Il risultato del teorema 1.5.1 è conseguenza di alcune proprietà per le distanze di Kobayashi e di Carathéadory in domini di spazi di Banach complessi. Nella dimostrazione si utilizza la nozione di <u>curva geodetica complessa in B</u>: sia $g : \Delta \to B$ una applicazione olomorfa tale che $g(0) = x_0$, allora

$$\omega(0.\xi) \geq C_B(x_0, g(\xi)) \qquad \text{per ogni} \quad \xi \in \Delta \ ;$$

se vale l'uguale per ogni $\xi \in \Delta$, $\gamma = g(\Delta)$ si dice curva geodetica complessa per x_0 .

Per ogni $x \in B$, $x \neq 0$, l'immagine di Δ per l'applicazione lineare $\xi \longmapsto \frac{\xi}{||x||} x$ è l'unica curva geodetica complessa per 0 contenente x.

Il teorema 1.5.1 vale anche per $1 \leq p < 2$ e $2 < p < \infty$.

Per $p = 2$ il teorema non vale in quanto il disco unità aperto di ogni spazio di Hilbert è omogeneo.

§ 1.6. METRICHE DIFFERENZIALI DI KOBAYASHI E DI CARATHEODORY.

Con le stesse notazioni del §1.4 sia D un dominio di E.

Le considerazioni che seguiranno si estendono al caso in cui D è una varietà complessa. E è allora lo spazio tangente a D in x.

LEMMA 1.6.1. *Dato* $x \in D$, $v \in E$, $\xi_0 \in \Delta$, *esistono* $h \in Hol(\Delta, D)$ *e* $\tau \in \mathbb{C}$ *tale che* $h(\xi_0) = x$ *e* $d\,h(\xi_0)\tau = v$.

Dimostrazione. Per ogni intorno aperto U di x in D, esiste una seminorma continua p su E tale che $B_p(x,1) \subset U$.

Se $p(v) > 0$, prendiamo $k \in Hol(\mathbb{C},E)$ definita da

$$k(\xi) = x + \frac{\xi}{p(v)} v .$$

Risulta $k(\Delta) \subset U$ e quindi $k_{|\Delta} \in Hol(\Delta,U)$. Inoltre $k(0) = x$, $dk(0)p(v) = p(v)k'(0) = v$. La funzione h definita da

$$h(\xi) = k\left(\frac{\xi - \xi_0}{1-\bar{\xi}_0\xi} \right)$$

e il vettore $\tau = p(v)(1 - |\xi_0|^2)$ verificano il lemma, nel caso $p(v) > 0$.

Se $p(v) = 0$, basta prendere la funzione $h \in Hol(\Delta,D)$ definita da

$$h(\xi) = x + \frac{\xi - \xi_0}{1 - \bar{\xi}_0\xi} v \qquad (\xi \in \Delta),$$

con $\tau = (1 - |\xi_0|^2)$.

C.V.D.

Dal lemma 1.6.1 segue che ha senso porre

$$\mathcal{X}(x,v) = \inf <\tau>_{\xi} , \qquad (1.6.1)$$

dove l'estremo inferiore è preso su tutti i $\tau \in \mathbb{C}$, $\xi \in \Delta$, $h \in Hol(\Delta,D)$ con $h(\xi) = x$ e $dh(\xi)\,\tau = v$.

Siccome Δ è omogeneo e gli elementi di $Aut(\Delta)$ sono isometrie per la metrica di Poincaré, possiamo mantenere $\xi \in \Delta$ fisso nella (1.6.1). In particolare scegliendo $\xi = 0$, abbiamo

$$\mathcal{K}(x,v) = \inf\{|\tau| : \tau \in \mathbb{C},\ h \in Hol(\Delta,D), h(0) = x,\ dh(0)\,\tau = v\} .$$

La funzione

$$\mathcal{K} : D \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

si chiama <u>metrica differenziale di Kobayashi</u> in D.

Sia $h \in Hol(\Delta,D)$ una funzione che verifichi il lemma 1.6.1, e sia $g \in Hol(D,\Delta)$. Allora

$$dg(x)v = dg(h(\xi_0))\cdot(dh(\xi_0)\tau = d(g\circ h)(\xi_0)\tau \quad .$$

Siccome $g\circ h \in Hol(\Delta,\Delta)$, dalla 2) del lemma di Schwarz-Pick (cfr. § 1.2) segue che

$$\frac{|dg(x)v|}{1-|g(x)|^2} = \frac{|d(g\circ h)(\xi_0)\tau|}{1-|g\circ h(\xi_0)|^2} = \frac{|\tau\cdot(g\circ h)'(\xi_0)|}{1-|g\circ h(\xi_0)|^2} \leq \frac{|\tau|}{1-|\xi_0|^2} ,$$

cioé

$$< dg(x)v>_{g(x)} \leq <\tau>_{\xi_0}$$

per ogni funzione $h \in Hol(\Delta,D)$ che verifica il lemma 1.6.1.

Quindi

$$< dg(x)v>_{g(x)} \leq \mathcal{K}(x,v) \qquad \text{per ogni} \quad g \in \mathrm{Hol}(D,\Delta).$$

Pertanto il numero $\gamma(x,v) \in \mathbb{R}_+$ definito dalla

$$\gamma(x,v) = \sup\{<dg(x)v>_{g(x)} : g \in \mathrm{Hol}(D,\Delta)\}$$

verifica la disuguaglianza

$$\gamma(x,v) \leq \mathcal{K}(x,v) \qquad (x \in D, v \in E) \qquad (1.6.2)$$

e perciò è finito.

La funzione $\gamma : D \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ si chiama <u>metrica differenziale di Carathäodory</u> in D.

Per $a \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{K}(x,av) = |a|\mathcal{K}(x,v) \quad \text{e} \quad \gamma(x,av) = |a|\,\gamma(x,v) .$$

Inoltre, per $v_1, v_2 \in E$:

$$\gamma(x,v_1+v_2) \leq \gamma(x,v_1) + \gamma(x,v_2),$$

(non si sa se una simile disuguaglianza vale anche per $\mathcal{K}$).

PROPOSIZIONE 1.6.1. *Sia* D_1 *un dominio di* E_1*. Per ogni* $F \in \mathrm{Hol}(D,D_1)$, $x \in D$, $v \in E$, *risulta*

$$\mathcal{K}_{D_1}(F(x),dF(x)v) \leq \mathcal{K}_D(x,v) \quad \text{e} \quad \gamma_{D_1}(F(x),dF(x)v) \leq \gamma_D(x,v) .$$

Dimostrazione. Segue banalmente dalle definizioni.

In particolare, se $F \in \mathrm{Aut}(D)$, allora

$$\mathcal{K}_D(F(x),dF(x)v) = \mathcal{K}_D(x,v) \quad \text{e} \quad \gamma_D(F(x),dF(x)v) = \gamma_D(x,v) \quad .$$

<u>ESEMPIO 1.6.1</u> Sia $E = \mathbb{C}$, $D = \Delta$. Presa $g : \xi \longmapsto \xi$, è

$$\gamma_\Delta(\xi,\tau) \geq \langle dg(\xi)\tau\rangle_{g(\xi)} = \langle\tau\rangle_\xi = \frac{|\tau|}{1-|\xi|^2} \quad .$$

Poiché $dg(\xi)\tau = \tau$, è anche

$$\mathcal{K}_\Delta(\xi,\tau) \leq \frac{|\tau|}{1-|\xi|^2} \quad .$$

Quindi dalla (1.6.2) abbiamo

$$\gamma_\Delta(\xi,\tau) = \mathcal{K}_\Delta(\xi,\tau) = \frac{|\tau|}{1-|\xi|^2}\ , \quad (\xi \in \Delta,\ \tau \in \mathbb{C}) \qquad (1.6.3)\ .$$

In generale per $\Delta_R = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < R\}$ abbiamo

$$\gamma_{\Delta_R}(\xi,\tau) = K_{\Delta_R}(\xi,\tau) = \frac{R|\tau|}{R^2 - |\xi|^2}\ ,\ (\xi \in \Delta_R\ ,\ \tau \in \mathbb{C}) \qquad (1.6.3')$$

LEMMA 1.6.2. *Sia* p *una seminorma continua su* E *e* $B_p = B_p(0,1) = \{x \in E : p(x) < 1\}$. *Allora*

$$\gamma_{B_p}(0,v) = \mathcal{K}_{B_p}(0,v) = p(v) \qquad \textit{per ogni } v \in E.$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $p(v) > 0$. Per il teorema di Hahn-Banach esiste una forma lineare continua λ su E tale che

$$\lambda(v) = p(v) \qquad e \qquad |\lambda(y)| \leq p(y) \qquad \text{per ogni} \quad y \in E.$$

Quindi $\lambda \in Hol(B_p, \Delta)$. Sia $h : \Delta \longrightarrow B_p$ definita dalla

$h(\xi) = \dfrac{\xi}{p(v)}\, v$, è $h \in Hol(\Delta, B_p)$, $h(0) = 0$, $h(p(v)) = v$ e

$dh(0)p(v) = v$.

Dalla 1.6.3 e dalla proposizione 1.6.1 segue :

$$p(v) = \gamma_\Delta(0,p(v)) = \gamma_\Delta(\lambda(0),\lambda(v)) = \gamma_\Delta(\lambda(0),d\lambda(0)v) \leq \gamma_{B_p}(0,v) \leq$$

$$\leq \mathcal{K}_{B_p}(0,v) = \mathcal{K}_{B_p}(h(0),dh(0)p(v)) \leq \mathcal{K}_\Delta(0,p(v)) = p(v) .$$

Quindi $\gamma_{B_p}(0,v) = \mathcal{K}_{B_p}(0,v) = p(v)$.

Consideriamo ora il caso in cui $p(v) = 0$. Sia $t > 1$, e sia $h_t \in Hol(\Delta, B_p)$ definita da $h_t(\xi) = t\,\xi\, v$. Allora

$$\gamma_{B_p}(0,v) \leq \mathcal{K}_{B_p}(0,v) = \mathcal{K}_{B_p}(h_t(0),dh_t(0)\,\tfrac{1}{t}\,) \leq \mathcal{K}_\Delta(0,\,\tfrac{1}{t}\,) = \tfrac{1}{t} \quad ,$$

ma $\dfrac{1}{t} \longrightarrow 0$ per $t \longrightarrow +\infty$, perciò $\gamma_{B_p}(0,v) = \mathcal{K}_{B_p}(0,v) = p(v) = 0$.

C.V.D.

Per ogni $R > 0$, posto $B_p(0,R) = \{x \in E : p(x) < R\}$ abbiamo

$$\gamma_{B_p(0,R)}(0,v) = K_{B_p(0,R)}(0,v) = \frac{p(v)}{R} \quad \text{per ogni} \quad v \in E. \quad (1.6.4)$$

ESEMPIO 1.6.2. Per $(\xi_1,\xi_2) \in D = \Delta \times \Delta$, $(\tau_1,\tau_2) \in \mathbb{C}^2$, si ha

$$\gamma_{\Delta\times\Delta}((\xi_1,\xi_2), (\tau_1,\tau_2)) = K_{\Delta\times\Delta}((\xi_1,\xi_2),(\tau_1,\tau_2)) = \max(\langle\tau_1\rangle_{\xi_1},$$

$$\langle\tau_2\rangle_{\xi_2}) .$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso in cui $\xi_1 = \xi_2 = 0$.

Sia $p : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow R$ la norma così definita:

$$(\delta_1,\delta_2) \longmapsto \max\{|\delta_1|,|\delta_2|\} .$$

Chiaramente $D = \Delta \times \Delta = B_p = \{y \in \mathbb{C}^2 : p(y) < 1\}$, perciò

dal lemma 1.6.2 abbiamo

$$\gamma_{\Delta\times\Delta}((0,0),(\tau_1,\tau_2)) = K_{\Delta\times\Delta}((0,0),(\tau_1,\tau_2)) = p((\tau_1,\tau_2)) =$$

$$= \max\{|\tau_1|,|\tau_2|\} = \max\{\langle\tau_1\rangle_0, \langle\tau_2\rangle_0\} .$$

La conclusione, per il caso in cui $(\xi_1,\xi_2) \neq (0,0)$ segue dal fatto che il gruppo Aut(D) opera transitivamente su D lasciando invarianti γ_D e K_D.

C.V.D.

LEMMA 1.6.3. *Siano* D *e* D_1 *domini rispettivamente di* E *ed* E_1. *Per* $(x,x_1) \in D \times D_1$ *e* $(v,v_1) \in E \times E_1$ *risulta*

$$K_{D\times D_1}((x,x_1),(v,v_1)) = \max\{K_D(x,v)\ ,\ K_{D_1}(x\ ,v_1)\}\ .$$

Dimostrazione. Siano F ed F_1 le proiezioni di $D \times D_1$ rispettivamente su D e D_1 . Dalla proposizione 1.6.1. segue

$$K_D(x,v) = K_D(F(x,x_1),\ dF(x,x_1)(v,v_1)) \leq K_{D\times D_1}((x,x_1),(v,v_1))$$

e

$$K_{D_1}(x_1,v_1) = K_{D_1}(F_1(x,x_1),dF_1(x,x_1)(v,v_1)) \leq K_{D\times D_1}((x,x_1),(v,v_1))\ .$$

Perciò

$$K_{D\times D_1}((x,x_1),(v,v_1)) \geq \max\{K_D(x,v),K_{D_1}(x_1,v_1)\ . \qquad (1.6.5)$$

Sia $h \in \mathrm{Hol}(\Delta,D)$ $(h_1 \in \mathrm{Hol}(\Delta,D_1))$ tale che

$h(0) = x$ e $dh(0)\tau = v$ $(h_1(0) = x_1$ $dh_1(0)\tau_1 = v_1)$

con $\tau \in \mathbb{C}$ $(\tau_1 \in \mathbb{C})$. Applicando ancora la proposizione 1.6.1 e successivamente l'esempio 1.6.2, abbiamo

$$K_{D\times D_1}((x,x_1),(v,v_1)) \leq K_{\Delta\times\Delta}((0,0),(\tau,\tau_1)) = \max\{|\tau|,|\tau_1|\}\ .$$

Passando quindi agli estremi inferiori abbiamo

$$\mathcal{K}_{D\times D_1}((x,x_1)(v,v_1)) \leq \max\{\mathcal{K}_D(x,v),\mathcal{K}_{D_1}(x_1,v_1)\} . \qquad (1.6.6)$$

Dalla (1.6.5) e dalla (1.6.6) risulta

$$\mathcal{K}_{D\times D_1}(x,x_1),(v,v_1)) = \max\{\mathcal{K}_D(x,v),\mathcal{K}_{D_1}(x_1,v_1)\} . \qquad \text{C.V.D.}$$

LEMMA 1.6.4. *Per ogni* $\varepsilon>0$, *esiste un intorno* V *di* $(0,0)$ *in* $B_p(0,R)xE$ *tale che*

$$\mathcal{K}_{B_p(0,R)}(x,v) < \varepsilon$$

per ogni $(x,v) \in V$.

Dimostrazione. Consideriamo l'intorno $V = B_p(0, \frac{R}{2}) \times B_p(0, \frac{R\varepsilon}{4})$.

Per $x \in B_p(0,\frac{R}{2})$ e $v \in B_p(0, \frac{R \cdot \varepsilon}{4})$ la funzione $f \in Hol(\Delta,E)$

definita dalla

$$f(\xi) = x + \frac{2\xi}{\varepsilon} v$$

applica Δ in $B_p(0,R)$. Siccome $f(0) = x$ e $df(0) \frac{\varepsilon}{2} = v$,

dalla proposizione 1.6.1 abbiamo

$$\mathcal{K}_{B_p(0,R)}(x,v) = \mathcal{K}_{B_p(0,R)}(f(0),df(0) \tfrac{\varepsilon}{2}) \leq \mathcal{K}_{\Delta}(0, \tfrac{\varepsilon}{2})= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon .$$

C.V.D.

LEMMA 1.6.5. *Sia* D *un dominio di* E. *Per ogni* $x \in D$ $\gamma_D(x,\cdot)$ *è una seminorma continua su* E. *Se* D *è limitato, e se* p *è una seminorma continua su* E *tale che* $B_p(x,R) \subset D$ *per un* $R > 0$ *e un* $x \in D$, *allora* $\gamma_D(x,\cdot)$ *è una seminorma equivalente a* p.

Dimostrazione. Per $x \in D$, esiste una seminorma continua p su E e un $R > 0$ tale che $B_p(x,R) \subset D$. La traslazione che porta y in $x+y$, applica $B_p(0,R)$ in $B_p(x,R)$.

Applicando la proposizione 1.6.1 e la relazione (1.6.4), abbiamo $\gamma_D(x,v) \leq \gamma_{B_p(x,R)}(x,v) = \gamma_{B_p(0,R)}(0,v) = \dfrac{p(v)}{R}$

per ogni $v \in E$, cioé

$$\gamma_D(x,v) \leq \frac{p(v)}{R} \qquad \text{per ogni} \quad v \in E.$$

D'altronde $\gamma_D(x,av) = |a|\gamma_D(x,v)$ e $\gamma_D(x,v+v_1) \leq \gamma_D(x,v)+$ $+\gamma_{D_1}(x,v_1)$, perciò $\gamma_D(x,\cdot)$ è effettivamente una seminorma continua su E.

Sia ora D limitato. Allora per ogni seminorma continua p su E esiste un $R' > 0$ tale che $D \subset B_p(x,R')$ con $x \in D$, quindi per la proposizione 1.6.1 risulta

$$\gamma_D(x,v) \geq \gamma_{B_p(x,R')}(x,v) = \frac{p(v)}{R'} \quad \text{per ogni } v \in E .$$

D'altronde se p è tale che esiste un $R > 0$ per cui $B_p(x,R) \subset D$, allora vale

$$\gamma_D(x,v) \leq \frac{p(v)}{R} \qquad \text{per ogni} \quad v \in E.$$

Perciò abbiamo

$$\frac{p(v)}{R'} \leq \gamma_D(x,v) \leq \frac{p(v)}{R} \quad \text{per ogni} \quad v \in E,$$

cioè $\gamma_D(x,\cdot)$ è una seminorma equivalente a p.

C.V.D.

§ 1.7. METRICHE INTERNE

Ricordiamo la nozione di metrica interna, rinviando per maggiori dettagli a W. Rinow [7].

Sia X uno spazio metrico connesso con una pseudo-distanza d. Data una curva $\sigma : [a,b] \to X$, la sua lunghezza è per definizione

$$L(\sigma) = \sup \Sigma_j d(\sigma(t_{j-1}),\sigma(t_j))$$

dove l'estremo superiore è preso rispetto a tutte le suddivisioni di $[a,b]$.

La curva σ si dice rettificabile se $L(\sigma) < \infty$

Lo spazio X si dice finitamente connesso per archi se ogni coppia di punti può essere congiunto da una curva rettificabile.

Definiamo su X la pseudo-distanza d' indotta da d, mediante la

$$d'(x,y) = \inf L(\sigma)$$

dove l'estremo inferiore è preso rispetto a tutte le curve rettificabili che congiungono x e y.