C A P I T O L O II

DISTANZE INVARIANTI NEI CONI CONVESSI.

§ 2.1. DISTANZE "TIPO-KOBAYASHI" E "TIPO-CARATHEODORY" .

Le estensioni delle distanze di Carathéodory e di Kobayashi, possono essere "schematizzate" come segue:
Per definire distanze "tipo-kobayashi" o "tipo-carathéodory" su un insieme Ω , è necessario disporre anzitutto di:

i) Uno spazio metrico Δ con distanza d_Δ , per il quale sia assegnato un semigruppo S_Δ di applicazioni $\Delta \to \Delta$ (per l'operazione di composizione di funzioni) dotato di identità, e per il quale valga un "lemma di Schwarz":

Per ogni $f \in S_\Delta$, risulta $d_\Delta(f(t_1),f(t_2)) \leq d_\Delta(t_1,t_2)$

per ogni $t_1 t_2 \in \Delta$.

Sono dati inoltre:

ii) Una famiglia A di applicazioni $f : \Delta \to \Omega$ con le quali si possono realizzare "catene analitiche" cioé:

dati $x,y \in \Omega$, esistono $\nu \in \mathbb{N}$, $t_1', t_1'' \ldots t_\nu', t_\nu'' \in \Delta$, $f_1 \ldots f_\nu \in A$

con $f_1(t_1') = x$, $f_j(t_j'') = f_{j+1}(t_{j+1}')$ $(j = 1,\ldots,\nu-1)$, $f_\nu(t_\nu'') = y$.

La famiglia A deve essere invariante per composizione a sinistra con gli elementi di S_Δ .

iii) Una famiglia B di applicazioni $h : \Omega \to \Delta$, invarianti per composizione a destra con gli elementi di S_Δ .

iv) Un semigruppo S_Ω con identità di applicazioni $g : \Omega \to \Omega$ tale che per ogni $g \in S_\Omega$, $h \in B$, $f \in A$: $h \circ g \circ f \in S_\Delta$.

In queste ipotesi si definiscono una pseudo-distanza "tipo Kobayashi" d_Ω e una pseudo-distanza "tipo Carathéodory" C_Ω in Ω, le quali verificano le proprietà:

I) $C_\Omega(x,y) \leq d_\Omega(x,y)$ per ogni $x,y \in \Omega$, per ogni $g \in S_\Omega$.

II) $d_\Omega(g(x),g(y)) \leq d_\Omega(x,y)$ per ogni $x,y \in \Omega$ e per ogni $g \in S_\Omega$,

$C_\Omega(g(x),g(y)) \leq C_\Omega(x,y)$ per ogni $x,y \in \Omega$ e per ogni $g \in S_\Omega$.

III) $d_\Omega(f(t_1),f(t_2)) \leq d_\Delta(t_1,t_2)$ per ogni $f \in A$ e per ogni $t_1,t_2 \in \Delta$,

$C_\Delta(h(x),h(y)) \leq C_\Omega(x,y)$ per ogni $h \in B$ e per ogni $x,y \in \Omega$.

IV) Se $\Omega = \Delta$ C_Ω e d_Ω coincidono con d_Δ.

Discuteremo un esempio, costruendo delle metriche invarianti in coni convessi Ω.

Sia $\Delta = \mathbb{R}_+^*$ il gruppo moltiplicativo dei numeri reali positivi, con la misura di Haar $t^{-1}dt$.

Per ogni $t_1,t_2 \in \mathbb{R}_+^*$ definiamo distanza $\sigma(t_1,t_2)$ la misura dell'intervallo determinato da t_1 e t_2, cioé

$$\sigma(t_1,t_2) = \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{t} \right| = \left| \log \frac{t_2}{t_1} \right| . \qquad (2.1.1)$$

LEMMA 2.1.1.("Lemma di Schwarz"). *Per ogni applicazione affine* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tale che* $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$ *e per ogni* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+^*$, *si ha:*

$$\sigma(f(t_1), f(t_2)) \leq \sigma(t_1, t_2) \; .$$

Se f *è una traslazione del gruppo moltiplicativo* $\mathbb{R}_+^*$ *vale il segno di uguaglianza identicamente. Se vale il segno di uguaglianza per una coppia* t_1, t_2 *di punti distinti,* f *è una traslazione.*

Dimostrazione. Una funzione affine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che applica $\mathbb{R}_+^*$ in $\mathbb{R}_+^*$ è del tipo $f(t) = \alpha t + \beta$ con $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$.

Supponiamo $t_2 > t_1$, allora

$$\frac{t_2}{t_1} - \frac{f(t_2)}{f(t_1)} = \frac{\beta(t_2 - t_1)}{t_1(\alpha\, t_1 + \beta)} \geq 0 \; .$$

Poiché log è una funzione crescente segue che $\sigma(f(t_2), f(t_1)) \leq$ $\leq \sigma(t_2, t_1)$. Se f è una traslazione nel gruppo $\mathbb{R}_+^*$, allora $\beta = 0$ e quindi $\sigma(f(t_2), f(t_1)) = \sigma(t_2, t_1)$.

Viceversa se vale l'uguaglianza per due punti t_1, t_2, $t_1 \neq t_2$, è $\beta = 0$ e quindi f è una traslazione.

C.V.D.

Sia E uno spazio vettoriale reale localmente convesso di Hausdorff, e Ω un cono (i.e. se $x \in \Omega$ allora $t\,x \in \Omega$ per ogni $t > 0$) convesso aperto di E, $\Omega \neq \{0\}$.

Sia $A = \{f \in Aff(\mathbb{R},E) : f(\mathbb{R}_+^*) \subset \Omega\}$, cioé

$$A = \{f : f(t) = tv + w \quad \text{con } v,w \in E \text{ tale che}$$

$$f(t) \in \Omega \quad \text{per } t > 0\} .$$

Vale la condizione ii), cioé due qualunque punti x,y in Ω possono congiungersi con una "catena affine".

Usando le stesse notazioni di ii), definiamo una pseudo-distanza "tipo-kobayashi" con

$$d_\Omega(x,y) = \inf\{\sigma(t_1',t_1'')+ \ldots + \sigma(t_\nu',t_\nu'')\} \quad \text{per ogni } x,y \in \Omega$$

dove l'estremo inferiore è preso su tutte le possibili scelte

di ν, $t_1',t_1'', \ldots,t_\nu',t_\nu''$, $f_1 \ldots f_\nu$.

Sia $B = \{h \in Aff(E,\mathbb{R}) : h$ continua, $h(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*\}$.

Definiamo una pseudo-distanza "tipo-Carathéodory" con

$$C_\Omega(x,y) = \sup\{\sigma(h(x),h(y)) : h \in B\} \quad \text{per ogni } x,y \in \Omega.$$

Naturalmente C_Ω è una pseudo-distanza se $C_\Omega(x,y) < \infty$ per ogni x,y, $\in \Omega$.

OSSERVAZIONE 1. Il cono convesso Ω, essendo aperto, verifica la seguente condizione:

Se $x \in \Omega$, e se r è una retta affine di E tale che $x \in r$ e $r \cap \Omega$ contenga una semiretta, allora c'è una semiretta r_x contenuta in $r \cap \Omega$ e contenente x nel suo interno.

PROPOSIZIONE 2.1.1. *Risulta* $d_{\mathbb{R}_+^*} = \sigma$

Dimostrazione. Preso $\Omega = \mathbb{R}_+^*$, utilizzando le notazioni della definizione di d_Ω, dal lemma 2.1.1 e dalla disuguaglianza triangolare segue:

$$\sum_{j=1}^{\nu}\sigma(t_j',t_j'') \geq \sum_{j=1}^{\nu}\sigma(f_j(t_j'),f_j(t_j'')) \geq \sigma(f_1(t_1'),f_\nu(t_\nu'')) = \sigma(x,y) .$$

Quindi $d_{\mathbb{R}_+^*}(x,y) \geq \sigma(x,y)$ per ogni $x,y \in \mathbb{R}_+^*$.

D'altro canto scegliendo nella definizione di $d_\Omega(x,y)$, $\nu = 1$, $t_1' = x$, $t_1'' = y$, $f_1(t) = t$, abbiamo

$$d_{\mathbb{R}_+^*}(x,y) \leq \sigma(x,y) \qquad \text{per ogni } x,y \in \mathbb{R}_+^* .$$

C.V.D.

LEMMA 2.1.2. C_Ω *è una pseudo-distanza e inoltre* $C_\Omega(x,y) \leq d_\Omega(x,y)$ *per ogni* $x,y \in \Omega$.

Dimostrazione.Utilizzando le stesse notazioni delle definizioni di d_Ω e C_Ω, per ogni $h \in B$, $h \circ f_j$ è una funzione affine di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che applica $\mathbb{R}_+^*$ in $\mathbb{R}_+^*$. Quindi dal lemma 2.1.1. segue : $\sigma(h\circ f_j(t_j'), h\circ f_j(t_j'')) \leq \sigma(t_j',t_j'')$ per $j = 1\ldots\nu$.

D'altronde dalla disuguaglianza triangolare segue:

$$\sum_{j=1}^{\nu}\sigma(t_j',t_j'') \geq \sum_{j=1}^{\nu}\sigma(h\circ f_j(t_j'),h\circ f_j(t_j'')) \geq \sigma(h\circ f_1(t_1'),h\circ f_\nu(t_\nu'')) =$$

$= \sigma(h(x),h(y))$, pertanto $d_\Omega(x,y) \geq \sigma(h(x),h(y))$.

Prendendo l'estremo superiore rispetto a tutte le $h \in B$, abbiamo

$$d_\Omega(x,y) \geq C_\Omega(x,y) \qquad \text{per ogni } x,y \in \Omega.$$

C.V.D.

PROPOSIZIONE 2.1.2. *Risulta*

$$C_{\mathbb{R}_+^*} = \sigma = d_{\mathbb{R}_+^*} \quad .$$

Dimostrazione. Preso $\Omega = \mathbb{R}_+^*$, l'applicazione identica di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un elemento di B. Quindi dalla definizione di C_Ω segue che

$$C_{\mathbb{R}_+^*}(x,y) \geq \sigma(x,y) \qquad \text{per ogni } x,y \in \mathbb{R}_+^* \quad .$$

D'altro canto, dalla proposizione 2.1.1 e dal lemma 2.1.2, abbiamo

$$C_{\mathbb{R}_+^*}(x,y) \leq d_{\mathbb{R}_+^*}(x,y) = \sigma(x,y) \quad \text{per ogni } x,y \in \mathbb{R}_+^* \ .$$

Pertanto $$C_{\mathbb{R}_+^*}(x,y) = d_{\mathbb{R}_+^*}(x,y) = \sigma(x,y) \quad \text{per ogni } x,y \in \mathbb{R}_+^*$$

C.V.D.

PROPOSIZIONE 2.1.3. *Sia* Ω_j *un cono convesso aperto in* E_j *(spazio vettoriale reale localmente convesso di Hausdorff) con* $j = 1,2$, *se* F *è una applicazione affine continua di* $E_1 \to E_2$ *con* $F(\Omega_1) \subset \Omega_2$, *allora risulta*

$$d_{\Omega_1}(x,y) \geq d_{\Omega_2}(F(x),F(y))$$

per ogni $x,y \in \Omega$.

$$C_{\Omega_1}(x,y) \geq C_{\Omega_2}(F(x),F(y))$$

In particolare gli automorfismi affini continui di Ω *sono isometrie per* d_Ω *e* C_Ω .

Dimostrazione. Segue banalmente dalle definizioni di d_Ω e C_Ω (stesso discorso fatto per i lemmi 1.4.1 e 1.4.3).

OSSERVAZIONE 2. Osserviamo che il lemma 2.1.2 è la proprietà I), la proposizione 2.1.2 è la proprietà IV), la proposizione 2.1.3 è la proprietà II). Per la proprietà III):

$$d_\Omega(f(t_1), f(t_2)) \leq \sigma(t_1,t_2) \qquad \text{per ogni } f \in A \text{ e per ogni } t_1,t_2, \in \mathbb{R}_+^*,$$

segue dalla definizione di d_Ω;

$$\sigma(h(x),h(y)) \leq C_\Omega(x,y) \quad \text{per ogni } h \in B \text{ e per ogni } x,y \in \Omega,$$

segue dalla definizione di C_Ω .

ESEMPIO 2.1.1. Se $\Omega = \mathbb{R} = E$, abbiamo

$$d_{\mathbb{R}}(x,y) = 0 \quad \text{e quindi} \quad C_{\mathbb{R}}(x,y) = 0 \quad \text{per ogni } x,y \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Siano $x,y \in \mathbb{R}$. Per ogni $t_1,t_2 \in \mathbb{R}_+^*$, con $t_1 \neq t_2$, esiste una funzione affine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(t_1) = x$ e $f(t_2) = y$.

Pertanto $d_R(x,y) = d_R(f(t_1),f(t_2)) \leq \sigma(t_1,t_2) = \left|\log \frac{t_2}{t_1}\right|$,

ma $\left|\log \frac{t_2}{t_1}\right|$ tende a zero quando t_2 tende a t_1 , quindi $d_R(x,y) = 0$ per ogni $x,y \in R$.

C.V.D.

<u>ESEMPIO 2.1.2.</u> (cfr. [15])

Sia $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Per ogni $x = (x_1,x_2)$ e $y = (y_1,y_2)$ in Ω , $x \neq y$, abbiamo :

$$C_\Omega(x,y) = \max\{\sigma(x_1,y_1),\sigma(x_2,y_2)\} ,$$

$d_\Omega(x,y) = \max\{\sigma(x_1,y_1),\sigma(x_2,y_2)\}$ se la retta individuata da x e y incontra Ω in una semiretta,

$d_\Omega(x,y) = \sigma(x_1,y_1) + \sigma(x_2,y_2)$ se la retta individuata da x e y incontra Ω in un segmento finito.

<u>ESEMPIO 2.1.3.</u> Se $\Omega = E = R \times R$, risulta $d_{R^2}(x,y) = 0$ e quindi $C_{R^2}(x,y) = 0$ per ogni $(x,y) \in R \times R$.

Dimostrazione. Siano $x = (x_1,x_2)$ e $y = (y_1,y_2)$ in $R \times R$. Siano F_1 e F_2 applicazioni lineari continue di $R \to R \times R$ definite dalle

$$F_1 : z \to (z, x_2) \quad \text{e} \quad F_2 : z \to (y_1,z) .$$

Applicando la disuguaglianza triangolare, la proposizione 2.1.3 e l'esempio 2.1.1, abbiamo

$$d_{\mathbb{R}^2}((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \leq d_{\mathbb{R}^2}((x_1,x_2),(y_1,x_2)) + d_{\mathbb{R}^2}((y_1,x_2),(y_1,y_2)) =$$

$$= d_{\mathbb{R}^2}(F_1(x_1),F_1(y_1)) + d_{\mathbb{R}^2}(F_2(x_2),F_2(y_2)) \leq d_{\mathbb{R}}(x_1,y_1)$$

$$+ d_{\mathbb{R}}(x_2,y_2) = 0 + 0 = 0 \ .$$

Quindi $d_{\mathbb{R}^2}(x,y) = 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

C.V.D.

Più in generale, per ogni spazio localmente convesso e di Hausdorff E, abbiamo (cfr. [15])

$$C_E = d_E = 0 \quad .$$

§ 2.2. APPLICAZIONI.

DEFINIZIONE 2.2.1. Il cono Ω dicesi regolare se la sua chiusura $\bar{\Omega}$ non contiene rette.

Valgono inoltre i risultati seguenti.

PROPOSIZIONE 2.2.1. (cfr. [15])

Se il cono convesso aperto Ω è regolare allora C_Ω e d_Ω sono distanze. Viceversa se C_Ω (o d_Ω) è una distanza, allora Ω è regolare.

PROPOSIZIONE 2.2.2.(cfr. [3]) .

La topologia relativa di Ω in E è equivalente alla topologia definita da C_Ω o d_Ω , se, e soltanto se, tutte le sezioni piane di