{ik}(\omega, t) = \bar{a}^{ik}(\xi, t)$$

e la prima riga delle (6) si può scrivere:

$$\frac{\partial a^{-ik}}{\partial \xi^r} \quad \frac{\partial f^r}{\partial \omega^1} \quad \frac{\partial a^{ik}}{\partial t}$$

In base alle (6) i coefficienti $\frac{\partial a^{-ik}}{\partial \xi^r}$ debbono essere gli stessi anche per gli elementi dell'ultima colonna e cioè si deve avere:

$$\frac{\partial a^{ik}}{\partial t} = \frac{\partial a^{-ik}}{\partial \xi^r} \frac{\partial f^r}{\partial t}$$

D'altra parte dalle (7) segue:

$$\frac{\partial a^{ik}}{\partial t} = \frac{\partial a^{-ik}}{\partial \xi^r} \frac{\partial \xi^r}{\partial t} + \frac{\partial a^{-ik}}{\partial t}$$

e confrontando

$$\frac{\partial a^{-ik}}{\partial t} = 0$$

Perciò le a^{-ik} sono funzioni solo delle ξ^r e non di t . Allora quando $a^{ik} = (f^i f^k)$ ciò equivale a dire che le f^i costituiscono un gruppo e cioè che il sistema (6) costituisce una condizione sufficiente perché le f^i forniscano un gruppo.

Si ha quindi la seguente proposizione:

Condizione necessaria e sufficiente perché $2n$ funzioni indipendenti $f^1(\cdot, t) \dots f^{2n}(\cdot, t)$ costituiscano una base di un gruppo massimale e che esse siano soluzioni del sistema (6).

In virtù della (2) si può ora porre

$$x^\alpha = \frac{\bar{x}^\alpha}{x^t}$$

e si può scrivere la (3) nella forma:

$$(3.8) \quad \bar{x}^\alpha_{,\alpha} f + \bar{x}^\alpha_t f = 0$$

Questa equazione ha la forma della equazione degli integrali primi di un sistema canonico (v. V n. 1) se esiste una funzione h tale che

$$(3.9) \quad \bar{x}^\alpha = \epsilon^{\beta\alpha} g_\beta h$$

dove la matrice $\epsilon^{\beta\alpha}$ è definita dalla (9.1) Cap. II.

Per riconoscere l'esistenza di h , si osservi che, moltiplicando la (9) per l'inversa $\epsilon_{\alpha\gamma}$ ci $\epsilon^{\beta\alpha}$ si ha:

$$(3.10) \quad \partial_{\beta} h = \epsilon_{\alpha\gamma} x^{\alpha}$$

e quindi le quantità $\epsilon_{\alpha\gamma} x^{\alpha}$ debbono essere le derivate di un'unica funzione. Per l'esistenza di h è quindi necessario e sufficiente che:

$$(3.11) \quad \partial_{\gamma} (\epsilon_{\alpha\beta} x^{\alpha}) = \partial_{\beta} (\epsilon_{\alpha\gamma} x^{\alpha})$$

cioè

$$\epsilon_{\alpha\beta} \partial_{\gamma} x^{\alpha} = \epsilon_{\alpha\gamma} \partial_{\beta} x^{\alpha}.$$

Moltiplicando per $\epsilon^{\rho\beta} \epsilon^{\sigma\gamma}$ si ha:

$$(3.11') \quad \epsilon^{\sigma\gamma} \partial_{\gamma} x^{\rho} = \epsilon^{\rho\beta} \partial_{\beta} x^{\sigma}.$$

Viceversa moltiplicando le (11') per $\epsilon_{\mu\rho} \epsilon_{\gamma\sigma}$ si ottengono le (11): questi due complessi di relazioni sono quindi equivalenti e pertanto le (11') assicurano la validità delle (10).

Si consideri ora la (8). Se le sue soluzioni costituiscono un gruppo, sussistono pure le equazioni:

$$x^{\alpha} \partial_{\alpha} (f^i f^k) + \partial_t (f^i f^k) = 0.$$

Esplicitando si ha dopo aver ripetutamente utilizzato la (8):

$$\begin{aligned} & \epsilon^{\mu\gamma} \partial_{\mu} f^i [\partial_{\gamma} (x^{\alpha} \partial_{\alpha} f^k) - \partial_{\gamma} x^{\alpha} \partial_{\alpha} f^k] + \epsilon^{\mu\gamma} \partial_{\gamma} f^k [\partial_{\mu} (x^{\alpha} \partial_{\alpha} f^i) - \\ & - \partial_{\mu} x^{\alpha} \partial_{\alpha} f^i] + \epsilon^{\mu\gamma} \partial_{\mu} [-x^{\alpha} \partial_{\alpha} f^i] \partial_{\gamma} f^k + \epsilon^{\mu\gamma} \partial_{\mu} f^i \partial_{\gamma} [-x^{\alpha} \partial_{\alpha} f^k] = 0 \end{aligned}$$

e in definitiva

$$\epsilon^{\mu\gamma} \partial_{\gamma} f^k \partial_{\mu} x^{\alpha} \partial_{\alpha} f^i + \epsilon^{\mu\gamma} \partial_{\mu} f^i \partial_{\gamma} x^{\alpha} \partial_{\alpha} f^k = 0.$$

Un opportuno scambio di indici permette infine di scrivere

$$(\varepsilon^{\rho\gamma} \partial_{\rho} X^{\mu} - \varepsilon^{\mu\sigma} \partial_{\rho} X^{\gamma}) \partial_{\mu} f^i_{\gamma} f^k = 0 \quad .$$

Posto
$$z^{\mu\gamma} = \varepsilon^{\rho\gamma} \partial_{\rho} X^{\mu} - \varepsilon^{\mu\rho} \partial_{\rho} X^{\gamma}$$

l'ultimo sistema si può scrivere

$$z^{\mu\gamma} \partial_{\mu} f^i_{\gamma} f^k = 0$$

Se questo sistema si scrive nella forma

$$c^{\gamma i}_{\gamma} f^k = 0$$

poiché esso ha $2n$ soluzioni f^k , risulta $c^{\gamma i} = 0$ cioè

$$z^{\mu\gamma} \partial_{\mu} f^i = 0$$

e poiché questo sistema a sua volta ha $2n$ soluzioni, risulta

$$z^{\mu\gamma} = 0$$

e cioè sono vere le (11') e, in definitiva, le (10).

Resta così dimostrata l'esistenza di h . Di conseguenza la (8) si può scrivere nella forma:

$$(3.12) \quad (h, f) + \partial_t f = 0.$$

D'altra parte è ovvio che le soluzioni di questa equazione costituiscono un gruppo di funzioni di ordine $2n$ e quindi si ha:

Teorema. Condizione necessaria e sufficiente perché $2n$ funzioni indipendenti $f^i(\omega t)$ costituiscano una base di un gruppo di ordine $2n$, è che esista una funzione h tale che esse siano soluzioni della (12).

La funzione h sarà detta hamiltoniana del gruppo.

Se si esegue una trasformazione canonica

$$(3.15) \quad \omega^\mu = \phi^\mu(\Omega t)$$

$$(3.16) \quad \left\| \frac{\partial \phi^\mu}{\partial \Omega^\gamma} \right\| \neq 0$$

si ha (cfr. (9.3) del Cap. II)

$$(3.17) \quad (\phi^\mu \phi^\gamma)_{,\Omega} = \varepsilon^{\mu\gamma}$$

e quindi le ϕ^μ costituiscono un gruppo di funzioni perché le loro PP sono funzioni (in questo caso costanti) delle ϕ stesse.

Per il teor. precedente esiste una funzione hamiltoniana, cioè una funzione \mathcal{U} tale che

$$(3.18) \quad (\mathcal{U} \phi^\mu)_{,\Omega} + \frac{\partial \phi^\mu}{\partial t} = 0.$$

Applicando la (15) al sistema canonico

$$(3.19) \quad \omega^\mu = (h \omega^\mu) = \varepsilon^{\alpha\mu} \frac{\partial h}{\partial \omega^\alpha}$$

si ha, utilizzando la (17) e cioè ponendo $(\phi^\alpha \phi^\mu)$ in luogo di $\varepsilon^{\alpha\mu}$:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}^\mu &= \frac{\partial \phi^\mu}{\partial \Omega^\rho} \dot{\Omega}^\rho + \frac{\partial \phi^\mu}{\partial t} = (\phi^\alpha \phi^\mu) \frac{\partial h}{\partial \omega^\alpha} = \\ &= \varepsilon^{\rho\sigma} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \Omega^\rho} \frac{\partial \phi^\mu}{\partial \Omega^\sigma} \frac{\partial h}{\partial \Omega^\beta} \frac{\partial \Omega^\beta}{\partial \omega^\alpha} \end{aligned}$$

dove $\bar{h}(\Omega t) = h(\omega t)$ è il trasformato di h .

Si ha dunque

$$\frac{\partial \phi^\mu}{\partial \Omega^\rho} \dot{\Omega}^\rho + \frac{\partial \phi^\mu}{\partial t} = \varepsilon^{\beta\sigma} \frac{\partial \phi^\mu}{\partial \Omega^\sigma} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \Omega^\beta} = (\bar{h}, \phi^\mu)_{,\Omega}.$$

Utilizzando la (18) si ha

$$\frac{\partial \phi^\mu}{\partial \Omega^\rho} \dot{\Omega}^\rho - (\mathcal{U} \phi^\mu)_{,\Omega} - \varepsilon^{\beta\sigma} \frac{\partial \phi^\mu}{\partial \Omega^\sigma} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \Omega^\beta} = 0$$

e infine

$$\frac{\partial \phi^\mu}{\partial \Omega^\rho} (\dot{\Omega}^\rho - \varepsilon^{\beta\rho} \frac{\partial u}{\partial \Omega^\beta} - \varepsilon^{\beta\rho} \frac{\partial h}{\partial \Omega^\beta}) = 0$$

e per la (16)

$$(3.20) \quad \dot{\Omega}^\rho = \varepsilon^{\beta\rho} \frac{\partial}{\partial \Omega^\beta} (\bar{h} + u) = (\bar{h} + u, \Omega^\rho)_\Omega \equiv (H, \Omega^\rho)_\Omega$$

Si ha quindi un sistema canonico nel quale il nuovo hamiltoniano è la somma dell'hamiltoniano trasformato $\bar{h}(\Omega t)$ più la funzione $u(\Omega t)$ che rappresenta la parte intimamente legata alla TC usata.

L'osservazione precedente permette di determinare l'hamiltoniana del sistema canonico trasformato del sistema (20).

Infatti per le (7.8) Cap. II si ha

$$(3.21) \quad p_i = - \frac{\partial F}{\partial q^i}$$

dove F è la generatrice della (15). Ma, in generale come è facile ri conoscere, si ha, per ogni funzione f :

$$(3.22) \quad \frac{\partial f}{\partial p_i} = (f, q^i) ; \quad \frac{\partial f}{\partial q^i} = - (f, p_i)$$

e quindi dalla (21)

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(- \frac{\partial F}{\partial q^i} \right) = - \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) = - \left(\frac{\partial F}{\partial t}, p_i \right)$$

Allo stesso risultato si perviene direttamente osservando che:

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = - \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial q^k} [q(\bar{q}, \bar{p}, t), \bar{q}, t] \frac{\partial q^k}{\partial t} - \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial t}$$

e

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial p}, p_i \right) &= \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial p_k} \frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q^k} \frac{\partial p_i}{\partial p_k} = - \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q^k} \delta_k^i \\ &= - \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q^i} - \frac{\partial^2 F}{\partial q^k \partial q^i} \frac{\partial q^k}{\partial t} \end{aligned}$$

Un calcolo diretto mostra poi che relazioni analoghe sono valide anche

per le q^i , quando F sia espressa nelle sole variabili vecchie (o nelle sole variabili nuove, poiché la PP è invariante per TC).

In definitiva si ha tornando alla notazione compatta:

$$(3.23) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial t}, \omega^\mu \right) + \frac{\partial \omega^\mu}{\partial t} = 0 \quad .$$

Un sistema di equazioni del tipo:

$$(a, \omega^\mu) + \frac{\partial \omega^\mu}{\partial t} = 0 \quad (\mu = 1 \dots 2n)$$

nelle $2n$ incognite $\frac{\partial a}{\partial \omega^\gamma}$ ($\gamma=1 \dots 2n$) può essere risolto con la regola di Cramer in virtù della (16). Poiché i sistemi (18) e (23) sono di questo tipo, per l'unicità della soluzione si ha

$$\frac{\partial u}{\partial \omega^\gamma} = \frac{\partial}{\partial \omega^\gamma} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)$$

cioè

$$u = \frac{\partial F}{\partial t} + G(t)$$

dove G è una funzione arbitraria del solo tempo.

E' chiaro che porre $G = 0$ non lede la generalità e quindi si ha in definitiva

$$(3.24) \quad u(QPt) = \frac{\partial F}{\partial t} (q, Q, t)$$

o anche

$$F(qQt) = \int_{t_0}^t \bar{u} (qQr) dr$$

dove t_0 è un valore qualunque.

Si ha quindi

$$(3.25) \quad H(QPt) = h(qpt) + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot$$

La (24) può essere scritta

$$(3.24') \quad u(QPt) = \left(\frac{\partial}{\partial t_1} F [q(QPt), Q, t_1] \right)_{t_1 = t} \quad .$$

Pertanto, data F , è facile risalire ad u .

Viceversa, scritte le (15) esplicitamente

$$(3.26) \quad q^i = \alpha^i(Q, P, t) ; p_i = \beta_i(Q, P, t)$$

ricavando le $P(qQt)$ dalla prima n upla e introducendole in \mathcal{U} si ha:

$$\mathcal{U}(QPt) = \mathcal{U}^*(qQt)$$

e questa deve coincidere con $\frac{\partial F}{\partial t}$

$$\mathcal{U}^*(qQt) = \frac{\partial F}{\partial t}(qQt)$$

e quindi

$$(3.27) \quad F(qQt) = \int_{t_0}^t \mathcal{U}^*(qQ\tau) d\tau$$

dove t_0 è un valore arbitrario.

In particolare se la (15) è tale che:

$$\mathcal{U}(QPt) = -\bar{h}(QPt)$$

si ha

$$H(QPt) = 0$$

e la funzione F corrispondente è la generatrice della trasformazione che interviene nel problema di Hamilton-Jacobi (v. Cap. IV n. 5).

C A P I T O L O IV

Equazioni canoniche.

1. Premesse. Sia $\ell(q\dot{q}t)$ la funzione lagrangiana di un sistema meccanico.

Le equazioni di Lagrange

$$(1.1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \ell}{\partial q^i} = 0 \quad (i = 1 \dots n)$$

se si esegue la derivazione rispetto a t , si scrivono esplicitamente:

$$(1.2) \quad \frac{\partial^2 \ell}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \ddot{q}^j + \frac{\partial^2 \ell}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^j + \frac{\partial^2 \ell}{\partial t \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \ell}{\partial q^i} = 0$$

Questo sistema può essere posto in forma normale se e solo se la sua matrice non è singolare:

$$(1.3) \quad \Delta \equiv \left| \left| \frac{\partial^2 \ell}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \right| \right| \neq 0$$

Se si definiscono i momenti p_i , coniugati delle coordinate q^i :

$$(1.4) \quad p_i = \frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}^i}$$

la (3) equivale alla:

$$(1.3') \quad \left| \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^j} \right| \neq 0$$

Come è noto (v. [6]) nel caso dei sistemi meccanici ordinari la relazione (3) è soddisfatta. Il sistema algebrico (2) nelle incognite \ddot{q} ha allora soluzione

$$(1.5) \quad \ddot{q}^i = \Delta^{-1} \left[- \frac{\partial^2 \ell}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^j - \frac{\partial^2 \ell}{\partial t \partial \dot{q}^i} + \frac{\partial \ell}{\partial q^i} \right].$$

Il sistema (5) è equivalente al sistema (1).

Il sistema (5) è poi equivalente a infiniti diversi sistemi di $2n$ equazioni del primo ordine.

Fra tutti questi sistemi è particolarmente importante, quello che si

ottiene assumendo come incognite supplementari le quantità p_i definite dalle (4).

Si può osservare che le p_i hanno le seguenti proprietà:

1) sono invertibili rispetto alle q^i per la (3')

2) invertendo le (4) rispetto alle q^i si hanno le relazioni

$$(1.6) \quad \dot{q}^i = \dot{q}^i(q, p, t)$$

che forniscono parte delle equazioni del moto

3) le (1) forniscono

$$(1.7) \quad \dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial q^i}$$

nelle quali, mediante le (6) i secondi membri si esprimono in funzione delle q, p, t . Le (7) forniscono allora le rimanenti equazioni del moto.

Resta quindi soltanto da esplicitare i secondi membri delle (6).

Per ottenere direttamente le (6) e le (7) nelle variabili q, p, t conviene introdurre in generale un tipo di trasformazioni che coinvolgano variabili del tipo (4): queste variabili hanno un preciso significato geometrico. A tale significato viene dedicato il n° successivo.

2. La trasformazione di Legendre.

E' conveniente limitarsi per motivi di evidenza geometrica al caso di R^3 .

Sia S una superficie di equazione

$$(2.1) \quad z = f(x, y) \quad .$$

In certi casi è possibile descrivere la (1), anziché mediante l'equazione cartesiana, mediante l'involuppo dei suoi piani tangenti.

E' evidente che una condizione necessaria perché ciò si possa fare è che dai piani tangenti si possa risalire univocamente ai punti della superficie data: nel seguito si vedrà quali siano le condizioni che occorrono.

E' chiaro innanzitutto che i piani che hanno come involuppo la super

ficie data debbono costituire una famiglia due parametri, se si vuole che ogni piano tangente individui uno e un sol punto della superficie.

Un piano di coordinate correnti xyz ha equazione

$$z - p_1 x - p_2 y + h = 0$$

I parametri del piano sono tre: p_1, p_2, h .

La superficie è individuata come involuppo di una famiglia a due parametri di piani se uno dei tre parametri del piano si può esprimere in funzione degli altri due, per es. $h(p_1, p_2)$.

Al fine di descrivere la superficie (1) mediante i parametri p_1 e p_2 non è sufficiente però esprimere semplicemente $f(x, y)$ come $f[x(p_1, p_2), y(p_1, p_2)]$ ossia ridursi ad esprimere le coordinate di ogni punto della superficie in funzione dei parametri direttori della normale alla superficie nello stesso punto.

Infatti la funzione $f[x(p_1, p_2), y(p_1, p_2)]$ pur individuando (sotto l'ipotesi $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$: v. oltre) la forma della superficie, individua la superficie stessa a meno di una traslazione parallela al piano xy (1).

(1) Per semplicità conviene dare un esempio nel caso di una curva. Sia $y = \sin x$, $y' = \cos x = p$. Risulta $x = \arcsin p$ e $y = \sin \arcsin p = \sqrt{1-p^2}$. Se si trasla la curva parallelamente all'asse x : $y = \sin(x+a)$ si ha $y' = p = \cos(x+a)$; $x+a = \arcsin p$ e $y = \sin \arcsin p = \sqrt{1-p^2}$. Sicché esprimendo la y mediante la sua derivata rispetto a x , si perde una traslazione parallela all'asse x .

Per evitare ciò basta assegnare, in funzione di p_1 e p_2 , cioè in funzione della giacitura del piano tangente, l'intersezione del piano con l'asse z . Tale intersezione in generale si sposta lungo l'asse z quando la superficie viene traslata parallelamente al piano xy e quindi è atta, assieme alla funzione $f[x(p_1, p_2), y(p_1, p_2)]$ a individuare la superficie. La condizione è, come si è accennato in precedenza, che ad ogni coppia di valori di p_1 e p_2 si risalga ad un unico punto della superficie.

Sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto di S . Il piano tangente ad S in P_0 ha equazione:

$$z - z_0 - (x - x_0)f_x - (y - y_0)f_y = 0$$

Le coordinate del piano sono:

$$(2.3) \quad p_1 = f_x; \quad p_2 = f_y; \quad h = x_0 f_x + y_0 f_y - z_0$$

Per esprimere h in funzione di p_1 e p_2 basta risolvere le prime due delle (3) rispetto a x_0 e y_0 e sostituirle nella terza

$$(2.4) \quad h(p_1, p_2) = x_0 p_1 + y_0 p_2 - z_0$$

Viceversa per determinare le coordinate del punto delle coordinate del piano tangente basta derivare la (4) rispetto a p_1 e a p_2

$$\begin{cases} h_{p_1} = x_0 + p_1 \frac{\partial x_0}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial y_0}{\partial p_1} - z_{0x} \frac{\partial x_0}{\partial p_1} - z_{0y} \frac{\partial y_0}{\partial p_1} = x_0 \\ h_{p_2} = y_0 \end{cases}$$

si hanno infine le relazioni simmetriche

$$(2.5) \quad \begin{cases} h(p_1, p_2) = x_0 p_1 + y_0 p_2 - z_0(x_0, y_0) \\ p_1 = z_{0x} \\ x_0 = h_{p_1} \\ p_2 = z_{0y} \\ y_0 = h_{p_2} \end{cases}$$

La trasformazione (5), che fa passare dai punti della superficie alle coordinate del piano (e viceversa) è detta trasformazione di Legendre.

Va notato che essa è una trasformazione più generale di una trasformazione puntuale, perché coinvolge, oltre a punti, elementi superficiali: infatti essa è una trasformazione di contatto, come si riconosce facilmente.

Le prime due delle (3) sono invertibili rispetto a x_0 e a y_0 se e solo se sulla superficie risulta

$$(2.6) \quad f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 0 .$$

L'inversione non può quindi essere effettuata per superfici svilupabili, come del resto è evidente dal punto di vista geometrico.

Nel caso di R^n le analoghe delle (5) sono (omettendo per convenienza l'indice 0)

$$(2.5') \quad \begin{aligned} h(p_1 \dots p_n) &= \sum x^i p_i - z(x^1 \dots x^n) \\ z_{x^i} &= p_i & h_{p_i} &= x^i \end{aligned}$$

con ovvio significato dei simboli. È pure ovvio il significato geometrico della trasformazione.

L'analogia della (6) è

$$(2.6') \quad \frac{\partial(z_{x^1} \dots z_{x^n})}{\partial(x^1 \dots x^n)} \neq 0 .$$

Infine è chiaro che la trasformazione di Legendre può essere effettuata rispetto a parte soltanto delle variabili.

3. Equazioni di Hamilton.

L'ultima osservazione del n° precedente può essere applicata al caso della funzione $L(q\dot{q}t)$. Effettuando la trasformazione di Legendre

rispetto alle sole \dot{q}^i si hanno le relazione (2.5') nella forma:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \mathcal{L}(q\dot{q}t) = \sum \dot{q}^i p_i - h(qpt) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = p_i & \frac{\partial h}{\partial p_i} = \dot{q}^i \end{cases} .$$

Le ultime forniscono direttamente le (1.6) in forma esplicita.

Quanto alle (1.7) si ha:

$$\frac{\partial h}{\partial q^i} = \sum p_k \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial q^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \sum \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial q^i} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = - \dot{p}_i .$$

In definitiva si ottiene il sistema di equazioni

$$(3.2) \quad \begin{cases} \dot{q}^i = \frac{\partial h}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = - \frac{\partial h}{\partial q^i} \end{cases}$$

Questo sistema ha forma canonica (cfr. I(5.3)) e le equazioni che lo costituiscono sono dette equazioni canoniche o di Hamilton. La funzione h è detta funzione hamiltoniana del sistema meccanico.

Introducendo le PP, si possono scrivere le (2) nella forma:

$$(3.3) \quad \begin{cases} \dot{q}^i = (h, q^i) \\ \dot{p}_i = (h, p_i) \end{cases}$$

o, nella notazione compatta

$$(3.4) \quad \dot{\omega}^i = (h, \omega^i) .$$

4. Trasformazioni canoniche.

Se una trasformazione invertibile

$$(4.1) \quad \omega^i = \phi^i(\Omega t)$$

lascia invariata la forma canonica delle equazioni del moto essa è una TC.

In altri termini, se, qualunque sia h , si può trovare una funzione H : tale che il sistema

$$(4.2) \quad \dot{\omega}^\gamma = (h, \omega^\gamma)$$

si trasforma, per effetti della (1), nel sistema

$$(4.3) \quad \dot{\Omega}^\mu = (H, \Omega^\mu)$$

la trasformazione (1) è una TC.

Si applichi infatti al sistema (2) la trasformazione (1). Si ha

$$\frac{\partial \phi^\gamma}{\partial \Omega^\mu} \dot{\Omega}^\mu + \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial t} = \epsilon^{\mu\lambda} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \Omega^\rho} \frac{\partial \Omega^\rho}{\partial \omega^\mu} \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial \Omega^\sigma} \frac{\partial \Omega^\sigma}{\partial \omega^\lambda}$$

dove $\bar{h}(\Omega t) = h(\omega t)$. La precedente si può scrivere

$$\frac{\partial \phi^\gamma}{\partial \Omega^\mu} \dot{\Omega}^\mu + \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial t} = (\partial^{\rho\sigma})_{\omega} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \Omega^\rho} \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial \Omega^\sigma}$$

Poiché si vuole che sia conservata la forma canonica delle equazioni, le $\dot{\Omega}$ debbono essere date dalle (3)

$$\frac{\partial \phi^\gamma}{\partial \Omega^\mu} \epsilon^{\kappa\mu} \frac{\partial H}{\partial \Omega^\kappa} + \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial t} = (\partial^{\rho\sigma})_{\omega} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \Omega^\rho} \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial \Omega^\sigma}$$

e infine

$$(4.4) \quad \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial \Omega^\mu} \left[(\partial^{\rho\sigma})_{\omega} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \Omega^\rho} - \epsilon^{\kappa\mu} \frac{\partial H}{\partial \Omega^\kappa} \right] = \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial t}$$

Poiché la matrice $J = \left| \left| \frac{\partial \phi^i}{\partial \Omega^\mu} \right| \right|$ non è singolare perché la (1) è invertibile, il sistema (4) si può risolvere con la regola di Cramer. Indicando con j^α la matrice J nella quale la colonna α^{ma} è stata sostituita con la colonna delle $\frac{\partial \phi^\gamma}{\partial t}$, si ha

$$(\partial^{\rho\sigma})_{\omega} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \Omega^\rho} - \epsilon^{\rho\mu} \frac{\partial H}{\partial \Omega^\rho} = J^{-1} J^\mu$$

Il membro destro dipende esclusivamente dalla trasformazione (1) e

non dagli hamiltoniani h e H .

Quindi il primo membro, per ogni scelta di h (e per ogni trasformato H) deve essere indipendente da questa funzione. Poiché si ha

$$(\Omega^\rho \Omega^\mu)_\omega \frac{\partial \bar{h}}{\partial \Omega^\rho} = \varepsilon^{\kappa\lambda} \frac{\partial \Omega^\rho}{\partial \Omega^\kappa} \frac{\partial \Omega^\mu}{\partial \Omega^\lambda} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \Omega^\rho} = \varepsilon^{\kappa\lambda} \frac{\partial h}{\partial \omega^\kappa} \frac{\partial \Omega^\mu}{\partial \Omega^\lambda} = (h \Omega^\mu)_\omega$$

e inoltre

$$\varepsilon^{\rho\mu} \frac{\partial H}{\partial \Omega^\rho} = (H \Omega^\mu)_\Omega$$

si ha infine che la quantità

$$(h \Omega^\mu)_\omega - (H \Omega^\mu)_\Omega$$

deve essere indipendente da h e H e cioè deve dipendere solo dalla trasformazione.

Posto $H(\Omega t) = \bar{h}(\Omega t) + \mathcal{U}(\Omega t)$

dove, come prima $\bar{h}(\Omega t) = h(\omega t)$, si ha che

$$(h \Omega^\mu)_\omega - (\bar{h}, \Omega^\mu)_\Omega - (\mathcal{U}, \Omega^\mu)_\Omega$$

è indipendente da h . Si deve dunque avere (1)

$$(h \Omega^\mu)_\omega - (\bar{h}, \Omega^\mu)_\Omega = 0$$

o, esplicitamente

$$\varepsilon^{\rho\sigma} \frac{\partial h}{\partial \omega^\rho} \frac{\partial \Omega^\mu}{\partial \omega^\sigma} = \varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial h}{\partial \omega^\rho} \frac{\partial \omega^\rho}{\partial \Omega^\alpha} \frac{\partial \Omega^\mu}{\partial \omega^\sigma} \frac{\partial \omega^\sigma}{\partial \Omega^\beta}$$

ossia

$$\frac{\partial \Omega^\mu}{\partial \omega^\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial \omega^\rho} (\varepsilon^{\rho\sigma} - \varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial \omega^\rho}{\partial \Omega^\alpha} \frac{\partial \omega^\sigma}{\partial \Omega^\beta}) \right] = 0$$

Poiché la trasformazione è invertibile si ha

$$\left| \left| \frac{\partial \Omega^\mu}{\partial \omega^\sigma} \right| \right| \neq 0$$

e quindi sono nulle le quantità nelle parentesi quadra

(1) Per una dimostrazione più rigorosa, anche se più macchinosa v. [5]

$$\frac{\partial h}{\partial \omega^\rho} (\epsilon^{\rho\sigma} - \epsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial \omega^\rho}{\partial \Omega^\alpha} \frac{\partial \omega^\sigma}{\partial \Omega^\beta}) = 0 .$$

Se h è arbitraria, queste relazioni sono vere se e solo se

$$\epsilon^{\rho\sigma} = \epsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial \omega^\rho}{\partial \Omega^\alpha} \frac{\partial \omega^\sigma}{\partial \Omega^\beta}$$

o

$$(\omega^\rho \omega^\sigma)_\Omega = \epsilon^{\rho\sigma}$$

cioè se la (1) è una trasformazione canonica.

Si possono allora utilizzare i risultati del n° 3 Cap. III, in particolare le (24) e (25). Detta F la generatrice della (1) del presente numero si ha

$$\mathcal{U} = \frac{\partial F}{\partial t}$$

e quindi

$$(4.5) \quad H(QPt) = h(qpt) + \frac{\partial F}{\partial t}(qQt)$$

5. Osservazioni sulle TC.

Osservazione 1. Si indichino con $\lambda(q\dot{q}t)$, $L(q\dot{Q}t)$ le funzioni lagrangiane relative ai due hamiltoniani h e H rispettivamente. La derivata totale di F è

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Utilizzando le (7.8) Cap. II e la (4.5) del presente capitolo, si ha:

$$\frac{dF}{dt} = p_i \dot{q}^i - P_i \dot{Q}^i + H - h = L(Q\dot{Q}t) - \lambda(q\dot{q}t) .$$

(Notare che nel caso di una trasformazione puntuale, cioè del tipo

$Q^i = Q^i(qt)$ l'ultimo membro è nullo).

Si ha quindi nella notazione del Cap. II n° 7:

$$F = \int L(Q\dot{Q}t)dt - \int \ell(q\dot{q}t)dt = Q^{n+1} - q^{n+1} = \phi^{n+1}$$

Le quantità q^{n+1} e Q^{n+1} sono l'azione (v. Cap. VI n. 1) e la sua trasformata ed F è la loro differenza (a questo proposito vedere Cap. V n. 1).

Osservazione 2. Nel Cap. II n° 8 si è trovata la forma più generale di TC infinitesima (v. II(8.7)).

$$(5.1) \quad \delta q^{n+1} = (p_{\alpha} \frac{\partial F}{\partial p_{\alpha}} - F)\delta t, \delta q^i = \frac{\partial F}{\partial p_i} \delta t ; \delta p_i = -\frac{\partial F}{\partial q^i} \delta t$$

con F arbitraria.

Se si sceglie F coincidente con h si vede che le relazioni precedenti, eccetto la prima, coincidono con le equazioni hamiltoniane. L'hamiltoniana è quindi la funzione generatrice delle trasformazioni che fanno passare dai valori delle variabili canoniche calcolati in un istante generico, ai valori delle stesse variabili calcolate in un istante infinitamente vicino. Il moto si svolge perciò come una successione di TC infinitesime. D'altra parte, poiché le TC formano gruppo e quindi la successiva applicazione di TC è ancora una TC, anche i valori delle variabili canoniche in istanti separati da un intervallo di tempo finito, sono legate da una TC. A questo problema sono dedicati il n° successivo e il Capitolo VI (v. anche Cap. V n. 3).

Quanto alla prima delle relazioni (1), per $F = h$ essa diventa

$$(5.2) \quad \delta q^{n+1} = p_{\alpha} \frac{\partial h}{\partial p_{\alpha}} - h = \ell(q\dot{q}t)$$

dove ℓ è il lagrangiano. La (2) esprime la variazione dell'azione (v. Cap. VI).

Osservazione 3. Si torni alla relazione che esprime la canonicità della trasformazione $qp \rightarrow QP$:

$$(5.3) \quad P_i dQ^i = p_i dq^i - \frac{\partial F}{\partial t} + dF(qQt)$$

In questa relazione la generatrice F_1 è funzione di qQt : l'indice 1 è stato apposto per convenienza, per distinguere questa generatrice da altre tre funzioni generatrici che verranno ora introdotte. Come conseguenza della (3) si hanno le relazioni usuali:

$$(5.4) \quad p_i = - \frac{\partial F}{\partial q^i} ; P_i = \frac{\partial F}{\partial Q^i}$$

Una trasformazione di Legendre che sostituisca le q^i con le p_i , trasforma la relazione pfaffiana (3) in una nuova relazione pfaffiana che si può ottenere semplicemente introducendo nella (3) l'identità $p_i dq^i = d(p_i q^i) - q^i dp_i$ e definendo la funzione $F_2 = F_1 + p_i q^i$

$$(5.3') \quad P_i dQ^i = - q^i dp_i - \frac{\partial F_2}{\partial t} + dF_2$$

SI riconosce facilmente che la (3') è ancora una relazione pfaffiana relativa alla TC: $p_i q^i \rightarrow Q^i P_i$. Dalle (3') segue

$$(5.4') \quad q^i = \frac{\partial F_2}{\partial p_i} ; P_i = \frac{\partial F_2}{\partial Q^i}$$

Analogamente scegliendo come variabili indipendenti le p, P e definendo $F_3 = F_2 - P_i Q^i$ si ha:

$$(5.3'') \quad - Q^i dP_i = - q^i dp_i - \frac{\partial F_3}{\partial t} + dF_3$$

da cui segue

$$Q^i = - \frac{\partial F_3}{\partial P_i} ; q^i = \frac{\partial F_3}{\partial p_i}$$

Infine scegliendo come variabili indipendenti le P, q e ponendo $F_4 = F_3 - q^i p_i$ si ha

$$(5.3''') \quad - Q^i dP_i = p_i dq^i - \frac{\partial F_4}{\partial t} + dF_4$$

dove

$$(5.4'') \quad Q^i = - \frac{\partial F_4}{\partial P_i} ; \quad p_i = - \frac{\partial F_4}{\partial q^i}$$

5. Il teorema di Hamilton-Jacobi.

Nel n° precedente si è notato che i valori delle variabili canoniche relativi a due istanti generici sono legati da una TC. In particolare comunque si assegni un istante t appartenente all'intervallo temporale in cui si svolge il moto, i valori delle variabili canoniche $q(t), p(t)$ sono legati ai rispettivi valori q_0, p_0 , relativi all'istante iniziale t_0 , da una TC.

La conoscenza di questa TC relativa ad ogni stante, e cioè la conoscenza della famiglia ad un parametro di TC che facciano passare dai valori q_0, p_0 ai valori $q(t), p(t)$ equivale alla conoscenza completa della soluzione delle equazioni canoniche. Infatti la famiglia di trasformazioni è data da : $q(t) = q(t, q_0, p_0)$; $p(t) = p(t, q_0, p_0)$ e cioè rappresenta l'integrale generale delle equazioni canoniche.

Si può osservare che la TC inversa, che fa passare dalle $q(t)$ alle q_0, p_0 , cioè a variabili canoniche che siano tutte costanti del moto riduce le equazioni canoniche alla forma più semplice possibile, cioè alla forma $\dot{q} = 0, \dot{p} = 0$ ⁽¹⁾.

Per determinare la famiglia di TC che connette i valori iniziali q_0, p_0 con i valori all'istante generati, conviene ricercarne la generatrice.

Poiché le nuove variabili canoniche $Q^i \equiv q_0^i$; $P_i \equiv p_{0i}$ sono tutte costanti del moto, le equazioni canoniche sono

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial H}{\partial P_i} = 0 ; \quad \dot{P}_i = - \frac{\partial H}{\partial Q^i} = 0$$

⁽¹⁾ E' ben noto del resto il metodo di semplificare le equazioni di qualunque tipo con opportuni cambiamenti di variabili.

Il nuovo hamiltoniano H non dipende dalle variabili canoniche QP_i ; esso dipende solo dal tempo e quindi può essere posto uguale a zero ⁽¹⁾.

La relazione (4.5) diventa (la generatrice è indicata col simbolo S , usuale nella letteratura):

$$h(qpt) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

dove $S = S(q, q_0, t)$.

Poiché, inoltre, è $p_i = - \frac{\partial S}{\partial q_i}$, si può scrivere

$$(5.1) \quad h\left(q, - \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

La (1) è l'equazione di Hamilton-Jacobi. Come si è visto nel Cap. I n° 5 questa equazione è equivalente al sistema canonico. Un suo integrale completo permette infatti, come si è visto nel Cap. I di determinare, con procedimento di inversione e di eliminazione, la soluzione generale del sistema canonico. Dalla discussione ora fatta si vede che un integrale completo della (1) è la funzione generatrice di una TC che fa passare dalle variabili canoniche, calcolate all'istante generico t , ad un sistema di costanti iniziali.

(²) Sia $H(t)$ il nuovo hamiltoniano. Se S è la generatrice della tra

sformazione che porta da $h(qpt)$ ad $H(t) = h(qpt) + \frac{\partial S}{\partial t}$, la

funzione $\bar{S} = S - \int^t H(t)dt$ genera una TC che porta da h all'hamil

toniano $K = 0$.

Infatti si ha $\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} - H(t)$. Inoltre $K = h + \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} =$

$$= H - \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = H - \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial t} - H = 0$$

Se si considera la trasformazione inversa:

$$(5.2) \quad \begin{cases} q^i = q^i(t, q_0, p_0) \\ p_i = p_i(t, q_0, p_0) \end{cases}$$

si hanno complessivamente le relazioni (7.8) del Cap. II nella forma

$$(5.3) \quad p_i = - \frac{\partial S}{\partial q^i} ; \quad p_{0i} = \frac{\partial S}{\partial q_0^i}$$

Invertendo le seconde delle (3) rispett. alle q^i si ottengono le $q^i(q_0, p_0, t)$ che, introdotte nelle prime delle (3), danno le $p_i(q_0, p_0, t)$.

La conoscenza dell'integrale completo F della (1) permette quindi, come si è detto più volte di ricavare le (2) con soli procedimenti di inversione e di eliminazione.

C A P I T O L O V

Integrali primi del moto.

1. Caratterizzazione degli integrali primi di un sistema hamiltoniano.

Nel capitolo precedente si è visto che le equazioni canoniche possono essere scritte nella forma [IV (3.3)]

$$(1.1) \quad \dot{q}^i = (h, q^i) \quad \dot{p}_i = (h, p_i) \quad .$$

Le derivate temporali sono calcolate lungo le soluzioni delle equazioni stesse.

In forma analoga si può scrivere la derivata temporale di una qualunque funzione $f(q, p, t)$. E' ovvio che per derivata temporale si intende la derivata $\frac{d}{dt} f[q(t), p(t), t]$ dove le $q^i(t), p_i(t)$ costituiscono una generica soluzione delle (1). Lungo una soluzione si ha

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial q^i} (h, q^i) + \frac{\partial f}{\partial p_i} (h, p_i) + \frac{\partial f}{\partial t} = (h, f) + \frac{\partial f}{\partial t} .$$

In particolare per $f \equiv h$ si ha:

$$(1.2) \quad \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad .$$

Una funzione costante lungo le soluzioni del sistema (1) (con valori della costante in generale diversi da soluzione a soluzione) viene detto un integrale primo del moto. In particolare, in base alla (2), h stessa, se non dipende esplicitamente da t , è un integrale primo del moto.

Per gli integrali primi del moto risulta

$$(1.3) \quad (h, f) + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\partial h}{\partial q^i} \frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

La (3) ha l'aspetto di una equazione a derivate parziali del primo ordine nella incognita f . La strada seguita per ottenerla fa pensare

però a prima vista, che essa non sia una effettiva equazione differenziale. Infatti perché la (3) sia una equazione differenziale è necessario che le derivate di f annullino il primo membro quando siano calcolate in un punto qualunque del campo in cui è definito il moto e cioè, per valori di q, p, t liberamente scelti in tale campo. Invece la (3) è stata ottenuta, non in questo modo, ma derivando lungo una soluzione del sistema (1) e cioè derivando rispetto alle q^i, p_i riguardate non come variabili indipendenti, bensì come variabili vincolate dalle equazioni di una curva soluzione del sistema (1).

Va osservato però che in ogni punto del campo in cui è definito il moto, passa una (e una sola) curva soluzione del sistema (1) e quindi, comunque si scelga un punto in tale campo, le derivate parziali di f soddisfano, in quel punto, alla relazione (3). Un integrale primo soddisfa quindi necessariamente la (3) come equazione differenziale.

Viceversa, sia assegnata l'equazione a derivate parziali (3) nel campo in cui è definito il moto. Le derivate di una soluzione f , che certamente esiste (I n. 4), soddisfano la (2) in ogni punto di tale campo: in particolare lungo una soluzione del sistema (1) il primo membro delle (3), si riduce a $\frac{df}{dt}$ e quindi f è un integrale primo del sistema canonico (1).

Si può concludere

Teorema. Condizione necessaria e sufficiente perché una funzione f sia un integrale primo di un sistema meccanico di hamiltoniano h , è che essa sia una soluzione della equazione a derivate parziali, del primo ordine lineare, omogenea

$$(1.4) \quad (h, f) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Il sistema caratteristico associato alla (2) è, come si riconosce immediatamente, il sistema canonico (1).

La (3) è una equazione in $2n+1$ variabili e possiede $2n$ soluzioni

indipendenti $f_1(q, p, t) \dots f_{2n}(q, p, t)$: ogni altra soluzione è funzione delle $f_1 \dots f_{2n}$.

Un sistema canonico possiede quindi $2n$ integrali primi indipendenti.

In particolare se h non dipende esplicitamente da t , si possono trovare $2n-1$ suoi integrali primi indipendenti dal tempo come soluzioni della equazione in $2n$ variabili indipendenti.

$$(1.3') \quad (h, f) = 0.$$

Si può osservare che nel caso in cui h non dipenda da t , un sistema di $2n$ soluzioni della (3) si può ottenere associando alle $2n-1$ soluzioni della (3') una qualunque soluzione della (3) stessa, per es. una funzione del tipo

$$f_{2n}(q, p, t) = \phi(q, p) + t$$

dove $\phi(q, p)$ è soluzione della equazione

$$(1.5) \quad (h, f) + 1 = 0$$

E' ovvio che la funzione f_{2n} così ottenuta è indipendente dalle $2n-1$ soluzioni della (3): la ϕ stessa è indipendente da queste soluzioni perché, in caso contrario sarebbe anch'essa soluzione della (3') e non potrebbe essere soluzione della (5).

Se i $2n$ integrali ottenuti sono ad un sol valore, dalle relazioni

$$f_1(q, p, t) = c_1 \dots f_{2n}(q, p, t) = c_{2n}$$

in virtù della indipendenza delle f , che implica che

$$J = \left| \begin{array}{c} \frac{\partial(f_1 \dots f_{2n})}{\partial(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)} \end{array} \right| \neq 0$$

si possono esplicitare le variabili canoniche in funzione di t e delle

2n costanti c_i

$$q^i = \phi^i(t, c_1 \dots c_{2n}); p_i = \psi_i(t, c_1 \dots c_{2n})$$

e quindi la conoscenza di un sistema completo di integrali primi fornisce la soluzione del problema del moto.

Nel caso in cui h non dipenda da t , se si conosce un sistema completo di soluzioni a un sol valore delle (3'), delle relazioni

$$f_1(q, p) = c_1 \dots f_{2n-1}(q, p) = c_{2n-1}$$

si possono ricavare $2n-1$ variabili canoniche in funzione di una di esse, per es.

$$\begin{cases} q^\alpha = \phi^\alpha(q^1, c_1 \dots c_{2n-1}) & (\alpha = 2 \dots n) \\ p_i = \psi_i(q^1, c_1 \dots c_{2n-1}) & (i = 1 \dots n) \end{cases}$$

e si ottiene la traiettoria rappresentativa del moto nello spazio delle fasi. Resta però incognita la legge oraria.

Se l'hamiltoniano dipende esplicitamente dal tempo, si riconosce immediatamente che esso, assieme ad un sistema completo di suoi integrali primi, costituisce un sistema di $2n+1$ funzioni indipendenti delle $2n+1$ variabili q, p, t . Infatti se fosse $h = h(f_1 \dots f_{2n})$, lungo una traiettoria si avrebbe, utilizzando la (2)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dh}{dt} = \sum_k \frac{\partial h}{\partial f_k} \frac{df_k}{dt} = 0$$

Poiché per ipotesi h è funzione esplicita di t , esso non è funzione dei suoi integrali primi.

Si associ ad h un sistema arbitrario di $2n$ funzioni $g_1 \dots g_{2n}$ in modo da ottenere complessivamente $2n+1$ funzioni indipendenti: in generale nessuna delle funzioni g è integrale primo di h , ma certamente ogni integrale primo di h è funzione di $h, g_1 \dots g_{2n}$. L'equa-

zione (3) diventa:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(h, h) + \frac{\partial f}{\partial g_k}(h, g_k) + \frac{\partial f}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial g_k} \frac{\partial g_k}{\partial t} = 0$$

cioè

$$\frac{\partial f}{\partial g_k} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial g_k} \right) + \frac{\partial g_k}{\partial t} \right] + \frac{\partial f}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} = 0 .$$

Questa equazione è equivalente alla (2) ma la scelta delle g per mette una maggiore flessibilità nei coefficienti. Naturalmente se le g_i sono integrali primi di h si ricade nella (3), perché risulta o, $\frac{\partial f}{\partial h} = 0$ o $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$.

In particolare, se h non dipende dal tempo, esistono, come si è visto, $2n-1$ integrali primi indipendenti dal tempo. Si può riconoscere che un sistema di $2n$ funzioni indipendenti si costruisce associando ai $2n-1$ integrali primi di h un integrale primo di un suo integrale primo.

Siano infatti

$$h = f_1 \dots f_{2n-1}$$

$2n-1$ soluzioni della

$$(h f) = 0$$

e si consideri l'equazione

$$(f_k f) = 0 \quad (k \neq 1) .$$

Tale equazione ha certamente h fra le sue soluzioni.

D'altra parte il gruppo di funzioni $f_1 \dots f_{2n-1}$ può essere completato, con una funzione \bar{f} , in un gruppo di ordine $2n$ privo di funzioni singolari.

Scegliendo le funzioni $f_1 \dots f_{2n-1} \bar{f}$ in modo da ottenere una base canonica di tale gruppo, poiché h commuta con $f_1 \dots f_{2n-1}$, è neces-

sariamente

$$(h, \bar{f}) \neq 0$$

cioè \bar{f} è la funzione coniugata ⁽¹⁾ di h : \bar{f} non è quindi coniugata da nessuno degli integrali primi di h (distinti da h) e si ha in particolare

$$(f_k, \bar{f}) = 0$$

cioè la funzione che completa il gruppo è integrale primo di f_k ($k=2\dots 2n-1$),

2. Connessione col teorema di H-J .

Assegnati due hamiltoniani in $2n$ variabili canoniche e scelte due basi canoniche ϕ^i, ψ_i , ϕ^i, ψ_i per i loro integrali primi, si ponga:

$$q^{i'} = \phi^i(q, p, t) = \phi^i(Q, P, t) = Q^{i'}$$

$$p_i' = \psi_i(q, p, t) = \psi_i(Q, P, t) = P_i'$$

Le trasformazioni $q, p, t \rightarrow q', p', t'$ e $Q, P, t \rightarrow Q', P', t'$ sono canoniche perché le basi scelte per i gruppi degli integrali primi sono canoniche e quindi soddisfano alle relazioni di commutazione. Inoltre le TC $q', p' \rightarrow Q', P'$ è l'identità e perciò si può scegliere per la sua generatrice una forma nota. Si può osservare inoltre che la trasformazione $qp \rightarrow q'p'$ oltre ad essere canonica è proprio (stante il carattere di integrali primi delle ϕ^i, ψ_i) una trasformazione corrispondente al teorema di H-J, cioè una trasformazione canonica che fa passare dalle qp , ad un sistema di $2n$ costanti del moto. Ovviamente una osservazione identica si può fare per la trasformazione $QP \rightarrow Q'P'$. Si indichino allora con s e con S rispett. le generatrici delle trasformazioni $qp \rightarrow q'p'$ e $QP \rightarrow Q'P'$. La trasformazione $q', p' \rightarrow Q', P'$ [che è l'identità e, nelle variabili canoniche q', Q' ha generatrice

(¹) In una base canonica si dicono coniugate le coppie di variabili la cui PP è diversa da zero.

nulla (IV n° 5)] ha generatrice che è somma (II n° 6) delle generatrici della TC: $q'p' \rightarrow qp$, cioè $-s$ della TC: $qp \rightarrow QP$, sia essa W , e della TC: $QP \rightarrow Q'P'$ cioè S . Si ha così

$$0 = -s(qq't) + W(qQt) + S(QQ't)$$

ossia

$$(2.1) \quad W(qQt) = -S(QQ't) + s(qq't) \quad .$$

In conclusione la generatrice della TC $\phi^i, \psi_i \rightarrow \phi^i, \psi_i$ è la differenza delle generatrici delle TC relative ai problemi di H-J dei due hamiltoniani h e H .

Naturalmente per calcolare $W(qQt)$ occorre esplicitare $Q^1(qQt)$ e $q^1(qQt)$ negli argomenti delle funzioni S ed $s^{(1)}$.

Si può osservare che la (4) non è altro che la (7.9) del Cap. II la quale ha in questo modo una interpretazione diretta.

(¹) Utilizzando una diversa generatrice per la TC identica $q'p' \rightarrow Q'P'$ si trova in ogni caso che la somma

$$-s(qq't) + W(qQt) + S(QQ't)$$

espressa in n variabili del gruppo $q'p'$, e in n variabili del gruppo $Q'P'$, è indipendente dal tempo.

3. Mutua riduzione di due hamiltoniani mediante TC.

Un calcolo diretto mostra che la PP di due integrali primi f_i, f_k di h è ancora un integrale primo di h .

Infatti risulta, utilizzando l'identità di Jacobi:

$$(h(f_i, f_k)) + \frac{\partial}{\partial t}(f_i, f_k) = ((h f_i), f_k) + (f_i, (h f_k)) + \frac{\partial}{\partial t}((f_i, f_k)) = 0$$

La PP di due generici integrali primi è quindi funzione delle $2n$ soluzioni $f_1 \dots f_{2n}$. (Spesso accade che la PP di due integrali primi $f_i \dots f_k$ sia funzione delle sole funzioni f_i ed f_k e quindi non sia un nuovo integrale primo indipendente da questi). Poiché le PP di tutte le possibili coppie di integrali primi sono funzioni degli integrali primi stessi, si conclude che gli integrali primi di un sistema canonico, per ogni valore di t , costituiscono un gruppo di funzioni di ordine $2n$: ogni sistema di $2n$ integrali indipendenti costituisce una base del gruppo.

Inoltre il gruppo che si ottiene per ogni fissato valore di t , essendo costituito da $2n$ funzioni indipendenti, è privo di funzioni singolari (IV n° 1). In conclusione: in un conveniente intervallo di valori di t , $2n$ integrali primi indipendenti di un sistema canonico individuano un gruppo (ad un parametro) di funzioni privo di funzioni singolari.

In base al risultato finale del n° 2 del Cap. III due gruppi di funzioni dello stesso ordine e con lo stesso numero di funzioni singolari possono sempre essere trasformati l'uno nell'altro mediante una TC.

Si assegni, allora, accanto ad h , un secondo hamiltoniano $H(QPt)$ ancora in $2n$ variabili canoniche; poiché gli integrali primi di H , $F_1 \dots F_{2n}$ costituiscono anch'essi, per ogni valore di t , un gruppo di funzioni di ordine $2n$ privo di funzioni singolari, esiste una TC T^* che trasforma il gruppo individuato dalla base f_i nel gruppo

individuato dalla base F_i .

Questa trasformazione trasforma l'hamiltoniano h nell'hamiltoniano H secondo la solita relazione $H(QPt) = h(qpt) + \frac{\partial w}{\partial t}$ dove w è la generatrice della trasformazione T^* . Infatti si indichi con $H'(QPt) = h(qpt) + \frac{\partial w}{\partial t}$ la hamiltoniana in cui la trasformazione T trasforma h . Il gruppo degli integrali primi di H' , come trasformato del gruppo f_i , sotto la trasformazione T^* , è ancora il gruppo F e quindi le $F_1 \dots F_{2n}$ costituiscono un sistema completo di integrali primi di H' . D'altra parte un sistema completo di integrali primi individua l'hamiltoniano a meno di una inessenziale funzione additiva del solo tempo. Infatti il sistema algebrico:

$$\frac{\partial F_i}{\partial Q^k} \frac{\partial X}{\partial P_k} - \frac{\partial F_i}{\partial Q_k} \frac{\partial X}{\partial Q^k} = - \frac{\partial F_i}{\partial t} \quad (i=1 \dots 2n)$$

per l'indipendenza delle F_i , ha matrice

$$\left| \frac{\partial F}{\partial Q} - \frac{\partial F}{\partial P} \right|$$

non nulla e quindi individua univocamente le incognite $\frac{\partial X}{\partial Q^i} - \frac{\partial X}{\partial P_i}$, e cioè individua X a meno di una funzione additiva indipendente dalle variabili canoniche.

Di conseguenza H e H' coincidono.

Se si scelgono basi canoniche $\phi_i, \psi_i, \Phi_i, \Psi_i$ per i due gruppi, una trasformazione canonica che porta h in H è (III n° 2)

$$(3.1) \quad \phi_i = \Phi_i \quad \psi_i = \Psi_i$$

In particolare siano t_1 e t_2 due istanti appartenenti all'intervallo temporale in cui si svolge il moto. In questo caso le funzioni di q e p : $\phi_i(qpt_1), \psi_i(qpt_1)$ costituiscono un gruppo e lo stesso accade per le funzioni di q e p : $\Phi_i(qpt_2), \Psi_i(qpt_2)$. Allora le uguaglianze

$$(3.2) \quad \phi_i(qpt_1) = \phi_i(QPt_2); \quad \psi_i(qpt_1) = \psi_i(QPt_2)$$

forniscono una TC: tali uguaglianze individuano una corrispondenza fra i punti di quel sottospazio dello spazio qpt , che costituisce lo spazio delle fasi all'istante t_1 e i punti di quel sottospazio (del lo spazio qpt) che costituisce lo spazio delle fasi all'istante t_2 .

Inoltre poiché le ϕ_i ψ_i sono integrali primi del moto, le relazioni precedenti, scritte nella forma espressiva

$$\begin{cases} \phi_i(q(t_1)p(t_1)t_1) = \phi_i(q(t_2)p(t_2)t_2) = \text{cost} \\ \psi_i(q(t_1)p(t_1)t_1) = \psi_i(q(t_2)p(t_2)t_2) = \text{cost} \end{cases}$$

mostrano che il punto $[q(t_1)p(t_1)]$ e il suo trasformato $[q(t_2)p(t_2)]$ stanno su una stessa traiettoria: per la (2.2) quindi, durante il moto le variabili canoniche relative a una generica coppia di istanti sono legate da una trasformazione canonica. Si ritrova così il risultato del Cap. IV n° 5: il moto appare come una famiglia ad un parametro di trasformazioni canoniche.

Se gli istanti t_1 e t_2 sono separati da un intervallo finito, la trattazione appropriata è quella variazionale (v. Cap. VI). Se invece si ha $t_2 = t_1 + dt$, si ricade nella trattazione fatta a proposito delle trasformazioni canoniche infinitesime: il confronto con la trattazione attuale è lasciato come esercizio.

Le trasformazioni canoniche che conducono dall'hamiltoniano h all'hamiltoniano H sono infinite. Per dimostrarlo si esegua una TC che faccia passare dalle funzioni $\phi_i \psi_i$ assunte come variabili indipendenti, a certe funzioni $\alpha_k(\phi, \psi, t)$, $\beta_k(\phi, \psi, t)$.

Poiché la trasformazione per ipotesi è canonica, si ha:

$$(\alpha_i, \alpha_k)_{\phi\psi} = (\beta_i, \beta_k)_{\phi\psi} = 0; \quad (\alpha_i, \beta_k)_{\phi\psi} = \delta_i^k$$

Anche la trasformazione $QP \rightarrow \Phi\Psi$ risulta canonica perché le $\Phi(QPt)$ e le $\Psi(QPt)$ soddisfano le relazioni di commutazione. Dalla canonicità delle trasformazioni $QP \rightarrow \Phi\Psi$ e $\Phi\Psi \rightarrow \alpha\beta$ segue che la trasformazione $QP \rightarrow \bar{\alpha} \bar{\beta}$ (dove $\bar{\alpha}(QPt) = \alpha[\Phi(QPt), \Psi(QPt), t]$ e analoghe) è pur essa canonica; le funzioni $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ soddisfano quindi anch'esse le relazioni di commutazione.

Se ne conclude che esiste una TC, che fa passare dalle qp alle QP , individuata in forma implicita dalle relazioni

$$(3.3) \quad \phi_j(qpt) = \bar{\alpha}_j(QPt); \quad \psi_j(qpt) = \bar{\beta}_j(QPt)$$

Tale trasformazione è diversa dalla (1) e può perciò essere conveniente indicare le variabili QP con nuovi simboli $\xi \eta$.

Esiste una TC che fa passare dalla QP alle $\xi \eta$; essa è individuata dalle relazioni:

$$(3.4) \quad \phi_j(QPt) = \bar{\alpha}_j(\xi\eta t); \quad \psi_j(QPt) = \bar{\beta}_j(QPt) .$$

Le funzioni $\alpha(\Phi\Psi t)$, $\beta(\Phi\Psi t)$ sono funzioni di integrali primi di H e quindi le funzioni $\bar{\alpha}(QPt)$, $\bar{\beta}(QPt)$ sono integrali primi di H . Di conseguenza la TC individuata dalla (3) trasforma anch'essa h in H . Ciò si può esprimere dicendo che le funzioni $H(QPt)$ e $H(\xi\eta t)$ ottenute mediante le TC (1) e (3) sono di forma funzionale identica o anche dicendo che la TC (4) lascia invariata la forma di H .

Poiché le funzioni $\alpha(\Phi\Psi t)$ e $\beta(\Phi\Psi t)$ possono essere scelte in infiniti modi, si riconosce che le TC che fanno passare da h ad H sono infinite. Si può anche dire che esistono infinite TC che fanno passare da h ad hamiltoniani che hanno la forma funzionale di H .

Si torni ora alla TC (4) che lascia invariata la forma funzionale di H : essa è individuata da due $2n^{\text{uple}}$ di integrali primi di H stesso. Tutte le TC individuate da sistemi completi di integrali

primi di H lasciano quindi H invariata in forma. Il risultato può essere invertito: se una TC lascia invariata la forma di H , essa può essere sempre ottenuta mediante due sistemi completi di integrali primi di H . Infatti (v. il successivo n° 4) una TC trasforma gli integrali primi di un hamiltoniano negli integrali primi dell'hamiltoniano trasformato e quindi la TC può essere individuata proprio dal sistema di integrali primi scelto e dal suo trasformato.

Il risultato, nel caso di hamiltoniano invariante in forma, segue immediatamente.

Si ha quindi che condizione necessaria e sufficiente perché una TC lasci invariata la forma funzionale dell'hamiltoniano è che essa sia individuata da due sistemi completi di integrali primi dell'hamiltoniano stesso, nel senso della (4).

4. Equazioni degli integrali primi e TC.

Siano assegnati, al solito, gli hamiltoniani h ed H e due sistemi completi di integrali primi f_i, F_i .

La trasformazione

$$(4.1) \quad f_i(qpt) = F_i(QPt)$$

è una trasformazione canonica soltanto per particolari scelte delle due $2n$ -uple di funzioni. Essa ha però la proprietà di trasformare h in H , come si riconosce ricordando che (n.3), che da un sistema completo di integrali primi si risale ad un'unica funzione hamiltoniana (a meno di una inessenziale funzione additiva indipendente dalle variabili canoniche): ai due sistemi completi f_i ed F_i corrispondono quindi h e H rispettivamente. Da ciò segue pure che la (1) lascia invariata la forma canonica delle equazioni del moto.

Allo stesso risultato si perviene osservando che la (1) trasforma l'equazione

$$(4.2) \quad (h, f) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

che ammette il sistema completo di soluzioni f_i , nella equazione

$$(4.3) \quad (H, F) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

che ammette il sistema completo di soluzioni F .

Infatti dalle (1) si ha

$$\frac{\partial f_i}{\partial q^r} = \frac{\partial F_i}{\partial Q^S} \frac{\partial Q^S}{\partial q^r} + \frac{\partial F_i}{\partial P_S} \frac{\partial P_S}{\partial q^r}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_r} = \frac{\partial F_i}{\partial Q^S} \frac{\partial Q^S}{\partial p_r} + \frac{\partial F_i}{\partial P_S} \frac{\partial P_S}{\partial p_r}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{\partial F_i}{\partial Q^S} \frac{\partial Q^S}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial P_S} \frac{\partial P_S}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial t}$$

Sostituendo nella (2) si ha:

$$(4.4) \quad \frac{\partial F_i}{\partial Q^S} \left(\frac{\partial h}{\partial p_r} \frac{\partial Q^S}{\partial q^r} - \frac{\partial h}{\partial q^r} + \frac{\partial Q^S}{\partial p_r} \frac{\partial Q_S}{\partial t} \right) + \frac{\partial F_i}{\partial P_S} \left(\frac{\partial h}{\partial p_r} \frac{\partial P_S}{\partial q^r} - \right. \\ \left. - \frac{\partial h}{\partial q^r} \frac{\partial P_S}{\partial p_r} + \frac{\partial P_S}{\partial t} \right) + \frac{\partial F_i}{\partial t} = 0$$

Questa equazione coincide con la (3) perché risulta

$$\frac{\partial h}{\partial p_r} \frac{\partial Q^S}{\partial q^r} - \frac{\partial h}{\partial q^r} \frac{\partial Q^S}{\partial p_r} + \frac{\partial Q^S}{\partial t} = (h, Q^S)_{qp} + \frac{\partial Q^S}{\partial t} = \dot{Q}^S = \frac{\partial H}{\partial P_S}$$

e analogamente

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p_r} \frac{\partial P_S}{\partial q^r} - \frac{\partial h}{\partial q^r} \frac{\partial P_S}{\partial p_r} + \frac{\partial P_S}{\partial t} \right) = \dot{P}_S = - \frac{\partial H}{\partial Q^S}$$

Le Q^S, P_S sono calcolate mediante la loro dipendenza dalle q, p, t .

Se la trasformazione (1) non è canonica non risulta [si pone, al solito

$$\bar{h}(QPt) = h(qpt)]$$

$$(h P_s)_{qp} = (h P_s)_{QP} = - \frac{\partial \bar{h}}{\partial Q^s}$$

$$(h Q^s)_{qp} = (\bar{h} Q^s)_{QP} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial P_s}$$

ma risulta sempre

$$(h Q^s) + \frac{\partial Q^s}{\partial t} = \dot{Q}^s$$

e analoghe (1).

Nel caso particolare in cui la (1) sia canonica, utilizzando le (3.18) e la (3.24) del cap. III si ha:

$$\frac{\partial Q^s}{\partial t} = - \left(\frac{\partial w}{\partial t}, Q^s \right) ; \quad \frac{\partial P_s}{\partial t} = - \left(\frac{\partial w}{\partial t}, P_s \right)$$

e quindi la (4) si riduce immediatamente alla (3).

Poiché la (1) trasforma la (2) nella (3), essa trasforma pure il sistema caratteristico della (2) nel sistema caratteristico della (3). In altri termini la (1) trasforma il sistema canonico relativo ad h nel

(1) D'altra parte se $2n$ funzioni indipendenti g_k , di $2n+1$ variabili x^i soddisfano due equazione del tipo (2)

$$\sum_{i=1}^{2n+1} a_i \frac{\partial g_k}{\partial x^i} = 0 \quad \sum_{i=1}^{2n+1} b_i \frac{\partial g_k}{\partial x^i} = 0 \quad (k = 1 \dots 2n)$$

i due sistemi algebrici nelle incognite a_i e rispett. b_i , e aventi

la matrice $\left\| \left| \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \right| \right\|$ di rango $2n$ hanno le soluzioni proporzionali ai

minori di detta matrice e quindi le a_i e le b_i sono proporzionali: $a_i = k b_i$. Ne segue che i sistemi (3) e (4) sono equivalenti, indipen-

dentemente dalla dimostrazione fatta dopo la formula (4).

nel sistema canonico relativo ad H .

A questo punto si può dare una dimostrazione nuova e più rapida della proposizione dimostrata nel cap. III n° 3; ad ogni gruppo di funzioni di ordine $2n$ privo di funzioni singolari, è associato un hamiltoniano h i cui sistemi completi di integrali primi coincidono con le basi del gruppo stesso.

Infatti, sia ϕ^i, ψ_j una base canonica del gruppo. Scelto un hamiltoniano $H(QPt)$ in $2n$ variabili canoniche, si consideri una base canonica ϕ^i, ψ_j del gruppo dei suoi integrali primi. La TC

$$\phi^i = \Phi^i; \psi_j = \Psi^j$$

fa corrispondere (secondo la relazione $H = h + \frac{\partial W_i}{\partial t}$) H ad un certo hamiltoniano $h(qpt)$ per il quale le ϕ^i, ψ_j costituiscono un sistema completo di integrali primi.

Come corollario si ha che se le f_j sono una base di un gruppo di ordine $2n$, privo di funzioni singolari, il sistema di equazioni

$$a_r(qpt) \frac{\partial f_i}{\partial q^r} + b_r(qpt) \frac{\partial f_i}{\partial p_r} + \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0 \quad (i=1 \dots 2n)$$

ha sempre soluzioni a_i, b_i che sono le derivate parziali di un'unica funzione $h(qpt)$

$$a_r = \frac{\partial h}{\partial p_r} \quad ; \quad b_r = - \frac{\partial h}{\partial q^r}$$

C A P I T O L O VI

Principi variazionali. ⁽¹⁾

1. L'azione come generatrice del moto.

La generatrice $S(q_0, p_0, t)$ della trasformazione canonica di Hamilton Jacobi mette in relazione fra loro, come si è visto nei nn. precedenti, le variabili $q(t), p(t)$ relative ad un istante generico con le q_0, p_0 corrispondenti all'istante iniziale. Stante l'arbitrarietà dell'istante iniziale si può anche dire che la funzione S mette in relazione i valori delle variabili canoniche relative a due istanti qualunque. Vi è così una differenza sostanziale fra la teoria di Hamilton Jacobi e le teorie lagrangiana o hamiltoniana le quali sono basate su equazioni differenziali, e quindi mettono in relazione fra loro i valori delle variabili relative a due istanti "infinitamente vicini".

Ciò suggerisce l'idea che la teoria di Hamilton Jacobi possa consentire di determinare il moto del sistema meccanico quando siano assegnate le configurazioni di queste relative a due istanti diversi t_1 e t_2 . Il problema consiste quindi nel calcolare la funzione S .

Lungo il moto si ha

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial S}{\partial t} = \dot{p}_i q^i - H = \mathcal{L}$$

e quindi

$$S(q_2, q_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$$

Poiché, come si è visto nel n° 7 Cap. II se una trasformazione ha generatrice S la trasformazione inversa ha generatrice $-S$, si ha pure

$$\frac{dS(-t)}{dt_1} = \mathcal{L}(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1)$$

(1) Questo capitolo ha carattere prevalentemente descrittivo.

e quindi in generale

$$(1.1) \quad S(q_2, q_1, t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt .$$

La "azione" S è già stata incontrata nel n° 5 del Cap. IV.

Poiché nel membro destro non compaiono q_1 e q_2 , è necessario mettere in evidenza che la espressione di S nella (1) va intesa nel senso che l'integrale va calcolato lungo il moto effettivo $q(t)$, che si svolge fra gli istanti t_1 e t_2 e fra le configurazioni $q(t_1)$ e $q(t_2)$ assegnate relativamente a questi istanti.

La funzione in (1) è determinata quando siano note le funzioni $q(t)$ nell'intervallo (t_1, t_2) : ma le $q(t)$ sono proprio le incognite del problema. La difficoltà può essere superata se si riesce a determinare qualche proprietà che caratterizzi l'integrale (1) lungo la effettiva soluzione delle equazioni del moto, nella classe degli integrali calcolati con funzioni $q(t)$ arbitrarie.

Una caratterizzazione del genere viene data nel n° 3.

2. Alcuni spazi.

Si consideri un sistema meccanico ad n gradi di libertà.

E' conveniente introdurre alcuni spazi nei quali la descrizione del moto risulta particolarmente perspicua. A seconda degli aspetti che si vogliono mettere in evidenza conviene di volta in volta scegliere uno spazio diverso.

Nel seguito si useranno i tre spazi seguenti:

1) lo spazio delle configurazioni (spazio Q) avente dimensione n e nel quale i punti sono contrassegnati dalle n coordinate lagrangiane del sistema meccanico.

2) Lo spazio degli eventi (spazio QT) avente $n+1$ dimensioni, ottenuto dallo spazio Q con l'aggiunta dell'asse dei tempi.

3) Lo spazio delle fasi (spazio QP) avente $2n$ dimensioni, e nel quale i

punti sono contrassegnati dalle $2n$ coordinate canoniche del sistema meccanico.

Nello spazio Q ogni punto corrisponde ad una configurazione del sistema meccanico e viceversa, ogni configurazione del sistema possiede un punto rappresentativo in tale spazio.

Un moto del sistema è noto quando siano assegnate le coordinate lagrangiane in funzione del tempo, $q^i = \phi^i(t)$ e cioè quando sia assegnata nello spazio Q una curva, parametrizzata mediante t .

Per individuare un moto mediante le equazioni di Lagrange occorre assegnare, in corrispondenza ad un istante (iniziale) t_0 , le $2n$ quantità $q^i(t_0)$ e $\dot{q}^i(t_0)$: occorre cioè assegnare nello spazio Q un punto Q_0 e il vettore tangente in Q_0 alla traiettoria che corrisponde al moto cercato.

Nel problema che si vuole affrontare, data, come sempre, la funzione lagrangiana, si assegnano invece due punti Q_1 e Q_2 dello spazio Q e due istanti t_1 e t_2 e si considera il moto nel quale il punto rappresentativo passa per Q_1 e Q_2 rispettivamente agli istanti t_1 e t_2 .

3. Principi variazionali.

Si consideri due punti Q_1, Q_2 nello spazio Q e una curva Γ che li contenga. Si supponga che Γ sia la traiettoria (dello spazio Q) corrispondente ad un moto effettivo

$$(3.1) \quad q^i = \phi^i(t) \quad (i = 1 \dots n)$$

Le (1) sono ovviamente le equazioni parametriche di Γ e, stante la scelta del parametro t , esse forniscono pure la legge di percorrenza (legge oraria) del moto del punto che rappresenta il sistema meccanico nello spazio Q . Note le $q^i(t)$ sono note anche le $\frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i$ e quindi, detti t_1 e t_2 gli istanti nei quali tale punto transita per Q_1 e Q_2 , l'integrale:

$$(3.2) \quad S(q_1, q_2; t_1, t_2) = \int_{\Gamma}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

è noto su Γ . In partenza l'integrale (2) è quindi definito soltanto lungo l'effettiva soluzione (1) delle equazioni del moto.

Una volta definita la funzione S mediante l'integrale (2) è però possibile svincolarsi dal moto effettivo del sistema meccanico dato.

Si considerino infatti fissi gli istanti t_1 e t_2 e i punti Q_1 e Q_2 e si consideri una nuova curva $\bar{\Gamma}$ che congiunge i punti Q_1 e Q_2 .

E' possibile ideare un moto lungo $\bar{\Gamma}$ nel modo seguente.

Si ponga una qualunque corrispondenza biunivoca e continua fra i punti di Γ e di $\bar{\Gamma}$. Poiché ad ogni punto di Γ corrisponde secondo le (1) un ben determinato istante, la corrispondenza introdotta fra Γ e $\bar{\Gamma}$ fa corrispondere ad ogni punto di $\bar{\Gamma}$ un ben determinato valore di t . In tal modo, anche se a priori non esiste una parametrizzazione di $\bar{\Gamma}$ mediante il tempo, passando attraverso Γ si possono scrivere per $\bar{\Gamma}$ equazioni parametriche nella forma:

$$\bar{q}^i = \alpha^i(t)$$

o anche, introducendo il divario fra Γ e $\bar{\Gamma}$

$$(3.3) \quad \bar{q}^i = \phi^i(t) + \beta^i(t) .$$

Le considerazioni precedenti possono essere generalizzate ancora.

Siano assegnati due punti dello spazio Q , \bar{Q}_1 e \bar{Q}_2 distinti da Q_1 e Q_2 . Siano inoltre assegnati due istanti t'_1 e t'_2 distinti da t_1 e t_2 . Si indichino con Q'_1 e Q'_2 i punti di Γ relativi ai valori t'_1 e t'_2 rispettivamente del parametro t , cioè i punti per i quali nel moto effettivo, il punto rappresentativo transita agli istanti t'_1 e t'_2 .

Assegnata una curva $\bar{\Gamma}$ che passi per \bar{Q}_1 e \bar{Q}_2 si ponga una corrispondenza

denza biunivoca fra l'arco di $\bar{\Gamma}$ connettente \bar{Q}_1 e \bar{Q}_2 e l'arco di Γ connettente Q_1' e Q_2' . Come nel caso precedente si può allora assegnare al detto arco su $\bar{\Gamma}$ una parametrizzazione del tipo (3').

A seconda della corrispondenza scelta fra Γ e $\bar{\Gamma}$ si ottengono diverse funzioni (3') e quindi diverse leggi di percorrenza dell'arco di $\bar{\Gamma}$. In definitiva si ottengono su $\bar{\Gamma}$ infiniti moti (in generale fittizi).

Viceversa è ovvio che, a partire da Γ è possibile costruire una curva (3), assegnando le funzioni $\beta^i(t)$ cioè assegnando il vettore $\vec{\beta}(t)$ in corrispondenza ad ogni punto di Γ stessa.

La velocità del punto rappresentativo su $\bar{\Gamma}$ è

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \phi^i(t) + \frac{d\beta^i}{dt} \\ \text{ossia} \\ (3.4) \quad \dot{q}^i &= \dot{q}^i + \frac{d\beta^i}{dt} \end{aligned}$$

Indicata con $\delta f(t)$ la differenza dei valori di una funzione f calcolati su $\bar{\Gamma}$ e su Γ per lo stesso istante t (variazione sincrona), si scrivano (3) e (4) nella forma:

$$(3.5) \quad \delta q^i = \beta^i$$

$$(3.6) \quad \delta \dot{q}^i = \frac{d\beta^i}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q^i$$

Quest'ultima relazione si può scrivere

$$(3.6') \quad \delta \frac{dq^i}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q^i$$

che mostra che le operazioni δ e $\frac{d}{dt}$ sono commutabili.

La definizione dell'integrale (2) per moti "fittizi", permette di caratterizzare tale integrale lungo i moti effettivi: tale caratterizzazione si otterrà confrontando il valore dell'integrale (2) relativo al moto effettivo con i valori dello stesso integrale relativi a tutti i possibili moti fittizi che differiscono "di poco" da quelli effettivi. Con questa ultima espressione si intende dire che i moti fittizi di confronto vengono

presi su curve $\bar{\Gamma}$ "infinitamente vicine" a Γ e per moti (3) "infinitamente vicini" al moto(1).

Pertanto saranno considerate infinitesime le quantità $\delta t_1 \equiv t'_1 - t_1$ e $\delta t_2 \equiv t'_2 - t_2$. Per esempio per esprimere la classe delle curve $\bar{\Gamma}$ e i moti di esse, si può introdurre un parametro ϵ , di cui si considerino solo valori tendenti a zero, in modo che si possa scrivere $\bar{q}^i(t) = \epsilon n^i(t)$, dove le n^i sono funzioni opportune.

Si ha così: $\bar{q}^i(t) = q^i(t) + \epsilon n^i(t)$; $\dot{\bar{q}}^i(t) = \dot{q}^i(t) + \epsilon \dot{n}^i(t)$ cioè $\delta q^i = \epsilon n^i$; $\delta \dot{q}^i = \epsilon \dot{n}^i$.

Nel seguito si continuerà però ad usare la notazione δq^i , $\delta \dot{q}^i$.

Si ha ora:

$$\begin{aligned}
 S_{\bar{\Gamma}} - S_{\Gamma} &= \int_{\bar{\Gamma} t'_1}^{t'_2} \mathcal{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) dt - \int_{\Gamma t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt = \\
 &= \int_{\bar{\Gamma} t'_1}^{t_1} \mathcal{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) dt + \int_{\bar{\Gamma} t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) dt + \int_{\bar{\Gamma} t_2}^{t'_2} \mathcal{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) dt - \int_{\Gamma t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \\
 &= \int_{\bar{\Gamma} t'_1}^{t_1} \mathcal{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) dt + \int_{\bar{\Gamma} t_2}^{t_2} \mathcal{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) dt + \int_{\bar{\Gamma} t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \Big|_{\Gamma} dt + \\
 &+ \int_{\bar{\Gamma} t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \Big|_{\Gamma} \delta q^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \Big|_{\Gamma} \delta \dot{q}^i \right) dt - \int_{\Gamma t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt .
 \end{aligned}$$

Si considerino il terzo e il quinto integrale. Nel primo di questi due la funzione ℓ è calcolata su Γ (e non su $\bar{\Gamma}$). Inoltre sulle due curve si è stabilita una corrispondenza biunivoca che associa i due punti (uno su Γ , l'altro su $\bar{\Gamma}$) corrispondenti allo stesso valore di t . Perciò l'elemento di Γ corrispondente ad un determinato valore di t contribuisce nell'ultimo integrale con il termine $-\ell(q\dot{q}t)dt$ e c'è un elemento di $\bar{\Gamma}$ che contribuisce, mediante il terzo integrale, con il termine $\ell(q\dot{q}t)dt$ relativo allo stesso valore di t . Poiché in entrambi gli integrali t varia fra gli stessi estremi t_1 e t_2 , i due integrali hanno somma nulla; in sostanza, in virtù della corrispondenza scelta, nel terzo integrale sparisce ogni traccia della curva $\bar{\Gamma}$. Poiché considerazioni analoghe possano farsi per il quarto integrale, si ha:

$$S_{\bar{\Gamma}} - S_{\Gamma} = \int_{\bar{\Gamma}t_1'}^{t_1} \ell(\bar{q}\dot{\bar{q}}t)dt + \int_{\bar{\Gamma}t_2'}^{t_2'} \ell(\bar{q}\dot{\bar{q}}t)dt + \int_{\Gamma t_2}^{t_2} \left(\frac{\partial \ell}{\partial q} \delta q^i + \frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) dt.$$

I primi due integrali, poiché gli intervalli temporali $t_1' - t_1$ e $t_2' - t_2$ sono infinitesimi, possono essere sostituiti rispettivamente con $-\delta t_1$ e con δt_2 . Nell'ultimo integrale si può eseguire una integrazione parziale del secondo termine:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \delta \frac{dq^i}{dt} dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \frac{d}{dt} \delta q^i dt = \delta q^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i dt .$$

Raccogliendo si ha:

$$(3.7) \quad S_{\bar{\Gamma}} - S_{\Gamma} = \mathcal{L} \delta t_2 - \mathcal{L} \delta t_1 + \delta q^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \Big|_{t_2} - \delta q^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \Big|_{t_1} +$$

$$+ \int_{\Gamma} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt .$$

Le variazioni δq^i sono le differenze fra i valori delle q^i calcolati nello stesso istante t .

Convien introdurre le variazioni delle coordinate relative agli estremi Q_1, \bar{Q}_1 e Q_2, \bar{Q}_2 dei due archi di Γ e di $\bar{\Gamma}$. Si ha per es. per il primo estremo:

$$\bar{q}^i(t_1) - q^i(t_1) = \bar{q}^i(t_1 + \delta t_1) - q^i(t_1) =$$

$$= \bar{q}^i(t_1) + \dot{\bar{q}}^i(t_1) \delta t_1 - q^i(t_1) = \delta q^i(t_1) + \dot{\bar{q}}^i(t_1) \delta t_1$$

$$= \delta q^i(t_1) + (\dot{q}^i(t_1) + \delta \dot{q}^i(t_1)) \delta t_1 .$$

Nei due estremi, quindi, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, si ha

$$(3.8) \quad \begin{cases} \Delta q^i(t_1) \equiv \bar{q}^i(t_1) - q^i(t_1) = \delta q^i(t_1) + \dot{q}^i(t_1) \delta t_1 \\ \Delta q^i(t_2) \equiv \bar{q}^i(t_2) - q^i(t_2) = \delta q^i(t_2) + \dot{q}^i(t_2) \delta t_2 \end{cases}$$

La (7) si scrive allora, ponendo $\Delta S \equiv S_{\bar{\Gamma}} - S_{\Gamma}$

$$\Delta S = \int_{\Gamma}^{t_2} \left(\frac{\partial \ell}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt + \ell \delta t_2 - \ell \delta t_1 + [p_i (\Delta q^i - \dot{q}^i)]_{t_2} - [p_i (\Delta q^i - \dot{q}^i)]_{t_1}$$

dove si è posto, al solito, $p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$. Introducendo la funzione hamiltoniana $h = p_i \dot{q}^i - \ell$ si ha infine:

$$(3.9) \quad \Delta S = \int_{\Gamma}^{t_2} \left(\frac{\partial \ell}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt - h \Delta t_2 + h \Delta t_1 + p_i \Delta q^i \Big|_{t_2} - p_i \Delta q^i \Big|_{t_1}.$$

In particolare, se Γ e $\bar{\Gamma}$ hanno gli stessi estremi $Q_1 = \bar{Q}_1$ e $Q_2 = \bar{Q}_2$, si ha:

$$(3.10) \quad \Delta S = \int_{\Gamma}^{t_2} \left(\frac{\partial \ell}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt$$

La (10) fornisce una possibile caratterizzazione dell'integrale (2) relativo ai moti effettivi. Infatti se il moto su Γ è un moto effettivo le quantità in parentesi sono nulle in virtù delle equazioni di Lagrange e quindi si ha:

$$(3.11) \quad \Delta S_{\Gamma} = 0$$

La (11) esprime la stazionarietà dell'integrale (2). Il risultato si può esprimere nel modo seguente:

L'azione S è stazionaria rispetto a variazioni sincrone fra estremi fissi.

L'enunciato precedente va sotto il nome di principio di Hamilton⁽¹⁾.

Tornando alla (9) si vede che se Γ è una traiettoria sulla quale sono soddisfatte le equazioni di Lagrange, si ha:

$$(3.12) \quad \Delta S = (p_i \Delta q^i - h \Delta t)_2 - (p_i \Delta q^i - h \Delta t)_1.$$

Le derivate di S sono quindi

$$\left. \frac{\partial S}{\partial q^i} \right|_1 = - p_i \Big|_1 \quad ; \quad \left. \frac{\partial S}{\partial q^i} \right|_2 = p_i \Big|_2$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial t} \right|_1 = h \Big|_1 \quad ; \quad \left. \frac{\partial S}{\partial t} \right|_2 = h \Big|_2$$

L'ultima di queste è l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$(3.13) \quad h + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

E' immediato riconoscere che la trattazione precedente può essere fatta anche nello spazio QT : in questo spazio, come è ovvio, la parametrizzazione di una curva Γ mediante t non richiede alcuna precisazione, ed è soggetta alle solite condizioni che intervengono quando si parametrizza una curva mediante una coordinata.

Le (1) in questo caso rappresentano le equazioni parametriche della proiezione della curva Γ nello spazio Q ; interpretate nello spazio

(1) Si può riottenere la meccanica hamiltoniana assumendo il principio di Hamilton come punto di partenza. La variazione di S fra estremi fissi è data dalla (10). Postulando che per i moti effettivi sia $\Delta S = 0$ si ha:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt = 0$$

In base al lemma fondamentale del calcolo delle variazioni (v. per es. [1] Vol. I pag. 185 nelle ipotesi poste per le δq^i , si annullano le quantità in parentesi e cioè sussistono le equazioni di Lagrange.

QT sono invece direttamente le equazioni parametriche della curva.

Una trattazione analoga può essere fatta nello spazio delle fasi, come ora si accennerà rapidamente.

L'integrale (2) nello spazio delle fasi va scritto:

$$V_{\Gamma} = \int_{\Gamma t_1}^{t_2} [p_i \dot{q}^i - h(qp)] dt$$

dove Γ è una curva nello spazio QP.

Per variazioni delle variabili indipendenti qp, si ottiene una nuova curva $\bar{\Gamma}$ percorsa con legge oraria dipendente dalle variazioni assegnate.

Risulta, con calcoli analoghi ai precedenti:

$$\begin{aligned} \Delta V = V_{\bar{\Gamma}} - V_{\Gamma} &= \int_{\bar{\Gamma} t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}^i - h) dt - \int_{\Gamma t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}^i - h) dt = \\ &= \int_{\Gamma t_1}^{t_2} (\dot{q}^i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}^i - \frac{\partial h}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial h}{\partial q^i} \delta q^i) dt \\ &+ \left| (p_i \dot{q}^i - h) \Delta t \right|_{t_1}^{t_2} = \int_{\Gamma t_1}^{t_2} \left| (\dot{q}^i - \frac{\partial h}{\partial p_i}) \delta p_i - (p_i + \frac{\partial h}{\partial q^i}) \delta q^i \right| dt + \\ &+ \left| p_i \delta q^i + (p_i \dot{q}^i - h) \Delta t \right|_{t_1}^{t_2} = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left| (\dot{q}^i - \frac{\partial h}{\partial p_i}) \delta p_i + (p_i + \frac{\partial h}{\partial q^i}) \delta q^i \right| dt + \left| (p_i \Delta q_i - h \Delta t) \right|_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

dove le Δq sono definite dalle (8).

Come si vede, il sussistere delle equazioni di Hamilton riduce la variazione di V alla variazione fra gli estremi data dall'ultimo termine.

D'altra parte le equazioni di Hamilton conducono al seguente principio: l'azione V è stazionaria rispetto a variazioni sincrone fra estremi fissi.

Viceversa, postulando che l'azione, calcolata fra estremi fissi, sia stazionaria e valendosi del lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, si ottengono le equazioni di Hamilton.

4. Estremali. Estremali trasverse a una famiglia di superfici.

D'ora in poi ci si porrà sistematicamente nello spazio QT . Le curve di questo spazio sulle quali si annulla l'integrale (3.9) sono dette estremali dal problema variazionale.

Va ricordato che l'espressione integrale (1.1) di S è da intendersi nel senso che l'integrale è calcolato su una curva congiungente Q_1 e Q_2 e corrispondente all'effettivo moto del sistema: in altri termini, l'integrale è calcolato su un arco di estremale congiungente Q_1 e Q_2 . Anche la variazione (3.12) va intesa come variazione di S quando ci si sposti da un arco di estremale ad un altro i cui estremi sono legati agli estremi del primo arco dai differenziali che figurano in detta formula.

Nel seguito si assumerà l'ipotesi aggiuntiva che ogni coppia di punti A, B nello spazio QT possa essere congiunta da una sola estremale. Ciò vuol dire che assegnati $t_A q_A^i$ ($i = 1 \dots n$) fra le ∞^n estremali uscenti da A (corrispondenti agli ∞^n modi di assegnare le restanti condizioni iniziali del moto per $t = t_A$ e cioè le $\dot{q}^i(t_A)$) esiste una e una sola estremale passante per il punto, pure assegnato, B e cioè esiste uno e un solo moto per il quale il sistema partendo dalle configurazioni q_A all'istante t_A , raggiunge la configurazione q_B all'istante t_B .

Il valore di $S(AB)$ verrà detto distanza geodetica fra A e B .

Si osservi ancora che, la funzione S è soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi come è espresso dalla (3.13) e quindi le soluzioni $q^i(A)$ del sistema caratteristico associato, che in questo caso (I n° 5) ha forma canonica, sono curve caratteristiche della stessa equazione (3.13).

La "inclinazione" della generica estrema è data, in ogni punto, dalle \dot{q}^i calcolate in quel punto. L'inclinazione delle estremali può pure essere data assegnando le p_i , che, in virtù delle (1.4) e (1.3') Cap. III sono legate biunivocamente alle \dot{q}^i . Perciò tanto le soluzioni delle equazioni di Lagrange, quando le soluzioni delle equazioni di Hamilton possono essere usate, come è ovvio, per individuare una generica estrema.

Si torni a prendere in esame una coppia di punti A, B appartenenti allo spazio QT.

Sia Σ una superficie passante per A e si considerino tutte le estremali congiungenti B con i punti di Σ . È possibile definire una distanza geodetica di B da Σ come si è definita la distanza geodetica di B da A. Sia \bar{A} e Σ un punto tale che la distanza geodetica $S(PB)$ sia stazionaria in \bar{A} al variare di P sulla superficie in un intorno di A.

Sia $S(PB)$ stazionaria in A quando B è fisso; allora nella (3.12) scritta nella forma:

$$\Delta S = (p_i \Delta q^i - h \Delta t)_B - (p_i \Delta q^i - h \Delta t)_P$$

bisogna porre $\Delta S = 0$ $\Delta q^i /_B = 0$, $\Delta t /_B = 0$

e quindi si ha per $P = \bar{A}$

$$(4.1) \quad h(q, p, t) \Delta t - p_i \Delta q^i = 0 .$$

D'altra parte se

$$(4.2) \quad X(q, t) = 0$$

è l'equazione di Σ , si ha pure

$$(4.3) \quad \frac{\partial X}{\partial q^i} \Delta q^i + \frac{\partial X}{\partial t} \Delta t = 0 .$$

Nella (1) gli $n+1$ differenziali non sono indipendenti perché deb-

bono soddisfare alla (3) che esprime l'appartenenza del punto alla superficie Σ .

Moltiplicando la (3) per un fattore λ indeterminato e sommando alla (1) si ha

$$(h + \lambda \frac{\partial X}{\partial t}) \Delta q^i + (-p_i + \lambda \frac{\partial X}{\partial q^i}) \Delta t = 0 \quad .$$

Se si sceglie λ in modo che uno dei coefficienti dei differenziali sia nullo, a sinistra resta una combinazione lineare di n differenziali indipendenti, i cui coefficienti debbono quindi essere nulli.

Si hanno così le condizioni:

$$(4.4) \quad \frac{h}{\frac{\partial X}{\partial t}} = \frac{-p_i}{\frac{\partial X}{\partial q^i}}$$

o anche in termini del lagrangiano

$$(4.5) \quad \frac{L - \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}}{\frac{\partial X}{\partial t}} = \frac{-p_i}{\frac{\partial X}{\partial q^i}}$$

Le (4) (o le (5) costituiscono le cosiddette condizioni di trasversalità dell'estremale rispetto alla superficie Σ . L'estremale che soddisfa tali condizioni si chiama "trasversa" rispetto a Σ . Il valore di $S(B, \bar{A})$ si dice distanza geodetica di B dalla superficie Σ o iconale: l'iconale misura quindi la distanza geodetica stazionaria di B dalla superficie Σ .

Se per ogni punto di una regione intorno alla superficie Σ si può portare un'estremale trasversa, si dice che si ha un campo di estremali. Allora ad ogni punto B , di questa regione corrisponde uno e un solo punto di Σ e cioè quello dal quale esce l'estremale trasversa passante per B .

In particolare un campo di estremali associa ad ogni punto della regione considerata un vettore p_i .

Se, lasciando fissi A e B , si considera una nuova superficie, ancora passante per A , ma distinta da Σ , la distanza geodetica di B da questa nuova superficie, sarà in generale diversa dalla precedente e sarà differente l'estremale per B sulla quale tale distanza è stazionaria: si ottiene così un nuovo campo di estremali e precisamente il campo delle estremali trasverse alla nuova superficie.

Così proseguendo si vede che ogni estremale per B è trasversa ad una certa superficie passante per A : se si cambia la direzione dell'estremale passante per B si trova, mediante la corrispondenza individuata dalla trasversalità, una superficie passante per A e viceversa, se si prendono superfici diverse passanti per A si trovano estremali diverse, ad esse trasverse e passanti per B (si confronti col n° 4 del Cap. II).

In conclusione si riconosce che nello spazio QT esistono ∞^n campi di estremali: ad ogni estremale per B corrisponde una superficie alla quale l'estremale stessa è trasversa e alla quale sono trasverse tutte certe estremali "parallele" a quella passante per B .

In corrispondenza ad ogni estremale passante per B si ha perciò un campo di estremali diverso.

Un particolare campo di estremali può essere assegnato quindi dando una superficie alla quale esso è trasverso.

Naturalmente, in modo equivalente, un campo di estremali può essere dato assegnando un campo di vettori covarianti p_j soddisfacenti ad opportune condizioni che assicurino la validità dell'equazione di Hamilton Jacobi (v. n° 7).

Da quanto precede si riconosce che esistono ∞^n campi di estremali ed ogni campo è costituito a sua volta da ∞^n estremali: le estremali sono quindi in totale ∞^{2n} e infatti esse sono le soluzioni del sistema hamiltoniano. In sostanza un campo di estremali è costituito dal complesso delle soluzioni del sistema canonico ottenute prendendo "tutte le possibili q ", corrispondenti ad un ben determinato campo di vettori p .

Poiché un campo di estremali è costituito da una famiglia di ∞^n curve, esso è rappresentato parametricamente dalle equazioni

$$(4.6) \quad q^i = \phi^i (t; c_1 \dots c_n)$$

dove $c_1 \dots c_n$ sono i parametri della famiglia.

Si consideri una superficie Σ che possieda un campo di estremali trasverse. A partire da ogni punto della superficie, sulla estremale trasversa passante per il punto, si riporti, sempre dalla stessa parte rispetto alla superficie Σ , una distanza geodetica assegnata a :

$$S = \int L dt = a.$$

L'insieme dei punti B così ottenuti forma una superficie che si dice parallela a Σ . La superficie di partenza e la distanza assegnata individuano univocamente la nuova superficie.

L'equazione della nuova superficie è proprio

$$S = a$$

mentre l'equazione di Σ è ovviamente

$$S = 0.$$

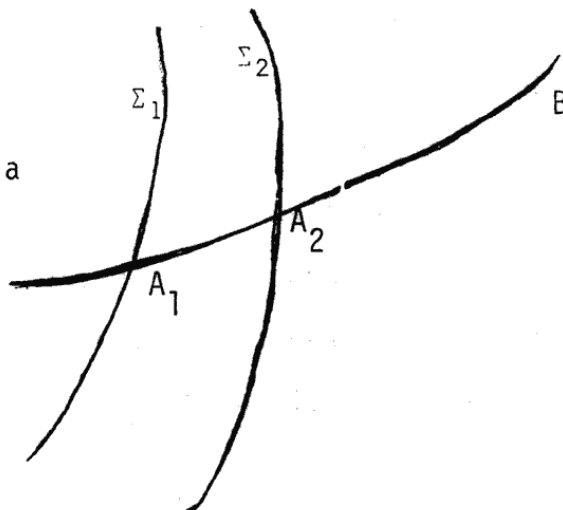
E' facile dimostrare il fatto prevedibile che le estremali trasverse a Σ sono trasverse a tutte le superfici che sono ad essa parallele secondo la definizione ora data.

Siano infatti Σ_1 e Σ_2 due superfici parallele.

Ciò vuol dire che $S(A_1 A_2) = K$

dove K è costante quando A_1 varia arbitrariamente in Σ_1 e A_2 sia il punto di Σ_2 appartenente all'estremale trasversa a Σ_1 e uscente da A_1 .

Se B è un altro punto sulla estremale per A_1 e A_2 si ha



$$\int_{A_1}^B \ell dt = \int_{A_1}^{A_2} \ell dt + \int_{A_2}^B \ell dt = K + \int_{A_2}^B \ell dt .$$

ossia

$$S(A_1B) = K + S(A_2B) .$$

Poiché l'estremale A_1B è trasversa, si ha $\delta S(A_1B) = 0$.

D'altra parte K è costante e quindi si ha:

$$\delta S(A_2B) = 0$$

che mostra che l'estremale A_2B , (cioè A_1B) è trasversa pure a Σ_2 .

Il differenziale della distanza geodetica fra due punti (ossia della distanza misurata lungo la estremale che li congiunge) è espressa dalla (3.12). Nel caso della distanza geodetica di un punto da una superficie, il differenziale di S ha un significato diverso dal precedente. Infatti nel caso di due punti A, B le coordinate t_A, q_A, t_B, q_B possono essere variate arbitrariamente: per es. uno dei due punti può essere tenuto fisso e si può far variare solo l'altro.

Nel caso della distanza di un punto da una superficie la situazione è diversa. Riprendendo la notazione precedente, se $B \notin \Sigma$, a B corrisponde un ben determinato punto $\bar{A} \in \Sigma$ e cioè quello appartenente all'estremale per B trasversa a Σ . Di conseguenza quando si varia B vi sono due possibilità: se B viene spostato lungo la stessa estremale trasversa, il punto \bar{A} corrispondente non varia. Se B viene spostato invece al di fuori di questa estremale, occorre spostare anche \bar{A} : la nuova posizione di \bar{A} è l'intersezione di Σ con la estremale trasversa passante per la nuova posizione di B . In entrambi i casi il contributo portato alla variazione di S dello spostamento di \bar{A} è nullo. Ciò nel primo caso è banale, mentre nel secondo caso è conseguenza del fatto che ci si sposta da un'estremale trasversa a Σ ad un'altra pur essa trasversa a Σ . Il contributo dato dallo spostamento di \bar{A} è

$$h dt_{\bar{A}} - p_{i\bar{A}} dq_{\bar{A}}^i = 0$$

perché il vettore $(-d q_A^i, d t_A)$ tangente a Σ è trasverso al vettore (h, p_i) per la condizione (4.1).

Il differenziale dell'iconale è quindi

$$(4.6) \quad dS = - h d t + p_i d q^i .$$

Dalla (6) si ricava che le derivate dell'iconale sono

$$(4.7) \quad \frac{\partial S}{\partial q^i} = p_i ; \quad \frac{\partial S}{\partial t} = - h$$

come nel caso della distanza geodetica fra due punti. Si vede così che l'iconale soddisfa all'equazione di Hamilton-Jacobi.

Sussiste anche la proprietà reciproca: se $S(q, t)$ è una soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi, esiste un campo di estremali tutte trasverse alle superfici $S = \text{cost.}$

In questo caso S denota la distanza geodetica dalla superficie iniziale in questo campo di estremali.

Per dimostrare l'affermazione fatta, si parta da una soluzione S dell'equazione di Hamilton Jacobi e si definisca

$$(4.8) \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i} .$$

Inoltre dalla stessa equazione si ha

$$(4.9) \quad h(p, q, t) = - \frac{\partial S}{\partial t} .$$

Si consideri il sistema differenziale

$$\dot{q}^i = \frac{\partial h}{\partial p_i}$$

sostituendo in h le (8) in luogo delle p_i : con ciò i secondi membri diventano funzioni di q e t soltanto.

La soluzione generale del sistema (10) consiste in una famiglia di ∞^n curve. Lungo queste curve le p_i sono allora funzioni del solo parametro t e si ha:

$$(4.11) \quad p_i = \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial t}$$

Derivando la (9) si ha poi

$$\frac{\partial S}{\partial q^i \partial t} + \frac{\partial h}{\partial q^i} + \frac{\partial h}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q^i} = 0$$

e usando le (8) e le (10)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial t} + \frac{\partial h}{\partial q^i} + \dot{q}^k \frac{\partial^2 S}{\partial q^k \partial q^i} = 0$$

Confrontando con le (11) si ha infine:

$$(4.12) \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial h}{\partial q^i}$$

che con le (10) caratterizzano la famiglia di curve considerata, come una famiglia a n parametri di estremali.

Si osservi che si ha una famiglia ad n parametri e non a $2n$ parametri (come ci si potrebbe aspettare dato che il sistema (4.10), (4.12) è il sistema canonico), perché ci si è limitati al solo campo di estremali individuato dalla famiglia $S = \text{cost.}$

Si vede pur immediatamente che le estremali trovate sono trasverse rispetto alle superfici S .

5. Cenno sulla costruzione di HUYGENS.

Anche se in questa esposizione non si trattano problemi di ottica, la costruzione di Huygens è tanto vicina all'argomento svolto, che non si può fare a meno di dare un breve cenno.

Nel n° precedente, sfruttando il concetto di campo di (∞^n) estremali trasverse ad una superficie assegnata Σ si sono definite le superfici parallele a Σ come quelle che hanno in comune con Σ lo stesso campo di estremali trasverse. In questo n° si considera il problema duale del precedente.

Scambiando i termini della questione, si considerino tutte le estremali passanti per uno stesso punto B e si prenda su ogni estremale, a partire da B la stessa distanza geodetica a . Si ottiene così una

superficie che ha come "centro" B e che è spontaneo definire "sfera geodetica" di raggio a . Al variare di a , le superfici $S = a$ sono le sfere geodetiche di centro B .

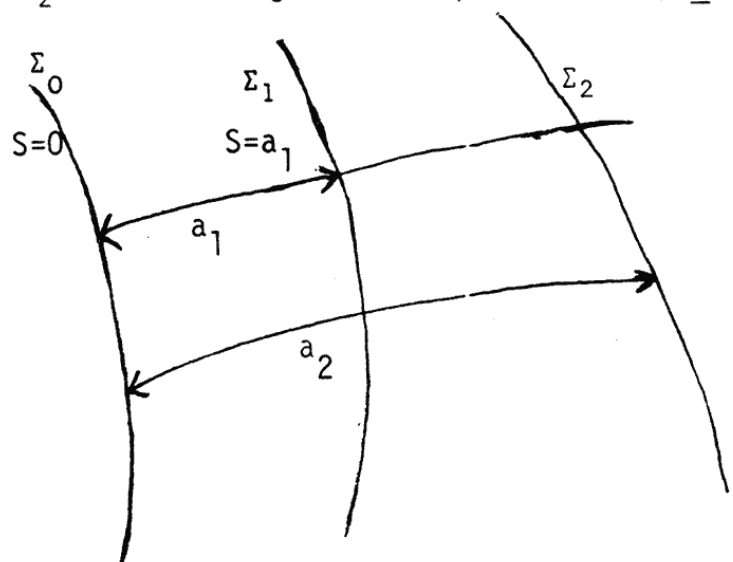
Le estremali uscenti da B appartengono a campi tutti diversi fra loro, perché ognuna di tali estremali è trasversa ad una diversa famiglia di superfici (va ricordato che data una superficie generica, da B esce una sola estremale trasversa ad essa). In particolare i campi p_i sono tutti diversi fra loro sulle diverse estremali che irradiano da B .

Assegnata una qualunque superficie Σ , sia B_1 il punto in cui essa è incontrata dalla estremale trasversa uscente da B . Sia poi a la distanza geodetica $B B_1$ e si consideri la sfera geodetica Ω e raggio a .

Si riconosce subito che le due superfici Σ e Ω sono tangenti in B_1 . Che $B_1 \in \Omega$ è evidente perché Ω è il luogo dei punti aventi da B distanza geodetica a . Inoltre l'estremale $B B_1$, che per ipotesi è trasversa a Σ (e che quindi soddisfa su tale superficie alla condizione di trasversalità) è ovviamente trasversa anche ad Ω perché questa è una sfera e quindi la distanza da B di tutti i suoi punti è stazionaria. Le due superfici avendo lo stesso raggio trasverso in B_1 sono ivi tangenti, perché per entrambe il vettore $\delta q^i, \delta t$ è trasverso allo stesso vettore $p_i, -h$.

Si consideri ora una famiglia di superfici parallele e cioè aventi lo stesso campo di estremali trasverse.

Fissate due superfici Σ_1 e Σ_2 della famiglia, di equazioni rispettive $S = a_1, S = a_2$ si considerino le sfere geodetiche aventi i centri nei punti di Σ_1 e raggio comune $a_2 - a_1$. Per ogni punto B e Σ_1 la



relativa sfera geodetica è tangente a Σ_2 nel punto in cui questa superficie è incontrata dall'estremale uscente da B e trasversa alla famiglia.

La superficie Σ_2 è quindi l'involuppo delle sfere geodetiche aventi i centri in Σ_1 e raggio pari alla distanza geodetica fra Σ_1 e Σ_2 (costruzione di Huygens).

(Il breve cenno dato mette in evidenza che in certi casi le estremali uscenti da un punto B possono appartenere in realtà tutte ad uno stesso campo ed essere tutte trasverse ad una stessa superficie.

Questo fatto è fondamentale nella teoria dell'ottica ondulatoria.)

6. Integrale invariante di Hilbert.

L'espressione delle derivate di S permette di riconoscere che l'iconale è l'integrale di un differenziale esatto.

Nello spazio QT si connetta un punto (fisso) A con un punto (variabile) B, mediante una curva regolare \mathcal{C} . Si introduca la coordinata t come parametro su \mathcal{C} , e siano:

$$(6.1) \quad q^i = \alpha^i(t) \quad (i = 1 \dots n)$$

le equazioni parametriche di \mathcal{C} .

Sia inoltre dato un campo di estremali

$$(6.2) \quad q^i = \phi^i(t, c_1, \dots, c_n)$$

(v. (4.6)).

Per ogni funzione F della posizione B sussiste la espressione:

$$(6.3) \quad F(B) = F(A) + \int_A^B \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial F}{\partial t} dt \right)$$

dove la curva sulla quale si integra da A a B è arbitraria.

Per l'iconale S è quindi indipendente dal cammino l'espressione

$$S(B) = S(A) + \int_A^B \left(\frac{\partial S}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial S}{\partial t} dt \right)$$

Utilizzando le (4.7) e integrando sulla curva (1) si ha:

$$S(B) = S(A) + \int_{eA}^B (p_i \frac{d\alpha^i}{dt} dt - h dt) =$$

$$= S(A) + \int_{eA}^B (\frac{\partial \ell}{\partial q^i} \frac{d\alpha^i}{dt} - p_i \dot{\phi}^i + \ell) dt$$

e infine

$$S(B) = S(A) + \int_{eA}^B [\ell + (\frac{d\alpha^i}{dt} - \dot{\phi}^i) \frac{\partial \ell}{\partial q^i}] dt;$$

Questo integrale non dipende dalla curva C e viene detto integrale invariante di Hilbert.

E' usuale scriverla ponendo $\frac{d\alpha^i}{dt} = (q^i)'$ e $\dot{\phi}^i = \dot{q}^i$ e cioè indicando per ogni punto P , con un apice la derivata rispetto a t calcolata lungo la curva C , e con un punto sovrapposto la derivata rispetto a t , calcolata lungo l'estremale del campo scelto, passante per P . Si ha così:

$$S(B) = S(A) + \int_{eA}^B [\ell + (q^i)' - \dot{q}^i) \frac{\partial \ell}{\partial q^i}] dt .$$

Se in particolare C è l'estremale del campo congiungente A e B , si ha $(q^i)' = \dot{q}^i$ e quindi

$$S(B) = S(A) + \int_A^B \ell dt$$

e si riottiene la definizione di S .

Le considerazioni precedenti si possono compendiare nella proposizione: Se si costruisce un campo di estremali trasverse rispetto ad una superficie Σ di equazioni $\int L dt = a$ e se u^i sono le loro pendenze, definite dalle equazioni

$$(6.4) \quad \frac{dq^i}{dt} = u^i .$$

Allora l'integrale

$$(6.5) \quad \int_A^B [-(q^i)' - u^i) \frac{\partial \ell}{\partial u^i}] dt$$

è indipendente dalla curva e che porta da A a B .

Le q^i ovviamente sono le derivate delle q^i lungo C .

Se viceversa, è dato un campo di vettori p_i , tale che l'integrale

$$(6.6) \quad S = \int_B^A (p_i q'^i - h) dt$$

sia indipendente dalla curva che connette A e B , le funzioni p_i sono le quantità di campo di un campo di estremali e l'integrale fornisce la distanza geodetica, in questo campo, fra A e B .

Infatti se l'integrale non dipende dal cammino, tenendo fisso A si ha in B :

$$\frac{\partial S}{\partial q^i} = p_i ; \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -h$$

e pertanto S , come funzione dell'estremo superiore dell'integrale (6) soddisfa l'equazione di Hamilton-Jacobi.

Ma ogni soluzione di tale equazione è la distanza geodetica in un campo di estremali (n° 4) e quindi si ha la proposizione, inversa della precedente:

Se le funzioni $u(t)$ rendono l'integrale (5) indipendente dal cammino, le equazioni (4) hanno come soluzioni un sistema di ∞^n estremali che soddisfano alla condizione di trasversalità rispetto alle superfici $S(qt) = \text{cost}$.

7. Il ruolo dell'equazione di H-J.

Nella trattazione precedente si è visto che il sussistere della equazione di H J è una condizione necessaria e sufficiente perché un campo di vettori covariante (p_i, \dots, h) nello spazio QT descriva un sistema meccanico di hamiltoniano h .

La necessarietà della condizione è stata data in varie forme e, in particolare, nell'ultimo teorema del n° precedente; la sufficienza della condizione è conseguenza immediata del fatto che il sistema caratteristico associato alla equazione di H J ha forma canonica.

E' ovvio, quindi, che un campo di vettori assegnato ad arbitrio nello spazio QT non descrive un sistema meccanico perché in generale non

soddisfa all'equazione di H - J.

Tuttavia non è difficile riconoscere, almeno in termini qualitativi, che, sotto condizioni molto generali ad un campo di vettori nello spazio QT si può associare un sistema meccanico.

Sia data la varietà

$$(7.1) \quad F(q^1 \dots q^n, q^{n+1}, p_1 \dots p_n) = 0$$

nello spazio R^{2n+1} . All'equazione (1) si può associare un'equazione a derivate parziali del primo ordine

$$(7.2) \quad F(q^1 \dots q^n, u, p_1 \dots p_n) \quad (p_i = \frac{\partial u}{\partial q^i})$$

e questa equazione, a sua volta, può essere ridotta (I n° 5) alla forma di H-J.

$$(7.3) \quad P_{n+1} + h(q^1 \dots q^{n+1}, p_1 \dots p_n) = 0$$

Ciò può essere espresso dicendo che ogni equazione a derivate parziali del primo ordine descrive un sistema meccanico. Anzi, se si può risolvere la (2) rispetto a più di una delle p , si ottengono altrettanti sistemi meccanici relativi alla stessa equazione (2). Naturalmente questi sistemi sono distinti fra loro per il diverso significato assunto di volta in volta dalle variabili: infatti se si risolve la (2) rispetto a p_k , sarà q^k ad avere il ruolo di tempo. Inoltre anche la funzione h nella (3) sarà di volta in volta differente. E' chiaro però che, una volta scelta la variabile che deve avere il ruolo di tempo, l'equazione (2) individua un unico sistema meccanico.

In conclusione si può dire che ogni volta che si assegna nello spazio QT un campo di vettori e una relazione (1) alla quale questo campo deve soddisfare, si ottiene un sistema meccanico.

Se si parte da un principio variazionale nello spazio QT,

$$\delta \int (p_i dq^i - h dt) = 0$$

assegnando il campo $(p_i - h)$ è ancora necessario aggiungere una relazione di tipo (1), la quale assicuri che sussista l'equazione di H - J.

I principi variazionali ai quali si è accennato nel n° 3 non hanno invece richiesto alcuna relazione di tipo (1). Negli spazi Q e PQ sono infatti state assegnate le funzioni $\mathcal{L}(q \dot{q} t)$ e rispett. $h(q p t)$, le quali forniscono le limitazioni necessarie ad assicurare la validità dell'equazione di H-J.

In sostanza, quindi, per ottenere un sistema meccanico da un principio variazionale: occorre

- 1) o assegnare un lagrangiano
- 2) o assegnare un hamiltoniano
- 3) o assegnare un campo di vettori ed insieme una equazione di tipo (1) che equivalga alla equazione di H-J.

In quest'ultimo caso si segue una strada inversa di quella che si segue nei primi due casi: nei casi a) e b), infatti si parte dalle equazioni del moto e, in particolare dalle equazioni canoniche; nel secondo caso si perviene alle equazioni canoniche come passo finale, ricavandole come sistema caratteristico dell'equazione di H-J.

0 o 0 o 0 o 0 o 0

B I B L I O G R A F I A

- [1] COURANT-HILBERT : *Methods of Mathematical Physics* Vol.I,II
1953-1962 Interscience N.Y.
- [2] GOURSAT : *A Course of Mathematical Analysis*
Vol. II parte II Dover 1959
- [3] TRICOMI : *Equazioni a derivate parziali*
Cremonese - Roma - 1957
- [4] EISENHART : *Continuous Groups of transformations*
Dover 1961
- [5] SUDARSHAN - MUKUNDA : *Classical Mechanics* J. Wiley 1974
- [6] LEVI CIVITA-AMALDI : *Lezioni di Meccanica Razionale* -
Zanichelli Bologna 1927