del gruppo.

Si osservi che, se g_1 e g_2 sono funzioni appartenenti a G_r, si ha

$$(1.3) \qquad (g_1,g_2)^* = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial g_1}{\partial F_\alpha} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \omega^\mu} \frac{\partial g_2}{\partial F_\beta} \frac{\partial F_\beta}{\partial \omega^\nu} = \frac{\partial g_1}{\partial F_\alpha} \frac{\partial g_2}{\partial F_\beta} (F_\alpha,F_\beta)^*$$

come per i gruppi ordinari (cfr. [2], pag. 282).

Inoltre, se f,g,h sono tre funzioni di G_r, in virtù di (1.1) vale l'identità di Jacobi:

$$(1.4) \qquad ((f,g)^*,h)^* + ((g,h)^*,f)^* + ((h,f)^*,g)^* = 0$$

§ 2. Caso in cui $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ è singolare. Funzioni neutre.

Supponiamo che la matrice $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ sia singolare, di rango eguale ad $(n-k)$.

Le funzioni $f(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ che hanno P.P.G. nulla con ogni funzione di $\omega_1,\ldots,\omega_n$ si dicono neutre, ed è chiaro che ogni funzione che dipenda da $\omega_1,\ldots,\omega_n$ per il tramite di funzioni neutre è ancora una funzione neutra. Il numero di funzioni neutre indipendenti rispetto alla matrice data è k, come si vede dall'equazione

$$(2.1) \qquad (\Phi,f)^* = 0$$

nell'incognita f, facendo coincidere $\Phi(\omega)$ successivamente con $\omega_1,\ldots,\omega_n$, e si ha (cfr. [1]):

Teorema : Considerato l'insieme delle funzioni di n variabili $\overset{1}{\omega},\dots,\overset{n}{\omega}$, e definita la P.P.G. mediante una matrice $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ singolare e di rango $n-k$, esistono k funzioni, dette neutre, aventi P.P.G. nulla con ogni funzione delle ω[1].

Come conseguenza immediata del Teorema precedente, si ha che se n è dispari esiste almeno una funzione neutra.
Inoltre bisogna fare la seguente precisazione.

Se le funzioni di partenza $F_1,\dots,F_s$ sono tutte funzioni neutre, non è possibile costruire, col procedimento indicato al § 1, alcun gruppo generalizzato di funzioni, ad eccezione del gruppo banale composto dalle $F_1,\dots,F_s$ neutre e dalla funzione identicamente nulla. Pertanto, affinché quanto sarà detto in seguito non si riduca a questo caso, si supporrà che le s funzioni di partenza non siano tutte neutre rispetto alla matrice assegnata.
In altri termini, indicato con a_1 il numero di funzioni neutre indipendenti del gruppo G_r di funzioni costruito a partire da $F_1,\dots,F_s$, supporremo che sia:

$$r - a_1 \geq 2.$$

§ 3. Gruppo reciproco.

Si consideri ora il sistema differenziale:

$$(3.1) \qquad (F_\alpha, f)^* = 0 \qquad (\alpha = 1\dots r);$$

per la proprietà (1.3) le soluzioni di tale sistema sono tutte le funzioni delle ω aventi P.P.G. nulla con ogni funzione di G_r. Esplicitando si ha:

---

(1) Si osservi che se n è pari e la matrice $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ è non singolare, il sistema (2.2) ha solo soluzioni banali e quindi si ricade nel caso dei gruppi generalizzati non singolari ([3]).