INTRODUZIONE

Nel 1927 Carathéodory introduce la pseudo-distanza di Carathéodory per domini di $\mathbb{C}^2$. Recentemente una nuova pseudo-distanza invariante è stata introdotta da Kobayashi su varietà complesse [4].

Entrambe queste pseudo-distanze possono definirsi anche per domini D di uno spazio vettoriale topologico complesso localmente convesso e di Hausdorff [14].

Nel Capitolo I, dopo aver esaminato il gruppo degli automorfismi olomorfi del disco unitario aperto Δ e richiamata la metrica di Poincaré nel disco Δ e nel semipiano superiore π^+, si introducono le pseudo-distanze invarianti di Carathéodory e di Kobayashi in un dominio D. Di queste pseudo-distanze invarianti si mettono in evidenza interessanti proprietà, e alcune loro suggestive applicazioni a questioni di analisi complessa e di analisi funzionale ([13],[14],[4]).

Sempre nel Capitolo I, si danno infine alcune notevoli proprietà delle metriche differenziali invarianti di Kobayashi e di Carathéodory [14].

Nel Capitolo II si definiscono delle distanze "tipo-kobayashi" e "tipo-Carathéodory" in un cono convesso aperto Ω di uno spazio vettoriale reale localmente convesso di Hausdorff, con applicazioni al caso in cui Ω è il cono convesso aperto degli elementi hermitiani strettamente positivi.

L'intento, nello scrivere questo quaderno, è quello di presentare in forma "semplice" gli argomenti suddetti evitando dimostrazioni che richiedono considerazioni delicate e limitandosi in tal caso soltanto a enunciati e a concetti fondamentali.

Desidero ringraziare il Prof. E. Vesentini per gli utili suggerimenti ricevuti durante la compilazione di queste note.

Domenico PERRONE

INDICE

CAPITOLO I

DISTANZE INVARIANTI E METRICHE DIFFERENZIALI INVARIANTI.

§ 1.1. IL GRUPPO DEGLI AUTOMORFISMI OLOMORFI DEL DISCO.

Sia Δ il disco aperto unitario di $\mathbb{C}$, $\Delta = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < 1\}$, e $\mathrm{Hol}(\Delta,\Delta)$ l'insieme delle applicazioni olomorfe di Δ in sé.

LEMMA DI SCHWARZ - *Sia $f \in Hol(\Delta,\Delta)$ con $f(0) = 0$, allora:*

1) $|f(\xi)| \leq |\xi|$ per ogni $\xi \in \Delta$, se vale il segno di uguaglianza per uno $\xi_0 \in \Delta \setminus \{0\}$ f è una rotazione, cioè esiste un $\theta \in R$ tale che $f(\xi) = e^{i\theta}\xi$ per ogni $\xi \in \Delta$

2) $|f'(0)| \leq 1$, se vale il segno di uguaglianza f è una rotazione.

Dimostrazione - La funzione $g : \xi \to \dfrac{f(\xi)}{\xi}$ è olomorfa in Δ. Per $0 < r < 1$ e $|\xi| = r$, è $|g(\xi)| \leq \frac{1}{r}$. Per il principio del massimo risulta allora

$$|g(\xi)| \leq \frac{1}{r} \qquad \text{per ogni} \quad |\xi| \leq r .$$

Facendo tendere r a 1 si ottiene

$$|g(\xi)| \leq 1 \qquad \text{per ogni} \quad \xi \in \Delta, \tag{1.1.1}$$

la prima parte di 1).

Se $|f(\xi_0)| = |\xi_0|$, la funzione $|g|$ raggiunge il suo massimo, 1, in Δ, e quindi esiste un $\theta \in R$ tale che $f(\xi) = e^{i\theta}\xi$ per ogni $\xi \in \Delta$.

Poiché $g(0) = f'(0)$, 2) segue dalla (1.1.1) e dal principio del massimo.

C.V.D.

Sia <u>$\mathrm{Aut}(\Delta)$ il gruppo degli automorfismi olomorfi di Δ</u> cioé

$$\mathrm{Aut}(\Delta) = \{f : \Delta \to \Delta \quad \text{biolomorfe}\} .$$

Il lemma di Schwarz permette di determinare il gruppo $\mathrm{Aut}(\Delta)$. Per $\xi_0 \in \Delta$ e $\theta \in \mathbb{R}$, la funzione

$$h : \xi \longrightarrow e^{i\theta} \frac{\xi - \xi_0}{1 - \bar{\xi}_0 \xi}$$

è olomorfa su Δ. Poiché

$$1 - |h(\xi)|^2 = \frac{(1-|\xi_0|^2)(1 - |\xi|^2)}{|1 - \bar{\xi}_0\xi|^2} > 0 \qquad \text{per } \xi \in \Delta ,$$

$h(\Delta) \subset \Delta$. Le funzioni h si chiamano <u>trasformazioni di Moebius.</u>

Sia G l'insieme delle trasformazioni di Moebius. Poiché $h(0) = - e^{i\theta}\xi_0$, G opera transitivamente su Δ .

Inoltre, posto

$$K(\xi) = e^{-i\theta} \frac{\xi + e^{i\theta}\xi_0}{1 + e^{i\theta}\bar{\xi}_0\xi}$$

risulta $h \circ k = k \circ h = \mathrm{id}$. Dunque le trasformazioni di Moebius sono automorfismi olomorfi e l'inversa di una trasformazione di Moebius è ancora di Moebius.

Se $f \in \mathrm{Aut}\,\Delta$ è tale che $f(0) = 0$, dal lemma di Schwarz segue che esiste $\theta \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(\xi) = e^{i\theta}\xi \quad (\xi \in \Delta) .$$

Dato $g \in \mathrm{Aut}\,\Delta$, esiste una $h \in G$, tale che $h(0) = g(0)$; pertanto $h^{-1} \circ g\,(0) = 0$, e quindi $h^{-1} \circ g\,(\xi) = e^{i\theta}\xi$ per un opportuno $\theta \in \mathbb{R}$ ed ogni $\xi \in \Delta$. Ne segue che $g = h\,e^{i\theta}$ ed in conclusione risulta $\mathrm{Aut}(\Delta) = G$.

<u>OSSERVAZIONE 1</u>. Come abbiamo già notato, il gruppo G opera transitivamente su Δ, e quindi Δ è omogeneo rispetto a G.

Esaminiamo il gruppo $\mathrm{Aut}(\Delta)$ da un altro punto di vista.
Consideriamo il gruppo

$$SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{C},\ {}^t\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\right.$$

$$\left. \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\},$$

e definiamo un omomorfismo surgettivo

$$\Phi : SU(1,1) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Delta) \qquad \text{associando a}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(1,1) \quad \text{l'applicazione} \quad g : \xi \longmapsto \frac{a\,\xi + b}{\bar{b}\,\xi + \bar{a}} .$$

Per rendersi conto che per $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(1,1)$ la $g : \xi \longmapsto \dfrac{a\,\xi + b}{\bar{b}\,\xi + \bar{a}}$ è un elemento di $\mathrm{Aut}(\Delta)$, basta osservare che, essendo $a \neq 0$, essa può scriversi nella forma

$$g(\xi) = \frac{a}{\bar{a}} \cdot \frac{\xi + \dfrac{b}{a}}{1 + \dfrac{\bar{b}}{\bar{a}}\,\xi}$$

e che $1 - \left|\frac{b}{a}\right|^2 = \frac{1}{|a|^2} > 0$.

Viceversa, data la trasformazione di Moebius

$$\xi \longmapsto e^{i\theta} \frac{\xi - \xi_0}{1 - \bar{\xi}_0 \xi} \quad \text{con } \xi_0 \in \Delta \text{ e } \theta \in \mathbb{R}$$

scegliendo a tale che $1 - |\xi_0|^2 = \frac{1}{|a|^2}$ e $\frac{a}{\bar{a}} = e^{i\theta}$, e $b = -\xi_0 a$,

risulta

$$e^{i\theta} \frac{\xi - \xi_0}{1 - \bar{\xi}_0 \xi} \equiv \frac{a\xi + b}{\bar{b}\xi + \bar{a}} .$$

Dunque $\Phi(SU(1,1)) = Aut(\Delta)$. In fine si verifica facilmente che Φ è un omomorfismo di gruppi e che $\operatorname{Ker} \Phi = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ = centro di $SU(1.1)$.

§ 1.2. METRICA DI POINCARÉ NEL DISCO.

Proviamo intanto il

LEMMA DI SCHWARZ-PICK. *Per ogni* $f \in Hol(\Delta,\Delta)$, *risulta*

$$1) \qquad \left| \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{1 - \overline{f(\xi_1)}\, f(\xi_2)} \right| \le \left| \frac{\xi_2 - \xi_1}{1 - \bar{\xi}_1 \xi_2} \right| \quad \textit{per tutti gli } \xi_1,\xi_2 \in \Delta$$

Se $f \in Aut(\Delta)$ *vale il segno di uguaglianza. Viceversa se vale il segno di uguaglianza in due punti* $\xi_1 \neq \xi_2$ *di* Δ, *è* $f \in Aut(\Delta)$.

2) $$\frac{|f'(\xi)|}{1-|f(\xi)|^2} \leq \frac{1}{1-|\xi|^2} \qquad \text{per ogni} \quad \xi \in \Delta.$$

Se $f \in Aut(\Delta)$ *vale l'uguaglianza in ogni* $\xi \in \Delta$.
Viceversa se vale l'uguaglianza in uno $\xi_0 \in \Delta$, *è* $f \in Aut(\Delta)$.

Dimostrazione. Data $f \in Hol(\Delta,\Delta)$, la $g \in Hol(\Delta,\Delta)$ definita dalla

$$g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(0)}{1 - \overline{f(0)}\, f(\xi)}$$

verifica la $g(0) = 0$. Quindi per il lemma di Schwarz si ha:

$$|g(\xi)| = \left| \frac{f(\xi) - f(0)}{1 - \overline{f(0)}\, f(\xi)} \right| \leq |\xi| \qquad \text{per ogni} \quad \xi \in \Delta, \quad (1.2.1)$$

Se vale l'uguaglianza per uno $\xi \neq 0$ è $g(\xi) = e^{i\theta}\xi$ per un opportuno $\theta \in \mathbb{R}$ e per tutti gli $\xi \in \Delta$, pertanto

$$f(\xi) = e^{i\theta} \frac{\xi + f(0)e^{-i\theta}}{1 + \overline{f(0)e^{-i\theta}}\,\xi}$$

cioé f è una trasformazione di Moebius. Per completare la dimostrazione della 1) basta sostituire, nella (1.2.1), alla $f(\xi)$ la funzione definita dalla

$$f\left(\frac{\xi + \xi_1}{1 + \bar{\xi}_1 \xi} \right) .$$

Proviamo la 2), applicando la 2) del lemma di Schwarz alla $g(\xi)$ si ha:

$$|g'(0)| \leq 1 \qquad \text{cioé} \qquad \frac{|f'(0)|}{1 - |f(0)|^2} \leq 1 \quad ,$$ se vale l'uguaglianza

g è una rotazione e quindi f una trasformazione di Moebius. Sostituendo alla f la funzione definita dalla $f\left(\frac{\xi+\xi_1}{1+\bar{\xi}_1\xi}\right)$ si completa la dimostrazione della 2).

C.V.D.

La metrica di Poincaré su Δ è la metrica riemanniana espressa dalla

$$ds^2 = \frac{|d\xi|^2}{(1-|\xi|^2)^2} = g(\xi, \bar{\xi})\, d\xi d\bar{\xi} \quad .$$

La curvatura Gaussiana di tale metrica è costante ed è uguale a -4.

In generale, la curvatura Gaussiana della metrica $2hd\xi d\bar{\xi}$ è data da

$$-(1/h)\cdot(\partial^2 \log h/\partial\xi\partial\bar{\xi}) \quad .$$

OSSERVAZIONE 2. Dal lemma di Schwarz-Pick segue che gli automorfismi olomorfi sono isometrie per la metrica di Poincaré.

Indichiamo con

$$\langle x\rangle_\xi = \frac{|x|}{1-|\xi|^2} \qquad \text{per} \quad \xi \in \Delta \quad \text{e} \quad x \in \mathbb{C}$$

la lunghezza del vettore x, rispetto alla metrica di Poincaré, in ξ. La 2) del lemma di Schwarz-Pick diventa

$$\langle f'(\xi)\rangle_\xi \leq \langle 1\rangle_\xi \qquad \text{per ogni} \quad \xi \in \Delta \ ,$$

se vale l'uguaglianza in un punto $\xi \in \Delta$ si ha uguaglianza per ogni ξ, ed $f \in \mathrm{Aut}(\Delta)$.

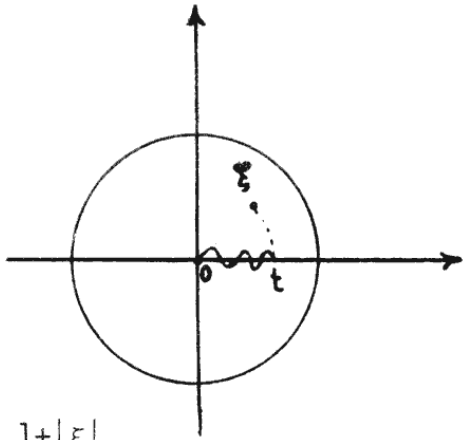
Distanza per la metrica di Poincaré. Sia $\omega : \Delta \times \Delta \longrightarrow \mathbb{R}_+$ la funzione distanza definita dalla metrica di Poincaré:

$$\omega(\xi_1,\xi_2) = \inf \int_a^b <\sigma'(t)>_{\sigma(t)} dt \qquad \text{per ogni} \quad \xi_1,\xi_2 \in \Delta ,$$

ove l'estremo inferiore è preso su tutte le curve $\sigma:[a,b] \to \Delta$ differenziabili a tratti che congiungono ξ_1 e ξ_2 in Δ .

Calcoliamo prima $\omega(0,t)$ con $t \in \mathbb{R}$,

chiaramente $\omega(o,t) = \int_0^t \frac{ds}{1-s^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t}$.



Poiché ω è invariante per $\mathrm{Aut}(\Delta)$, risulta per $\xi \in \Delta$

$$\omega(0,\xi) = \omega(0,|\xi|) = \int_0^{|\xi|} \frac{ds}{1-s^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+|\xi|}{1-|\xi|} . \qquad (1.2.2)$$

Utilizzando ancora l'invarianza di ω rispetto a $\mathrm{Aut}(\Delta)$, calcoliamo $\omega(\xi_1,\xi_2)$ per $\xi_1,\xi_2 \in \Delta$.

Preso $f \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ tale che $f(\xi_1) = 0$, si ha

$$\omega(\xi_1,\xi_2) = \omega(0,f(\xi_2)) = \frac{1}{2} \log \frac{1+|f(\xi_2)|}{1-|f(\xi_2)|} = \frac{1}{2} \log \frac{1+\left|e^{i\theta} \frac{\xi_2 - \xi_1}{1 - \bar{\xi}_1 \xi_2}\right|}{1-\left|e^{i\theta} \frac{\xi_2 - \xi_1}{1 - \bar{\xi}_1 \xi_2}\right|}$$

$$= \frac{1}{2}\log \frac{1+\left|\dfrac{\xi_2-\xi_1}{1-\bar{\xi}_1\,\xi_2}\right|}{1-\left|\dfrac{\xi_2-\xi_1}{1-\bar{\xi}_1\xi_2}\right|} = \sum_{n=o}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}\left|\frac{\xi_2-\xi_1}{1-\bar{\xi}_1\,\xi_2}\right|^{2n+1}$$

Possiamo rienunciare il lemma di Schwarz-Pick, come segue:

$$\omega(f(\xi_1),f(\xi_2)) \leq \omega(\xi_1,\xi_2) \quad \forall f\in Hol(\Delta,\Delta) \text{ e } \forall \xi_1,\xi_2\in\Delta, \qquad (1.2.3)$$

se $f\in Aut(\Delta)$ vale l'uguaglianza. Se vale l'uguaglianza in due punti dustinti ξ_1 e ξ_2 di Δ è $f\in Aut\,\Delta$.

OSSERVAZIONE 3 . Dalla (1.2.2) segue che le geodetiche della metrica di Poincaré passanti per il centro 0 di Δ sono tutti e soli i raggi del cerchio. Per conseguenza, dato un qualsiasi $\xi \in \Delta \setminus \{0\}$, esiste una ed una sola geodetica passante per 0 e per ξ. Quindi, in virtù dell'omogeneità di Δ, per due punti distinti qualsiasi di Δ passa una ed una sola geodetica della metrica di Poincaré. Tenuto conto che $Aut(\Delta)$ è il gruppo delle trasformazioni di Möbius, un semplice calcolo conduce al seguente risultato.

Le geodetiche della metrica di Poincaré sono i diametri del cerchio Δ e le intersezioni di Δ con le circonferenze che incontrano ortogonalmente $\partial\Delta$.

NOTA. Per le nozioni precedenti rinviamo il lettore, ad esempio, a L. Bianchi [2] .

§ 1.3. METRICA DI POINCARE' NEL SEMIPIANO.

Accenniamo brevemente al modo in cui le considerazioni precedenti possano formularsi per il semipiano superiore π^+ di $\mathbb{C}$ (per ulteriori dettagli si veda, ad esempio, [11]) .

L'applicazione $C : \pi^+ \to \Delta$ definita dalla $\xi \longmapsto \dfrac{\xi - i}{\xi + i}$

è una applicazione biolomorfa di π^+ su Δ(trasformazione di Cayley). Quindi si può determinare mediante C il gruppo $\mathrm{Aut}(\pi^+)$ cioè

$$\mathrm{Aut}(\pi^+) = \{C^{-1} \circ f \circ C : f \in \mathrm{Aut}(\Delta)\}.$$

D'altronde si può procedere direttamente come segue.
Consideriamo anzitutto il gruppo

$$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \ , \ \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 \right\} .$$

Si verifica facilmente che, per ogni matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$,

l'applicazione $\qquad g : \xi \longmapsto \dfrac{a\xi + b}{c\xi + d}$

definisce un automorfismo olomorfo di π^+ e che l'applicazione

$\phi' : SL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\pi^+)$ definita dalla

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto g$$

è un omomorfismo surgettivo di $SL(2,\mathbb{R})$ su $\mathrm{Aut}(\pi^+)$, il cui nuleo è $\mathrm{Ker}\phi' = \left\{\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ = centro di $SL(2,\mathbb{R})$.

Poiché $\mathrm{Aut}(\pi^+) \simeq \mathrm{Aut}(\Delta)$ gli omomorfismi surgettivi

$$\phi : S\,U(1,1) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Delta)$$

e

$$\phi' : S\,L(2,\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathrm{Aut}(\pi^+)$$

con $\ker\phi = \ker\phi' = \{\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\}$, definiscono un isomorfismo:

$$\frac{S\,U(1,1)}{\pm\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\}} \simeq \frac{S\,L(2,\mathbb{R})}{\{\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\}} .$$

Questo isomorfismo si può rialzare in un isomorfismo
$\Psi : S\,U(1,1) \longrightarrow S\,L(2,\mathbb{R})$ nel modo seguente:

posto $j = \begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}$, ad ogni matrice $h \in S\,U(1,1)$ associamo la

$g = j\cdot h\cdot j^{-1}$. Si verifica facilmente che l'applicazione

$h \longmapsto j\cdot h\cdot j^{-1}$ definisce appunto un isomorfismo di $S\,U(1,1)$
su $S\,L(2,\mathbb{R})$ compatibile con gli omomorfismi

$S\,U(1,1) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Delta)$ e $S\,L(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\pi^+)$.

Indichiamo ora un'altra presentazione di $S\,L(2,\mathbb{R})$.

Ad ogni $p \in \mathbb{R}^3$, $p = (\xi,\eta.\delta)$, associamo la matrice hermitiana

$$h = \begin{pmatrix}\delta & \xi+i\eta\\ \xi-i\eta & \delta\end{pmatrix} .$$

Data $g \in S\,U(1,1)$, la matrice $h' = g\cdot h\cdot {}^t\bar{g}$ è hermitiana.

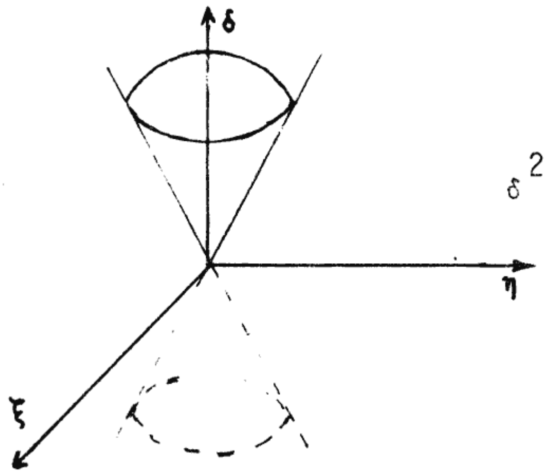
Difatti ${}^t\bar{h}' = {}^t\overline{(g\cdot h\cdot {}^t\bar{g})} = g\cdot {}^t\bar{h}\cdot {}^t\bar{g} = g\cdot h\cdot {}^t\bar{g} = h'$.

Posto quindi $h' = \begin{pmatrix} \delta' & \xi'+i\eta' \\ \xi'-i\eta' & \delta' \end{pmatrix}$ e detto $p' = (\xi', \eta', \delta')$,

ad ogni $g \in S\,U(1,1)$ possiamo associare l'applicazione

$$T(g) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{tale che} \quad p \longmapsto p' .$$

L'applicazione $T(g)$ è invertibile, con inversa $T(g^{-1})$, quindi $T(g) \in G\,L(3,\mathbb{R})$. Inoltre $T(g) \in G'$ gruppo delle trasformazioni di $\mathbb{R}^3$ che lasciano invariato il cono in figura



$$\delta^2 - \xi^2 - \eta^2 = 0$$

Infatti $\delta'^2 - \xi'^2 - \eta'^2 = \det(h') = \det(g\cdot h\cdot {}^t\bar{g}) = \delta^2 - \xi^2 - \eta^2$.

L'applicazione $T : S\,U(1,1) \longrightarrow G'$ definita dalla $g \longmapsto T(g)$ è un omomorfismo, il cui nucleo è $\ker T = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

L'immagine di T è $SO(2,1)$ gruppo delle matrici reali 3x3, con determinante 1, che lasciano invariato il cono $\delta^2 - \xi^2 - \eta^2 = 0$ (detto il gruppo di Lorentz reale).

Si verifica che $SL(2,\mathbb{R})$ è il rivestimento a due fogli del gruppo $SO(2,1)$.

§ 1.4. PSEUDO-DISTANZE DI KOBAYASHI E DI CARATHÉODORY .

Indicheremo con D indifferentemente o una varietà complessa connessa, o una spazio analitico complesso, o un dominio (i.e. un aperto connesso) di $\mathbb{C}^n$, o infine un dominio di uno spazio vettoriale topologico complesso localmente convesso e di Hausdorff E. Se D è un dominio di E ed E_1 è un altro spazio dello stesso tipo di E, una applicazione olomorfa $F : D \longrightarrow E_1$ e per definizione una applicazione continua di D in E_1 tale che, per ogni $(x,y) \in D\times(E\setminus\{0\})$ e per ogni forma lineare continua λ_1 su E_1, la funzione a valori complessi $\xi \longrightarrow \lambda_1 \circ F(x+\xi y)$ è olomorfa sull'aperto $\{\xi \in \mathbb{C} : x+\xi y \in D\}$ di $\mathbb{C}$.

Se D_1 è un dominio di E_1, con $Hol(D,D_1)$ denoteremo l'insieme di tutte le applicazioni olomorfe $F : D \longrightarrow E_1$ tale che $F(D) \subset D_1$.

Per fissare le idee, nel seguito ci riferiremo prevalentemente al caso in cui D è un dominio, lasciando al lettore di adattare le nostre considerazioni agli altri casi sopra indicati.

La pseudo-distanza di Carathéodory in D, si indica con C_D,ed è definita nel modo seguente:

$C_D(x,y) = \mathrm{Sup}\{\omega(f(x),f(y)) : f \in \mathrm{Hol}\ (D,\Delta)\}$ per ogni $x,y \in D$.

Una volta provato che $C_D(x,y) < \infty$, è chiaro che C_D è una pseudo-distanza cioé verifica

$$0 \leq C_D(x,y) = C_D(y,x) \quad \text{e} \quad C_D(x,y) \leq C_D(x,z) + C_D(z,y) .$$

La pseudo-distanza di Carathéodory fu introdotta da Carathéodory nel 1927 per domini di $\mathbb{C}^2$. Per provare che $C_D(x,y) < \infty$ egli fece ricorso alla teoria delle famiglie normali.

Difatti può scriversi $\quad C_D(x,y) = \lim_n \omega(f_n(x), f_n(y))$ con $f_n \in \mathrm{Hol}(D,\Delta)$. Dalla teoria delle famiglie normali segue che esiste una sottosuccessione (f_{nj}) che converge unif$\frac{te}{}$ sui compatti di $D \subset \mathbb{C}^2$.

Proveremo che $C_D(x,y) < \infty$, costruendo in D la pseudo-distanza di Kobayashi d_D e provando che $C_D \leq d_D$.

<u>La speudo-distanza di Kobayashi</u> $d_D(x,y)$ tra due punti x e y in D è definita come segue.

Una catena analitica in D, congiungente due punti x e y di D, consiste di un numero finito ν di funzioni $f_j \in \mathrm{Hol}(\Delta,D)$ e di 2ν punti $\xi_1', \xi_1'', \ldots, \xi_\nu', \xi_\nu'' \in \Delta$, tale che

$$f_1(\xi_1') = x\ ,\ f_j(\xi_j'') = f_{j+1}(\xi'_{j+1})\ (j=1,2,\ldots,\nu-1), f_\nu(\xi_\nu'') = y\ .$$

La somma $\sum_{j=1}^{\nu} \omega(\xi_j', \xi_j'')$ è detta lunghezza della catena analitica.

Essendo D connesso, l'esistenza di catene analitiche congiungenti x e y in D è assicurata.

La pseudo-distanza di Kobayashi $d_D(x,y)$ è, per definizione,

$$d_D(x,y) = \inf \sum_{j=1}^{\nu} \omega(\xi_j', \xi_j'')$$

dove l'estremo inferiore è preso su tutte le catene analitiche che congiungono x e y in D. Dalla definizione segue che d_D è una pseudo-distanza.

ESEMPIO 1.4.1.

$$d_\Delta(x,y) = \omega(x,y) \qquad (x,y \in \Delta) .$$

Dimostrazione. Prendendo $\nu = 1$, $f_1 : \xi \longrightarrow \xi$, si ottiene $d_\Delta(x,y) \leq \omega(x,y)$. D'altra parte, per una catena analitica qualsiasi facendo ricorso alla (1.2.3) ed alla disuguaglianza triangolare, si ha

$$\sum_{j=1}^{\nu} \omega(\xi_j', \xi_j'') \geq \sum_{j=1}^{\nu} \omega(f_j(\xi_j'), f_j(\xi_j'')) \geq \omega(f_1(\xi_1'), f_\nu(\xi_\nu'')) =$$

$= \omega(x,y)$. Quindi $d_\Delta(x,y) = \omega(x,y)$. C.V.D.

LEMMA 1.4.1. *Le applicazioni olomorfe contraggono la pseudo-distanza di Kobayashi, cioè per ogni* $F \in Hol(D,D_1)$ *risulta*

$$d_{D_1}(F(x),F(y)) \leq d_D(x,y) \qquad \textit{per ogni } x,y \in D.$$

Dimostrazione. Segue banalmente dalla definizione di pseudo-distanza di Kobayashi, tenendo conto che ogni catena analitica in D che congiunge x e y, definisce una catena analitica in D_1 che congiunge $F(x)$ e $F(y)$.

In particolare si ha che:

a) <u>ogni diffeomorfismo biolomorfo di D in D_1, è una isometria per entrambe le pseudo-distanze d_D e d_{D_1}</u> .

b) <u>Ogni $F \in Aut(D)$ è una isometria per d_D</u> .

c) <u>Se $D \hookrightarrow D_1$, $d_{D_1}(x,y) \leq d_D(x,y)$ per ogni $x,y \in D$.</u>

COROLLARIO 1.4.1.

$$C_D(x,y) \leq d_D(x,y) \qquad \textit{per ogni} \quad x,y \in D.$$

Dimostrazione. Sia $f \in Hol(D,\Delta)$. Dal lemma 1.4.1 segue che

$d_\Delta(f(x),f(y)) \leq d_D(x,y)$ per ogni $x,y \in D$.

D'altronde dall'esempio 1.4.1

$d_\Delta(f(x),f(y)) = \omega(f(x),f(y))$, perciò

$$\omega(f(x),f(y) \leq d_D(x,y) \qquad \text{per ogni} \quad x,y \in D.$$

Ciò implica che $\operatorname{Sup}\{\omega(f(x),f(y)) : f \in Hol(D,\Delta)\} \leq d_D(x,y)$,

ossia

$$C_D(x,y) \leq d_D(x,y) \qquad \text{per ogni} \quad x,y \in D.$$

Per conseguenza risulta

$$C_D(x,y) < \infty \qquad \text{per ogni} \quad x,y \in D.$$

C.V.D.

La pseudo distanza di kobayashi è estremale, nel senso precisato dal seguente

LEMMA 1.4.2. *Se* d' *è una pseudo distanza su* D *tale che* $d'(f(\xi_1),f(\xi_2)) \leq \omega(\xi_1,\xi_2)$ *per ogni* $f \in Hol(\Delta,D)$ *e per ogni* $\xi_1,\xi_2 \in \Delta$, *allora* $d' \leq d_D$.

Dimostrazione. Sia $(f_j)_{j=1,\dots\nu} \in Hol(\Delta,D)$ una qualsiasi catena analitica congiungente due punti x e y di D.

Applicando la disuguaglianza triangolare e l'ipotesi del lemma, si ha

$$d'(x,y) \leq \sum_{j=1}^{\nu} d'(f_j(\xi_j'),f_j(\xi_j'')) \leq \sum_{j=1}^{\nu} \omega(\xi_j',\xi_j'') .$$

Pertanto $d'(x,y) \leq d_D(x,y)$.

C.V.D.

ESEMPIO 1.4.1'.

$$C_\Delta(x,y) = \omega(x,y) = d_\Delta(x,y) \qquad (x,y \in \Delta) .$$

Dimostrazione. Prendendo $f : \xi \longrightarrow \xi$ risulta $\omega(x,y) \leq C_\Delta(x,y)$.

D'altronde $C_\Delta(x,y) \leq d_\Delta(x,y) = \omega(x,y)$.

LEMMA 1.4.3. *Le applicazioni olomorfe contraggono la pseudo distanza di Carathéodory, cioè per ogni* $F \in Hol(D,D_1)$ *risulta*

$$C_{D_1}(F(x),F(y)) \leq C_D(x,y) \qquad \textit{per ogni } x,y \in D.$$

Dimostrazione. Segue banalmente dalla definizione di pseudo distanza di Carathéodory, tenendo conto che ogni $f \in Hol(D_1,\Delta)$ definisce una $f' = f \circ F \in Hol(D,\Delta)$.

In particolare risulta:

a) Ogni diffeomorfismo biolomorfo di D in D_1, è una isometria per entrambe le pseudo distanze C_{D_1} e C_D.

b) Ogni $F \in \mathrm{Aut}(D)$ è una isometria per C_D.

c) Se $D \hookrightarrow D_1$, $C_{D_1}(x,y) \leq C_D(x,y)$ per ogni $x,y \in D$.

Anche la pseudo distanza di Carathéodory è estramale nel senso precisato dal seguente

LEMMA 1.4.4. *Se* C' *è una pseudo-distanza su* D *tale che*

$C'(x,y) \geq \omega(f(x),f(y))$ *per ogni* $f \in Hol(D,\Delta)$ *e per ogni* $x,y \in D$,

allora $C' \geq C_D$.

Dimostrazione. Segue banalmente dalla definizione di C_D.

ESEMPIO 1.4.2. Sia p una seminorma continua su E, e sia $B_p = \{x \in E : p(x) < 1\}$. Per ogni $x \in B_p$ risulta

$$C_{B_p}(0,x) = d_{B_p}(0,x) = \omega(0,p(x)) .$$

Dimostrazione.

1° caso. Sia $x \in B_p$ con $p(x) > 0$.

La funzione olomorfa $\xi \longmapsto \dfrac{\xi x}{p(x)}$ applica Δ in B_p,

$0 \longmapsto 0$ e $p(x) \longmapsto x$. Perciò

$$C_{B_p}(0,x) \leq d_{B_p}(0,x) \leq \omega(0,p(x)) .$$

Resta da provare che $\omega(0,p(x)) \leq C_{B_p}(0,x)$. Per il teorema di Hahn-Banach, esiste una forma lineare continua λ su E tale che $\lambda(x) = p(x)$ e $|\lambda(y)| \leq p(y)$ per ogni $y \in E$. Perciò λ applica B_p in Δ, ossia $\lambda \in \mathrm{Hol}(B_p,\Delta)$. Ne segue che $\omega(0,p(x)) = \omega(\lambda(0),\lambda(x)) \leq C_{B_p}(0,x)$.

2° caso. Sia $x \in B_p \setminus \{0\}$ con $p(x) = 0$.

Per ogni $t > 1$, consideriamo la funzione olomorfa

$$f_t : \xi \longmapsto t\xi \cdot x .$$

Questa funzione applica Δ in B_p, inoltre $f_t(0) = 0$ e $f_t(\frac{1}{t}) = x$. Quindi

$$C_{B_p}(0,x) \leq d_{B_p}(0,x) = d_{B_p}(f_t(0), f_t(\tfrac{1}{t})) \leq \omega(0,\tfrac{1}{t}) =$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1+\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{t}} \longrightarrow 0 \text{ per } t \longrightarrow +\infty \text{ . Pertanto}$$

$$C_{B_p}(0,x) = d_{B_p}(0,x) = 0 = \omega(0,p(x)) .$$

C.V.D.

Più in generale abbiamo

ESEMPIO 1.4.2'. Sia $r > 0$ e sia $B_p(x_o,r) = \{x \in E : p(x-x_o) < r\}$.

Per ogni $x \in B_p(x_o,r)$ risulta

$$C_{B_p(x_o,r)}(x_o,x) = d_{B_p(x_o,r)}(x_o,x) = \omega\left(0,\frac{p(x-x_o)}{r}\right)$$

<u>ESEMPIO 1.4.3.</u> Sia $D = \Delta \times \Delta$. Per $x = (\xi_1,\xi_2)$ e $x'=(\xi_1',\xi_2')$ punti di D, si ha

$$C_D(x,x') = d_D(x,x') = \max\{\omega(\xi_1,\xi_1'),\omega(\xi_2,\xi_2')\} .$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso in cui $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Sia $p : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow R$ la norma definita dalla $(\delta_1,\delta_2) \longmapsto \max\{|\delta_1|, |\delta_2|\}$. Chiaramente $D = \Delta \times \Delta = B_p = \{y \in \mathbb{C}^2 : p(y) < 1\}$, perciò applicando l'esempio 1.4.2 abbiamo

$$C_D(0,x') = d_D(0,x') = \omega(0,p(x')) = \omega(0,\max\{|\xi_1'|,|\xi_2'|\}) =$$

$= \max\{\omega(0,\xi_1'), \omega(0,\xi_2')\}$. La conclusione, per il caso in cui $x = (\xi_1,\xi_2) \neq (0,0)$, segue dal fatto che il gruppo $\mathrm{Aut}(\Delta) \times \mathrm{Aut}(\Delta)$ opera transitivamente su D lasciando invarianti C_D e d_D.

C.V.D.

PROPOSIZIONE 1.4.1. *Le funzioni* $C_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow R_+$ *e* $d_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow R_+$ *sono continue.*

Dimostrazione. Sia p una semi-norma continua su E.

Dato $x_0 \in D$, essendo D aperto, esiste $r > 0$ tale che $B_p(x_0,r) \subset D$.

Dal Corollario 1.4.1 e dal Lemma 1.4.1 segue che

$$C_D(x_0,x) \leq d_D(x_0,x) \leq d_{B_p(x_0,r)}(x_0,x) \quad ,$$

d'altronde dall'esempio 1.4.2' segue che

$$d_{B_p(x_0,r)}(x_0,x) = \omega(0, \frac{p(x_0-x)}{r})$$. Pertanto le funzioni

$x \longmapsto C_D(x_0,x)$ e $x \longmapsto d_D(x_0,x)$ sono continue.

Inoltre per x_0,y_0,x,y in D si ha:

$$|C_D(x_0,y_0) - C_D(x,y)| \leq |C_D(x_0,x) + C_D(x,y_0) - C_D(x,y)| \leq$$

$$\leq |C_D(x_0,x) + C_D(x,y) + C_D(y,y_0) - C_D(x,y)| = C_D(x_0,x) + C_D(y_0,y) \ ,$$

analogamente

$|d_D(x_0,y_0) - d_D(x,y)| \leq d_D(x_0,x) + d_D(y_0,y)$. Quindi possiamo in definitiva concludere affermando che le funzioni C_D e d_D sono continue su $D \times D$.

C.V.D.

LEMMA 1.4.5. *Se D è un dominio limitato di E, allora C_D*

e d_D *definiscono su* D *la topologia relativa.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in D$ e, per $s > 0$, sia

$$S(x_0,s) = \{x \in D : d_D(x_0,x) < s\} .$$

Per provare il lemma 1.4.5 riferito a d_D, è sufficiente provare che per ogni intorno U di x_0 in D esiste un $s > 0$ tale che $S(x_0, s) \subset U$. Sia p una semi-norma continua su E e sia $r > 0$ tale che $B_p(x_0,r) \subset U$. Essendo D limitato, esiste $R > 0$ tale che $D \subset B_p(x_0,R)$. Dal lemma 1.4.1. e dall'esempio 1.4.2' segue che:

$$d_D(x_0,x) \geq d_{B_p(x_0,R)}(x_0,x) = \omega(0,\frac{p(x-x_0)}{R}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{p(x-x_0)}{R}\right)^{2n+1} \geq \frac{p(x-x_0)}{R} .$$

Per ogni $x \in S(x_0,s)$, con $s = \frac{r}{R}$, risulta quindi

$$p(x-x_0) \leq R\, d_D(x_0,x) < R\cdot \frac{r}{R} = r \quad \text{cioé} \quad S(x_0,s) \subset B_p(x_0,r)$$

con $B_p(x_0,r) \subset U$. In modo analogo si opera per C_D.

C.V.D.

COROLLARIO 1.4.2. *Sotto le stesse ipotesi del lemma 1.4.5., entrambe le pseudo distanze* C_D *e* d_D *sono distanze.*

DEFINIZIONE 1.4.1. Se d_D è una distanza, D si dice iperbolico.

PROPOSIZIONE 1.4.2. *Se D è una varietà complessa o uno spazio analitico, iperbolico, di dimensione finita, allora la topologia definita da d_D è equivalente alla topologia relativa di D.*

Questo risultato è dovuto a Barth (per la dimostrazione si può consultare [1]).

ESEMPIO 1.4.4.

$$d_E = C_E = 0 \quad .$$

Dimostrazione. Considerando la semi norma $p = 0$, si ha $B_p \equiv E$ e quindi dall'esempio 1.4.2 segue che $d_E = C_E = 0$.

ESEMPIO 1.4.5. Se M è varietà complessa sulla quale opera transitivamente un gruppo di Lie complesso G, allora $d_M = 0$ (e quindi $C_M = 0$) .

Dimostrazione. Per ogni $p \in M$, consideriamo U intorno di p tale ogni $q \in U$ stà nell'orbita passante per p di un sottogruppo complesso ad un parametro di G. Segue che per ogni $q \in U$, esiste una $F \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C},M)$ con $p,q \in F(\mathbb{C})$. Quindi

$$d_M(p,q) = d_M\,(F(z_1),F(z_2)) \leq d_{\mathbb{C}}(z_1,z_2) = 0 \text{ , cioé } d_M(p,q) = 0 \text{ .}$$

Siccome ogni coppia di punti $p,q \in M$ possono essere congiunti con una catena di intorni del tipo U, applicando la disuguaglianza triangolare segue che $d_M(p,q) = 0$ per tutti i $p,q \in M$.

C.V.D.

OSSERVAZIONE 4.

Da un classico teorema di Bochner e Montgomery segue pertanto che $d_M = 0$ per ogni varietà complessa compatta omogenea. Ad esempio $d_M = 0$ se M è uno spazio proiettivo complesso o un toro complesso.

Per trovare esempi in cui $d_D \neq C_D$ consideriamo il caso in cui D è una varietà complessa (di dimensione finita), ed esaminiamo i rivestimenti (per le nozioni concernenti i rivestimenti cfr., ad esempio, [12]).

Sia $\pi : \tilde{D} \longrightarrow D$ un rivestimento di D.

LEMMA 1.4.6. *Siano $x,y \in D$, scegliamo un $\tilde{x} \in \tilde{D}$ tale che $\pi(\tilde{x}) = x$. Risulta*

$$d_D(x,y) = \inf\{d_{\tilde{D}}(\tilde{x},\tilde{y}) \; : \; \tilde{y} \in \pi^{-1}(y)\} \quad .$$

Dimostrazione. Intanto, siccome π è una applicazione che contrae le distanze di $\tilde{D}$ in D, risulta

$$d_D(x,y) \leq \inf\{d_{\tilde{D}}(\tilde{x},\tilde{y}) \; : \; \tilde{y} \in \pi^{-1}(y)\}$$

Supponiamo che esista una $\varepsilon > 0$ tale che

$$d_D(x,y) + \varepsilon < \inf\{d_{\tilde{D}}(\tilde{x},\tilde{y}) \; : \; \tilde{y} \in \pi^{-1}(y)\} \quad . \tag{1.4.1}$$

Dalla definizione di d_D segue che esiste una catena analitica congiungente x e y in D, la cui lunghezza è minore di $d_D(x,y) + \varepsilon$, cioé esistono $\xi_1', \xi_1'', \ldots, \xi_\nu', \xi_\nu'' \in \Delta$, $f_1, \ldots f_\nu \in \mathrm{Hol}(\Delta, D)$ tale che $f_1(\xi_1') = x, f_j(\xi_j'') = f_{j+1}(\xi_{j+1}')$ $(j = 1,\ldots \nu-1)$ $, f_\nu(\xi_\nu'') = y$

e $\sum_{j=1}^{\nu} \omega(\xi_j', \xi_j'') < d_D(x,y) + \varepsilon$. Poiché π è un omomorfismo locale, scegliendo opportunamente la catena, possiamo definire una catena analitica in $\tilde{D}$ in guisa tale che

$$\tilde{f}_j \in \mathrm{Hol}(\Delta, \tilde{D}) \quad (j = 1 \ldots, \nu) \ , \quad \pi \circ \tilde{f}_j = f_j , \tilde{f}_1(\xi_1') = \tilde{x} \ ,$$

$$\tilde{f}_j(\xi_j'') = \tilde{f}_{j+1}(\xi_{j+1}') \qquad (j=1,2,\ldots,\nu-1) \ , \quad \tilde{f}_\nu(\xi_\nu'') = \tilde{y}$$

. Pertanto

$$d_{\tilde{D}}(\tilde{x},\tilde{y}) \leq \sum_{j=1}^{\nu} \omega(\xi_j', \xi_j'') < d_D(x,y) + \varepsilon$$

in contraddizione con la (1.4.1) .

C.V.D.

<u>OSSERVAZIONE 5.</u> Il lemma 1.4.6. non vale per C_D .

LEMMA 1 4.7. *Se D ha dimensione finita, allora D è iperbolico se, e solo se, $\tilde{D}$ è iperbolico.*

Dimostrazione. Sia $\tilde{D}$ iperbolico, $x,y \in D$ tale che $d_D(x,y)=0$. Preso $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$; per il lemma 1.4.6 esiste una successione $\tilde{y}_\nu \in \pi^{-1}(y)$ tale che $\lim_\nu d_{\tilde{D}}(\tilde{y}_\nu, \tilde{x}) = 0$. Quindi $\{\tilde{y}_\nu\}$ converge a $\tilde{x}$ (infatti essendo $\dim D < \infty$, basta applicare la proposizione 1.4.2). Ne segue che $x = \pi(\tilde{x}) = \lim \pi(\tilde{y}_\nu) = \lim y = y$. Perciò D è iperbolico.

Sia ora D iperbolico, e siano $\tilde{x},\tilde{y} \in \tilde{D}$ tale che $d_{\tilde{D}}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$.

Posto $x = \pi(\tilde{x})$ e $y = \pi(\tilde{y})$, è $d_D(x,y) = d_D(\pi,(\tilde{x}),\pi(\tilde{y}))$.

Poiché π contrae le distanze, $d_D(\pi(\tilde{x}),\pi(\tilde{y})) \leq d_{\tilde{D}}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$.

Siccome D è iperbolico, è $x = y$, ossia $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ si trovano sulla stessa fibra di π.

Tenendo conto della proposizione 1.4.2, consideriamo un intorno $\tilde{U}$ di $\tilde{x}$ in $\tilde{D}$ tale che π sia un diffeomorfismo di $\tilde{U}$ su $\pi(\tilde{U})$, con $\pi(\tilde{U})$ ε-intorno di x in D rispetto a d_D cioé $\pi(\tilde{U}) = \{z \in D : d_D(x,z) < \varepsilon\}$. Essendo $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{y})$, per provare che $\tilde{x} = \tilde{y}$ basta provare che $\tilde{y} \in \tilde{U}$. Essendo $d_{\tilde{D}}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$, esiste una catena analitica da $\tilde{x}$ a $\tilde{y}$ in $\tilde{D}$ la cui lunghezza è minore di ε . Cioé esistono

$\xi_1' \, \xi_1'', \ldots, \xi_\nu' \, , \xi_\nu'' \in \Delta$, e $f_1 \ldots, f_\nu \in Hol(\Delta,\tilde{D})$, tale che

$f_1(\xi_1') = \tilde{x}$, $f_j(\xi_j'') = f_{j+1}(\xi_{j+1}')$ $(j = 1,2,\ldots,\nu-1)$, $f_\nu(\xi_\nu'') = \tilde{y}$,

e $\sum_{j=1}^{\nu} \omega(\xi_j',\xi_j'') < \varepsilon$. Sia ℓ_j l'arco di geodetica da ξ_j' a ξ_j'' in Δ per ogni $j = 1, \ldots,\nu$. Indichiamo con $\tilde{\ell}$ l'arco di curva da $\tilde{x}$ a $\tilde{y}$ in $\tilde{D}$, ottenuto dalle curve $f_1(\ell_1), \ldots, f_\nu(\ell_\nu)$.

Siccome ℓ_j $(j = 1,\ldots,\nu)$ sono geodetiche in Δ e $\pi \circ f_j (j=1,\ldots\nu)$ sono applicazioni che contraggono le distanze, per ogni $\tilde{z} \in \tilde{\ell}$:

$$d_D(x,\pi(\tilde{z})) = d_D(\pi(\tilde{x}),\pi(\tilde{z})) \leq d_{\tilde{D}}(\tilde{x},\tilde{z}) \leq \sum_{j=1}^{\nu} \omega(\xi_j',\xi_j'') < \varepsilon.$$

Quindi $\ell = \pi(\tilde{\ell})$ è contenuta nell'ε-intorno $\pi(\tilde{U})$ di x, e quindi $\tilde{\ell}$ è contenuta in $\tilde{U}$. Pertanto $\tilde{y} \in \tilde{U}$.

C.V.D.

<u>ESEMPIO 1.4.6.</u> a) Se D è un toro complesso di dimensione n, il rivestimento universale di D è $\mathbb{C}^n$. Quindi $d_D = C_D = 0$.

b) Se D è una superficie di Riemann compatta di genere ≥ 2, il rivestimento universale di D è Δ. Quindi D è iperbolica.

c) Se D è la sfera di Riemann $P^1(\mathbb{C})$, è $d_D = C_D = 0$, come abbiamo già osservato.

d) Se D è una varietà compatta, $C_D = 0$ per il principio del massimo.

Vogliamo costruire ora esempi in cui $0 \neq C_D \neq d_D$.

<u>DEFINIZIONE 1.4.2.</u> Sia D iperbolico. D lo diremo completo se è completo rispetto a d_D, cioé se per ogni $x \in D$ e per ogni $r > 0$ la palla chiusa di centro x e raggio r è un sottoinsieme compatto di D.

Ad esempio, la distanza di Poincaré in Δ(o in π^+) è completa.

La definizione data è equivalente a quella usuale in termini di successioni di Cauchy, ciò però non vale in generale per una distanza qualsiasi.

PROPOSIZIONE 1.4.3. *Se D ha dimensione finita, allora D è iperbolico completo, se e solo se, $\tilde{D}$ è iperbolico completo.*

Dimostrazione. Sia $\tilde{D}$ iperbolico completo. Dal lemma 1.4.7. D

è iperbolico e per la proposizione 1.4.2 la topologia definita da d_D è equivalente a quella relativa di D.

Fissato $\tilde{x} \in \tilde{D}$, sia $\tilde{B}_r = \{\tilde{y} \in \tilde{D} : d_{\tilde{D}}(\tilde{x},\tilde{y}) \leq r\}$ la palla di centro $\tilde{x}$ e raggio r. Sia B_r la palla di centro $x = \pi(\tilde{x}) \in D$ e raggio r per d_D. Dal lemma 1.4.6, abbiamo $B_r \subset \pi(\tilde{B}_{r+\varepsilon})$ per $\varepsilon > 0$. D'altronde essendo $\tilde{D}$ completo, $\tilde{B}_{r+\varepsilon}$ sarà compatta per cui la palla chiusa B_r sarà pure compatta. Pertanto D è completo.

Sia ora D iperbolico completo. Proveremo che $\tilde{D}$ è completo in termini di successioni di Cauchy. Consideriamo dunque una successione $\{\tilde{x}_i\}$ di Cauchy in $\tilde{D}$. Poiché π contrae le distanze, allora $\{\pi(\tilde{x}_i)\}$ è una successione di Cauchy in D, e quindi $\{\pi(\tilde{x}_i)\}$ converge a un punto $x \in D$. Sia U un $2\,\varepsilon$-intorno di x in D con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, allora π induce un omeomorfismo di ogni componente connessa di $\pi^{-1}(U)$ in U.

Sia N un intero tale che $\pi(\tilde{x}_i) \in U'$ per ogni $i > N$, ove U' è l'ε-intorno di x in D, ne segue che ogni punto fuori di U è almeno a distanza ε da $\pi(\tilde{x}_i)$ .Indichiamo con $\tilde{U}_i$ la componente connessa di $\pi^{-1}(U)$ contenente $\tilde{x}_i$. Facciamo vedere che per ogni $i > N$, le palle $\{\tilde{y} \in \tilde{D} : d_{\tilde{D}}(\tilde{x}_i,\tilde{y}) < \varepsilon\}$ sono contenute negli $\tilde{U}_i$. Sia $\tilde{y}_\circ \in \tilde{D}$ con $d_{\tilde{D}}(\tilde{x}_i,\tilde{y}_\circ) < \varepsilon$, allora esiste una catena analitica $\{\xi_1', \ldots, f_\nu\}$ da $\tilde{x}_i$ a $\tilde{y}_\circ$ di lunghezza minore di ε, cioé tale che $\sum_{j=1}^{\nu}\omega(\xi_j',\xi_j'') < \varepsilon$. Indichiamo con ℓ_j l'arco geodetico da ξ_j' a ξ_j'' e con $\tilde{\ell}$ la curva da $\tilde{x}_i$ a $\tilde{y}_\circ$ ottenuta dalle curve $f_1(\ell_1) \ldots f_\nu(\ell_\nu)$ in $\tilde{D}$. Dalla costruzione fatta segue che $\ell = \pi(\tilde{\ell})$ è contenuta nell'ε-intorno di $\pi(\tilde{x}_i)$ e quindi in U. Pertanto $\tilde{\ell}$ è contenuta in $\tilde{U}_i$ e quindi $\tilde{y}_\circ \in \tilde{U}_i$. Ora detto $\tilde{x}$ il punto di $\tilde{U}_i$ con $\pi(\tilde{x}) = x$, la successione $\{\tilde{x}_i\}$ converge a $\tilde{x}$.

C.V.D.

ESEMPIO 1.4.7. Sia $\Delta^* = \Delta\setminus\{0\}$. Per il teorema di estensione di Riemann $C_{\Delta^*} = C_\Delta$. Quindi C_{Δ^*} non è completa.

D'altronde Δ^* è iperbolico completo. Infatti l'applicazione $p : \pi^+ \longrightarrow \Delta^*$ tale che $\xi \longmapsto e^{2\pi i\xi}$, definisce π^+ come rivestimento a infiniti fogli di Δ^*.

Siccome π^+ è iperbolico completo, per la proposizione 1.4.3. Δ^* è iperbolico completo.

In definitiva Δ^* è un esempio per cui:

$$0 \neq C_{\Delta^*} \neq d_{\Delta^*} \quad .$$

ESEMPIO 1.4.8. Per a,b in $\mathbb{C}$, $a \neq b$, $\mathbb{C}\setminus\{a,b\}$ è iperbolico completo, (cfr. [4] pag. 61).

TEOREMA 1.4.1. *Sia D un dominio limitato di E spazio di Banach complesso. Se D è omogeneo (i.e. $Aut(D)$ è transitivo) allora C_D e d_D sono distanze complete.*

Questo risultato dovuto a J.P.Vegué (cfr. [16] pag. 279) vale anche per domini limitati in spazi vettoriali complessi di Hausdorff, localmente convessi, localmente limitati e completi per successioni (cfr. [14] prop. 2.4.) .

§ 1.5. APPLICAZIONI.

Le distanze di Carathéadory e di Kobayashi hanno suggestive applicazioni all'analisi complessa ed all'analisi funzionale. Ne indichiamo alcune, rinviando per maggiori dettagli, nonché per altre applicazioni, a [13], [14], [4] .

I) TEOREMA DI PICARD. *Ogni applicazione olomorfa* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{a,b\}$ *con* $a,b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, *è una applicazione costante.*

Dimostrazione. Sia $D = \mathbb{C} \setminus \{a,b\}$, e sia $f \in Hol(\mathbb{C},D)$. Dal lemma 1.4.1 segue che, per $x,y \in \mathbb{C}$,

$d_D(f(x),f(y)) \leq d_{\mathbb{C}}(x,y) = 0$. Poiché D è iperbolico (esempio 1.4.8) risulta $f(x) = f(y)$ per ogni $x,y \in \mathbb{C}$ e quindi f è costante. Questo è il cosiddetto "piccolo" Teorema di Picard.

GRANDE TEOREMA DI PICARD. *Se* f *è una applicazione olomorfa di* $\{\xi \in \mathbb{C} : 0 < |\xi| < R\} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ - $\{3$ *punti*$\}$, *allora* f *può essere estesa a una applicazione olomorfa di* $\{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < R\} \longrightarrow P^1(\mathbb{C})$.

Questo teorema può essere dimostrato ancora mediante le distanze di Kobayashi. Si veda in proposito la monografia [4] .

Tale teorema è un caso particolare del seguente problema generale:

Sia X una varietà complessa e Y una sottovarietà iperbolica relativamente compatta. Data $f \in Hol(\{\xi \in \mathbb{C} : 0 < |\xi| < R\}, Y)$, è possibile estendere f in un elemento di $Hol(\{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < R\}, X)$?

La risposta è affermativa solo in casi particolari. Si veda in proposito la monografia [4] .

II) AUTOMORFISMI DEL DISCO UNITA' IN CERTI SPAZI DI BANACH.

Sia (M,Ξ,μ) uno spazio di misura. Cioé M sia un insieme, Ξ una σ-algebra di sottoinsiemi di M, e μ una misura positiva su Ξ.

Sia $E = L^1(M,\Xi,\mu)$ e B la palla unitaria aperta

$$B = \{x \in E : ||x|| = \int_M |x| d\mu < 1\} .$$

Se $M = \{a\}$, E può essere identificato col piano complesso.
Se $M = \{a,b\}$ con $\mu(a) = \mu(b) = 1$, allora E può essere identificato con $\mathbb{C}^2$ e la palla $B = \{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{C}^2 : |\xi_1| + |\xi_2| < 1\}$.

TEOREMA 1.5.1. *Se $\dim_{\mathbb{C}} E > 1$, ogni automorfismo olomorfo d di B lascia fissa l'origine (e quindi, per il teorema di H. Cartan, f è la restrizione a B di una isometria lineare di E su di sè).*

Il teorema 1.5.1. trovasi in [13] .

Per $M = \{a,b\}$ e quindi per $E = \mathbb{C}^2$ il teorema 1.5.1 è stato provato da Kritikos nel 1927.

Il risultato del teorema 1.5.1 è conseguenza di alcune proprietà per le distanze di Kobayashi e di Carathéadory in domini di spazi di Banach complessi. Nella dimostrazione si utilizza la nozione di curva geodetica complessa in B: sia $g : \Delta \to B$ una applicazione olomorfa tale che $g(0) = x_0$, allora

$$\omega(0,\xi) \geq C_B(x_0, g(\xi)) \qquad \text{per ogni} \quad \xi \in \Delta ;$$

se vale l'uguale per ogni $\xi \in \Delta$, $\gamma = g(\Delta)$ si dice curva geodetica complessa per x_0.

Per ogni $x \in B$, $x \neq 0$, l'immagine di Δ per l'applicazione lineare $\xi \longmapsto \dfrac{\xi}{||x||}\,x$ è l'unica curva geodetica complessa per 0 contenente x.

Il teorema 1.5.1 vale anche per $1 \leq p < 2$ e $2 < p < \infty$.

Per $p = 2$ il teorema non vale in quanto il disco unità aperto di ogni spazio di Hilbert è omogeneo.

§ 1.6. METRICHE DIFFERENZIALI DI KOBAYASHI E DI CARATHEODORY.

Con le stesse notazioni del §1.4 sia D un dominio di E.

Le considerazioni che seguiranno si estendono al caso in cui D è una varietà complessa. E è allora lo spazio tangente a D in x.

LEMMA 1.6.1. *Dato $x \in D$, $v \in E$, $\xi_0 \in \Delta$, esistono $h \in Hol(\Delta, D)$ e $\tau \in \mathbb{C}$ tale che $h(\xi_0) = x$ e $d\,h(\xi_0)\,\tau = v$.*

Dimostrazione. Per ogni intorno aperto U di x in D, esiste una seminorma continua p su E tale che $B_p(x,1) \subset U$.

Se $p(v) > 0$, prendiamo $k \in Hol(\mathbb{C},E)$ definita da

$$k(\xi) = x + \frac{\xi}{p(v)} v .$$

Risulta $k(\Delta) \subset U$ e quindi $k_{|\Delta} \in Hol(\Delta,U)$. Inoltre $k(0) = x$, $dk(0)p(v) = p(v)k'(0) = v$. La funzione h definita da

$$h(\xi) = k\left(\frac{\xi - \xi_0}{1-\bar{\xi}_0\xi} \right)$$

e il vettore $\tau = p(v)(1 - |\xi_0|^2)$ verificano il lemma, nel caso $p(v) > 0$.

Se $p(v) = 0$, basta prendere la funzione $h \in Hol(\Delta,D)$ definita da

$$h(\xi) = x + \frac{\xi - \xi_0}{1 - \bar{\xi}_0\xi} v \qquad (\xi \in \Delta),$$

con $\tau = (1 -|\xi_0|^2)$.

C.V.D.

Dal lemma 1.6.1 segue che ha senso porre

$$\mathcal{K}(x,v) = \inf \langle\tau\rangle_\xi \quad , \tag{1.6.1}$$

dove l'estremo inferiore è preso su tutti i $\tau \in \mathbb{C}$, $\xi \in \Delta$, $h \in Hol(\Delta,D)$ con $h(\xi) = x$ e $dh(\xi)\ \tau = v$.

Siccome Δ è omogeneo e gli elementi di $Aut(\Delta)$ sono isometrie per la metrica di Poincaré, possiamo mantenere $\xi \in \Delta$ fisso nella (1.6.1). In particolare scegliendo $\xi = 0$, abbiamo

$$\mathcal{K}(x,v) = \inf\{|\tau| : \tau \in \mathbb{C},\ h \in Hol(\Delta,D), h(0) = x,\ dh(0)\tau = v\} .$$

La funzione

$$\mathcal{K} : D \times E \longrightarrow R_+$$

si chiama <u>metrica differenziale di Kobayashi</u> in D.

Sia $h \in Hol(\Delta,D)$ una funzione che verifichi il lemma 1.6.1, e sia $g \in Hol(D,\Delta)$. Allora

$$dg(x)v = dg(h(\xi_0))\cdot(dh(\xi_0)\tau = d(g\circ h)(\xi_0)\tau \quad .$$

Siccome $g\circ h \in Hol(\Delta,\Delta)$, dalla 2) del lemma di Schwarz-Pick (cfr. § 1.2) segue che

$$\frac{|dg(x)v|}{1-|g(x)|^2} = \frac{|d(g\circ h)(\xi_0)\tau|}{1-|g\circ h(\xi_0)|^2} = \frac{|\tau\cdot(g\circ h)'(\xi_0)|}{1-|g\circ h(\xi_0)|^2} \leq \frac{|\tau|}{1-|\xi_0|^2} ,$$

cioé

$$< dg(x)v>_{g(x)} \leq <\tau>_{\xi_0}$$

per ogni funzione $h \in Hol(\Delta,D)$ che verifica il lemma 1.6.1.

Quindi

$$\langle dg(x)v\rangle_{g(x)} \leq \mathcal{K}(x,v) \qquad \text{per ogni} \quad g \in \mathrm{Hol}(D,\Delta).$$

Pertanto il numero $\gamma(x,v) \in \mathbb{R}_+$ definito dalla

$$\gamma(x,v) = \sup\{\langle dg(x)v\rangle_{g(x)} : g \in \mathrm{Hol}(D,\Delta)\}$$

verifica la disuguaglianza

$$\gamma(x,v) \leq \mathcal{K}(x,v) \qquad (x \in D, v \in E) \qquad (1.6.2)$$

e perciò è finito.

La funzione $\gamma : D \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ si chiama

<u>metrica differenziale di Carathàodory</u> in D.

Per $a \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{K}(x,av) = |a|\mathcal{K}(x,v) \quad \text{e} \quad \gamma(x,av) = |a|\,\gamma(x,v) .$$

Inoltre, per $v_1,v_2 \in E$:

$$\gamma(x,v_1+v_2) \leq \gamma(x,v_1) + \gamma(x,v_2),$$

(non si sa se una simile disuguaglianza vale anche per $\mathcal{K}$).

PROPOSIZIONE 1.6.1. *Sia* D_1 *un dominio di* E_1*. Per ogni* $F \in Hol(D,D_1)$, $x \in D$, $v \in E$, *risulta*

$$\mathcal{K}_{D_1}(F(x),dF(x)v) \leq \mathcal{K}_D(x,v) \quad \text{e} \quad \gamma_{D_1}(F(x),dF(x)v) \leq \gamma_D(x,v) .$$

Dimostrazione. Segue banalmente dalle definizioni.

In particolare, se $F \in Aut(D)$, allora

$$\mathcal{K}_D(F(x),dF(x)v) = \mathcal{K}_D(x,v) \quad e \quad \gamma_D(F(x),dF(x)v) = \gamma_D(x,v) \quad .$$

<u>ESEMPIO 1.6.1</u> Sia $E = \mathbb{C}$, $D = \Delta$. Presa $g : \xi \longmapsto \xi$, è

$$\gamma_\Delta(\xi,\tau) \geq \langle dg(\xi)\tau\rangle_{g(\xi)} = \langle\tau\rangle_\xi = \frac{|\tau|}{1-|\xi|^2} \quad .$$

Poiché $dg(\xi)\tau = \tau$, è anche

$$\mathcal{K}_\Delta(\xi,\tau) \leq \frac{|\tau|}{1-|\xi|^2} \quad .$$

Quindi dalla (1.6.2) abbiamo

$$\gamma_\Delta(\xi,\tau) = \mathcal{K}_\Delta(\xi,\tau) = \frac{|\tau|}{1-|\xi|^2}, \quad (\xi \in \Delta, \tau \in \mathbb{C}) \qquad (1.6.3) .$$

In generale per $\Delta_R = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < R\}$ abbiamo

$$\gamma_{\Delta_R}(\xi,\tau) = K_{\Delta_R}(\xi,\tau) = \frac{R|\tau|}{R^2 - |\xi|^2}, (\xi \in \Delta_R, \tau \in \mathbb{C}) \qquad (1.6.3')$$

LEMMA 1.6.2. *Sia p una seminorma continua su E e $B_p = B_p(0,1) = \{x \in E : p(x) < 1\}$. Allora*

$$\gamma_{B_p}(0,v) = \mathcal{K}_{B_p}(0,v) = p(v) \qquad \textit{per ogni } v \in E.$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $p(v) > 0$. Per il teorema di Hahn-Banach esiste una forma lineare continua λ su E tale che

$$\lambda(v) = p(v) \qquad e \qquad |\lambda(y)| \leq p(y) \qquad \text{per ogni } y \in E.$$

Quindi $\lambda \in Hol(B_p,\Delta)$. Sia $h : \Delta \longrightarrow B_p$ definita dalla

$$h(\xi) = \frac{\xi}{p(v)}\, v\ ,$$ è $h \in Hol(\Delta,B_p)$, $h(0) = 0$, $h(p(v)) = v$ e

$$dh(0)p(v) = v.$$

Dalla 1.6.3 e dalla proposizione 1.6.1 segue :

$$p(v) = \gamma_\Delta(0,p(v)) = \gamma_\Delta(\lambda(0),\lambda(v)) = \gamma_\Delta(\lambda(0),d\lambda(0)v) \leq \gamma_{B_p}(0,v) \leq$$

$$\leq \mathcal{K}_{B_p}(0,v) = \mathcal{K}_{B_p}(h(0),dh(0)p(v)) \leq \mathcal{K}_\Delta(0,p(v)) = p(v)\ .$$

Quindi $\gamma_{B_p}(0,v) = \mathcal{K}_{B_p}(0,v) = p(v)$.

Consideriamo ora il caso in cui $p(v) = 0$. Sia $t > 1$, e sia $h_t \in Hol(\Delta,B_p)$ definita da $h_t(\xi) = t\,\xi\,v$. Allora

$$\gamma_{B_p}(0,v) \leq \mathcal{K}_{B_p}(0,v) = \mathcal{K}_{B_p}(h_t(0),dh_t(0)\,\frac{1}{t}\,) \leq \mathcal{K}_\Delta(0,\frac{1}{t}\,) = \frac{1}{t}\ ,$$

ma $\frac{1}{t} \longrightarrow 0$ per $t \longrightarrow +\infty$, perciò $\gamma_{B_p}(0,v) = \mathcal{K}_{B_p}(0,v) = p(v) = 0$.

C.V.D.

Per ogni $R > 0$, posto $B_p(0,R) = \{x \in E : p(x) < R\}$ abbiamo

$$\gamma_{B_p(0,R)}(0,v) = K_{B_p(0,R)}(0,v) = \frac{p(v)}{R} \quad \text{per ogni} \quad v \in E. \quad (1.6.4)$$

<u>ESEMPIO 1.6.2</u>. Per $(\xi_1,\xi_2) \in D = \Delta \times \Delta$, $(\tau_1,\tau_2) \in \mathbb{C}^2$, si ha

$$\gamma_{\Delta\times\Delta}((\xi_1,\xi_2),(\tau_1,\tau_2)) = K_{\Delta\times\Delta}((\xi_1,\xi_2),(\tau_1,\tau_2)) = \max(\langle\tau_1\rangle_{\xi_1}, \langle\tau_2\rangle_{\xi_2}) .$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso in cui $\xi_1 = \xi_2 = 0$.

Sia $p : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow R$ la norma così definita:

$$(\delta_1,\delta_2) \longmapsto \max\{|\delta_1|,|\delta_2|\} .$$

Chiaramente $D = \Delta \times \Delta = B_p = \{y \in \mathbb{C}^2 : p(y) < 1\}$, perciò dal lemma 1.6.2 abbiamo

$$\gamma_{\Delta\times\Delta}((0,0),(\tau_1,\tau_2)) = K_{\Delta\times\Delta}((0,0),(\tau_1,\tau_2)) = p((\tau_1,\tau_2)) =$$

$$= \max\{|\tau_1|,|\tau_2|\} = \max\{\langle\tau_1\rangle_0, \langle\tau_2\rangle_0\} .$$

La conclusione, per il caso in cui $(\xi_1,\xi_2) \neq (0,0)$ segue dal fatto che il gruppo $\mathrm{Aut}(D)$ opera transitivamente su D lasciando invarianti γ_D e K_D.

C.V.D.

LEMMA 1.6.3. *Siano* $\mathcal{D}$ *e* $\mathcal{D}_1$ *domini rispettivamente di* E *ed* E_1. *Per* $(x,x_1) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}_1$ *e* $(v,v_1) \in E \times E_1$ *risulta*

$$K_{\mathcal{D}\times\mathcal{D}_1}((x,x_1),(v,v_1)) = \max\{K_{\mathcal{D}}(x,v)\ ,\ K_{\mathcal{D}_1}(x\ ,v_1)\}\ .$$

Dimostrazione. Siano F ed F_1 le proiezioni di $D \times D_1$ rispettivamente su D e D_1 . Dalla proposizione 1.6.1. segue

$$K_D(x,v) = K_D(F(x,x_1),\ dF(x,x_1)(v,v_1)) \leq K_{D\times D_1}((x,x_1),(v,v_1))$$

e

$$K_{D_1}(x_1,v_1) = K_{D_1}(F_1(x,x_1),dF_1(x,x_1)(v,v_1)) \leq K_{D\times D_1}((x,x_1),(v,v_1))\ .$$

Perciò

$$K_{D\times D_1}((x,x_1),(v,v_1)) \geq \max\{K_D(x,v),K_{D_1}(x_1,v_1)\ \ . \qquad (1.6.5)$$

Sia $h \in Hol(\Delta,D)$ $(h_1 \in Hol(\Delta,D_1)$ tale che

$$h(0) = x \quad e \quad dh(0)\tau = v \quad (h_1(0) = x_1 \quad dh_1(0)\tau_1 = v_1)$$

con $\tau \in \mathbb{C}$ $(\tau_1 \in \mathbb{C})$. Applicando ancora la proposizione 1.6.1 e successivamente l'esempio 1.6.2, abbiamo

$$K_{D\times D_1}((x,x_1),(v,v_1)) \leq K_{\Delta\times\Delta}((0,0),(\tau,\tau_1)) = \max\{|\tau|,|\tau_1|\}\ .$$

Passando quindi agli estremi inferiori abbiamo

$$K_{D\times D_1}((x,x_1)(v,v_1)) \leq \max\{K_D(x,v),K_{D_1}(x_1,v_1)\} . \qquad (1.6.6)$$

Dalla (1.6.5) e dalla (1.6.6) risulta

$$K_{D\times D_1}(x,x_1),(v,v_1)) = \max\{K_D(x,v),K_{D_1}(x_1,v_1)\} . \qquad \text{C.V.D.}$$

LEMMA 1.6.4. *Per ogni* $\varepsilon>0$, *esiste un intorno* V *di* $(0,0)$ *in* $B_p(0,R)\times E$ *tale che*

$$K_{B_p(0,R)}(x,v) < \varepsilon$$

per ogni $(x,v) \in V$.

Dimostrazione. Consideriamo l'intorno $V = B_p(0, \frac{R}{2}) \times B_p(0, \frac{R\varepsilon}{4})$.

Per $x \in B_p(0,\frac{R}{2})$ e $v \in B_p(0, \frac{R\cdot\varepsilon}{4})$ la funzione $f \in Hol(\Delta,E)$

definita dalla

$$f(\xi) = x + \frac{2\xi}{\varepsilon} v$$

applica Δ in $B_p(0,R)$. Siccome $f(0) = x$ e $df(0)\frac{\varepsilon}{2} = v$,

dalla proposizione 1.6.1 abbiamo

$$K_{B_p(0,R)}(x,v) = K_{B_p(0,R)}(f(0),df(0)\frac{\varepsilon}{2}) \leq K_\Delta(0, \frac{\varepsilon}{2}) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon .$$

C.V.D.

LEMMA 1.6.5. *Sia* D *un dominio di* E. *Per ogni* $x \in D$ $\gamma_D(x,\cdot)$ *è una seminorma continua su* E. *Se* D *è limitato, e se* p *è una seminorma continua su* E *tale che* $B_p(x,R) \subset D$ *per un* $R > 0$ *e un* $x \in D$, *allora* $\gamma_D(x,\cdot)$ *è una seminorma equivalente a* p.

Dimostrazione. Per $x \in D$, esiste una seminorma continua p su E e un $R > 0$ tale che $B_p(x,R) \subset D$. La traslazione che porta y in $x+y$, applica $B_p(0,R)$ in $B_p(x,R)$.

Applicando la proposizione 1.6.1 e la relazione (1.6.4), abbiamo $\gamma_D(x,v) \leq \gamma_{B_p(x,R)}(x,v) = \gamma_{B_p(0,R)}(0,v) = \dfrac{p(v)}{R}$ per ogni $v \in E$, cioé

$$\gamma_D(x,v) \leq \frac{p(v)}{R} \qquad \text{per ogni } v \in E.$$

D'altronde $\gamma_D(x,av) = |a|\gamma_D(x,v)$ e $\gamma_D(x,v+v_1) \leq \gamma_D(x,v)+$ $+\gamma_{D_1}(x,v_1)$, perciò $\gamma_D(x,\cdot)$ è effettivamente una seminorma continua su E.

Sia ora D limitato. Allora per ogni seminorma continua p su E esiste un $R' > 0$ tale che $D \subset B_p(x,R')$ con $x \in D$, quindi per la proposizione 1.6.1 risulta

$$\gamma_D(x,v) \geq \gamma_{B_p(x,R')}(x,v) = \frac{p(v)}{R'} \quad \text{per ogni } v \in E .$$

D'altronde se p è tale che esiste un $R > 0$ per cui $B_p(x,R) \subset D$, allora vale

$$\gamma_D(x,v) \leq \frac{p(v)}{R} \qquad \text{per ogni } v \in E.$$

Perciò abbiamo

$$\frac{p(v)}{R'} \leq \gamma_D(x,v) \leq \frac{p(v)}{R} \quad \text{per ogni} \quad v \in E,$$

cioé $\gamma_D(x,\cdot)$ è una seminorma equivalente a p.

C.V.D.

§ 1.7. METRICHE INTERNE

Ricordiamo la nozione di metrica interna, rinviando per maggiori dettagli a W. Rinow [7].

Sia X uno spazio metrico connesso con una pseudo-distanza d. Data una curva $\sigma : [a,b] \longrightarrow X$, la sua lunghezza è per definizione

$$L(\sigma) = \sup \Sigma_j d(\sigma(t_{j-1}),\sigma(t_j))$$

dove l'estremo superiore è preso rispetto a tutte le suddivisioni di $[a,b]$.

La curva σ si dice rettificabile se $L(\sigma) < \infty$

Lo spazio X si dice finitamente connesso per archi se ogni coppia di punti può essere congiunto da una curva rettificabile.

Definiamo su X la pseudo-distanza d' indotta da d, mediante la

$$d'(x,y) = \inf L(\sigma)$$

dove l'estremo inferiore è preso rispetto a tutte le curve rettificabili che congiungono x e y.

Per la disuguaglianza triangolare è

$$d(x,y) \leq d'(x,y) .$$

Se

$$d(x,y) = d'(x,y) \qquad \text{per ogni} \quad x,y \in X,$$

d si dice pseudo-distanza interna.

LEMMA 1.7.1. *Sia* $\mathcal{D}$ *un dominio di* E *(oppure una varietà complessa connessa). La funzione* $\gamma_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \times E \to \mathbb{R}_+$ $(\gamma_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \times T(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}_+)$ *è localmente Lipschitziana.*

Dimostrazione. Omessa.

LEMMA 1.7.2. *Per un* $\mathcal{D}$ *come nel lemma precedente, la funzione* $\boldsymbol{K}_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \times E \to \mathbb{R}_+$ $(\boldsymbol{K} : \mathcal{D} \times T(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}_+)$ *è semicontinua superiormente.*

Dimostrazione. Omessa.

Per la dimostrazione del lemma 1.7.1 e del lemma 1.7.2 si rinvia il lettore a [14] .

Preso D come nei due lemmi precedenti, sia ℓ una curva differenziabile a tratti in D, e sia $\sigma : [a,b] \longrightarrow D$ una rappresentazione parametrica differenziabile a tratti di ℓ .

Per il lemma 1.7.1 possiamo definire la "lunghezza" di ℓ rispetto a γ_D con

$$L_\gamma(\ell) = \int_a^b \gamma_D(\sigma(t);\sigma'(t))\, dt \ .$$

Siccome $\gamma_D(x,av) = |a|\gamma_D(x,v)$, $L_\gamma(\ell)$ non dipende dalla rappresentazione parametrica differenziabile a tratti σ.

Il dominio D, essendo connesso e localmente connesso per archi, è connesso per archi. Quindi comunque prendiamo x e y in D, questi si possono congiungere con una curva differenziabile in D.

Per $x,y \in D$, definiamo

$$\tilde{C}_D(x,y) = \inf L_\gamma(\ell)$$

dove l'estremo inferiore è preso rispetto a tutte le curve differenziabili che congiungono x e y in D. Dalla continuità di γ_D(cfr. lemma 1.7.1) segue che ciò è lo stesso che fare l'estremo inferiore rispetto a tutte le curve differenziabili a tratti che congiungono x e y. Quindi $\tilde{C}_D$ è una pseudo-distanza.

Per $\xi_1,\xi_2 \in \Delta$, applicando la (1.6.3), abbiamo

$$\tilde{C}_\Delta(\xi_1,\xi_2) = \inf \int_a^b \gamma_\Delta(\sigma(t),\sigma'(t))dt = \inf \int_a^b < \sigma'(t) >_{\sigma(t)} dt = \omega(\xi_1,\xi_2),$$

ossia

$$\tilde{C}_\Delta(\xi_1,\xi_2) = \omega(\xi_1,\xi_2) = C_\Delta(\xi_1,\xi_2) \ .$$

Quindi per ogni $f \in Hol(D,\Delta)$ e per ogni curva differenziabile a tratti ℓ congiungente x e y in D, dalla proposizione 1.6.1, abbiamo

$$\omega(f(x),f(y)) = \tilde{C}_{\Delta}(f(x),f(y)) \leq \int_a^b \gamma_{\Delta}(f(\sigma(t)),f'(\sigma(t))\cdot\sigma'(t))dt \leq$$

$$\leq \int_a^b \gamma_D(\sigma(t),\sigma'(t))dt.$$ Prendendo l'estremo inferiore rispetto a tutte le curve differenziabili a tratti congiungenti x e y in D, si ha

$$\omega(f(x),f(y)) \leq \tilde{C}_D(x,y) \quad .$$

Prendendo ora l'estremo superiore rispetto a tutte le $f \in Hol(D,\Delta)$ si ha

$$C_D(x,y) \leq \tilde{C}_D(x,y) \quad .$$

Abbiamo visto che due punti x e y in D si possono congiungere con una curva differenziabile ℓ, espressa da una funzione differenziabile $\sigma : [a,b] \to D$. Per il lemma 1.7.2 possiamo definire la lunghezza di ℓ rispetto a K_D con

$$L_K(\ell) = \int_a^b K_D(\sigma(t),\sigma'(t))dt \ .$$

Siccome $K_D(x,av) = |a|K_D(x,v)$, $L_K(\ell)$ è indipendente dalla rappresentazione parametrica differenziabile σ.

Per $x,y \in D$ definiamo

$$\tilde{d}_D(x,y) = \inf L_{\mathbf{K}}(\ell)$$

dove l'estremo inferiore è preso rispetto a tutte le curve differenziabili che congiungono x e y in D. Dal lemma 1.6.4 segue che ciò è lo stesso che fare l'estremo inferiore rispetto a tutte le curve differenziabili a tratti congiungenti x e y in D. Quindi $\tilde{d}_D(x,y)$ è una pseudo-distanza.

Si dimostra (cfr. Teorema 7.4 di [14]) che

$$\tilde{d}_D(x,y) = d_D(x,y) \qquad \text{per ogni} \quad x,y \in D,$$

cioé la pseudo-distanza di Kobayashi è la forma integrata di $\mathbf{K}_D$.

Tale risultato mostra che d_D è una distanza interna se D è iperbolico.

C A P I T O L O II

DISTANZE INVARIANTI NEI CONI CONVESSI.

§ 2.1. DISTANZE "TIPO-KOBAYASHI" E "TIPO-CARATHEODORY" .

Le estensioni delle distanze di Carathéodory e di Kobayashi, possono essere "schematizzate" come segue:
Per definire distanze "tipo-kobayashi" o "tipo-carathéodory" su un insieme Ω , è necessario disporre anzitutto di:

i) Uno spazio metrico Δ con distanza d_Δ , per il quale sia assegnato un semigruppo S_Δ di applicazioni $\Delta \to \Delta$ (per l'operazione di composizione di funzioni) dotato di identità, e per il quale valga un "lemma di Schwarz":

Per ogni $f \in S_\Delta$, risulta $d_\Delta(f(t_1),f(t_2)) \leq d_\Delta(t_1,t_2)$

per ogni $t_1 t_2 \in \Delta$.

Sono dati inoltre:

ii) Una famiglia A di applicazioni $f : \Delta \to \Omega$ con le quali si possono realizzare "catene analitiche" cioé:

dati $x,y \in \Omega$, esistono $\nu \in \mathbb{N}$, $t_1',t_1'' \ldots t_\nu',t_\nu'' \in \Delta$, $f_1 \ldots f_\nu \in A$

con $f_1(t_1') = x$, $f_j(t_j'') = f_{j+1}(t_{j+1}')$ $(j = 1,\ldots,\nu-1)$, $f_\nu(t_\nu'') = y$.

La famiglia A deve essere invariante per composizione a sinistra con gli elementi di S_Δ .

iii) Una famiglia B di applicazioni $h : \Omega \to \Delta$, invarianti per composizione a destra con gli elementi di S_Δ .

iv) Un semigruppo S_Ω con identità di applicazioni

$g : \Omega \to \Omega$ tale che per ogni $g \in S_\Omega$, $h \in B$, $f \in A$: $h \circ g \circ f \in S_\Delta$.

In queste ipotesi si definiscono una pseudo-distanza "tipo Kobayashi" d_Ω e una pseudo-distanza "tipo Carathéodory" C_Ω in Ω, le quali verificano le proprietà:

I) $C_\Omega(x,y) \leq d_\Omega(x,y)$ per ogni $x,y \in \Omega$, per ogni $g \in S_\Omega$.

II) $d_\Omega(g(x),g(y)) \leq d_\Omega(x,y)$ per ogni $x,y \in \Omega$ e per ogni $g \in S_\Omega$,

$C_\Omega(g(x),g(y)) \leq C_\Omega(x,y)$ per ogni $x,y \in \Omega$ e per ogni $g \in S_\Omega$.

III) $d_\Omega(f(t_1),f(t_2)) \leq d_\Delta(t_1,t_2)$ per ogni $f \in A$ e per ogni $t_1,t_2 \in \Delta$,

$C_\Delta(h(x),h(y)) \leq C_\Omega(x,y)$ per ogni $h \in B$ e per ogni $x,y \in \Omega$.

IV) Se $\Omega = \Delta$ C_Ω e d_Ω coincidono con d_Δ.

Discuteremo un esempio, costruendo delle metriche invarianti in coni convessi Ω.

Sia $\Delta = \mathbb{R}_+^*$ il gruppo moltiplicativo dei numeri reali positivi, con la misura di Haar $t^{-1}dt$.

Per ogni $t_1,t_2 \in \mathbb{R}_+^*$ definiamo distanza $\sigma(t_1,t_2)$ la misura dell'intervallo determinato da t_1 e t_2, cioé

$$\sigma(t_1,t_2) = \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{t} \right| = \left| \log \frac{t_2}{t_1} \right| . \qquad (2.1.1)$$

LEMMA 2.1.1.("Lemma di Schwarz"). *Per ogni applicazione affine* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tale che* $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$ *e per ogni* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+^*$, *si ha:*

$$\sigma(f(t_1), f(t_2)) \leq \sigma(t_1, t_2) .$$

Se f *è una traslazione del gruppo moltiplicativo* $\mathbb{R}_+^*$ *vale il segno di uguaglianza identicamente. Se vale il segno di uguaglianza per una coppia* t_1, t_2 *di punti distinti,* f *è una traslazione.*

Dimostrazione. Una funzione affine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che applica $\mathbb{R}_+^*$ in $\mathbb{R}_+^*$ è del tipo $f(t) = \alpha t + \beta$ con $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$.

Supponiamo $t_2 > t_1$, allora

$$\frac{t_2}{t_1} - \frac{f(t_2)}{f(t_1)} = \frac{\beta(t_2 - t_1)}{t_1(\alpha\, t_1 + \beta)} \geq 0 .$$

Poiché log è una funzione crescente segue che $\sigma(f(t_2), f(t_1)) \leq$ $\leq \sigma(t_2, t_1)$. Se f è una traslazione nel gruppo $\mathbb{R}_+^*$, allora $\beta = 0$ e quindi $\sigma(f(t_2), f(t_1)) = \sigma(t_2, t_1)$.

Viceversa se vale l'uguaglianza per due punti t_1, t_2, $t_1 \neq t_2$, è $\beta = 0$ e quindi f è una traslazione.

C.V.D.

Sia E uno spazio vettoriale reale localmente convesso di Hausdorff, e Ω un cono (i.e. se $x \in \Omega$ allora $t\,x \in \Omega$ per ogni $t > 0$) convesso aperto di E, $\Omega \neq \{0\}$.

Sia $A = \{f \in Aff(\mathbb{R},E) : f(\mathbb{R}_+^*) \subset \Omega\}$, cioé

$$A = \{f : f(t) = tv + w \quad \text{con} \quad v,w \in E \quad \text{tale che}$$
$$f(t) \in \Omega \quad \text{per} \quad t > 0\} .$$

Vale la condizione ii), cioé due qualunque punti x,y in Ω possono congiungersi con una "catena affine".

Usando le stesse notazioni di ii), definiamo una pseudo-distanza "tipo-kobayashi" con

$$d_\Omega(x,y) = \inf\{\sigma(t_1',t_1'')+ \ldots + \sigma(t_\nu',t_\nu'')\} \quad \text{per ogni } x,y \in \Omega$$

dove l'estremo inferiore è preso su tutte le possibili scelte

di ν, t_1',t_1'', $\ldots,t_\nu',t_\nu''$, $f_1 \ldots f_\nu$.

Sia $B = \{h \in Aff(E,\mathbb{R}) : h$ continua, $h(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*\}$.

Definiamo una pseudo-distanza "tipo-Carathéodory" con

$$C_\Omega(x,y) = \sup\{\sigma(h(x),h(y)) : h \in B\} \quad \text{per ogni} \quad x,y \in \Omega.$$

Naturalmente C_Ω è una pseudo-distanza se $C_\Omega(x,y) < \infty$ per ogni $x,y, \in \Omega$.

<u>OSSERVAZIONE 1</u>. Il cono convesso Ω, essendo aperto, verifica la seguente condizione:

Se $x \in \Omega$, e se r è una retta affine di E tale che $x \in r$ e $r \cap \Omega$ contenga una semiretta, allora c'è una semiretta r_x contenuta in $r \cap \Omega$ e contenente x nel suo interno.

PROPOSIZIONE 2.1.1. *Risulta* $d_{\mathbb{R}_+^*} = \sigma$

Dimostrazione. Preso $\Omega = \mathbb{R}_+^*$, utilizzando le notazioni della definizione di d_Ω, dal lemma 2.1.1 e dalla disuguaglianza triangolare segue:

$$\sum_{j=1}^{\nu} \sigma(t_j', t_j'') \geq \sum_{j=1}^{\nu} \sigma(f_j(t_j'), f_j(t_j'')) \geq \sigma(f_1(t_1'), f_\nu(t_\nu'')) = \sigma(x,y) .$$

Quindi $d_{\mathbb{R}_+^*}(x,y) \geq \sigma(x,y)$ per ogni $x,y \in \mathbb{R}_+^*$.

D'altro canto scegliendo nella definizione di $d_\Omega(x,y)$, $\nu = 1$, $t_1' = x$, $t_1'' = y$, $f_1(t) = t$, abbiamo

$$d_{\mathbb{R}_+^*}(x,y) \leq \sigma(x,y) \qquad \text{per ogni } x,y \in \mathbb{R}_+^* .$$

C.V.D.

LEMMA 2.1.2. C_Ω *è una pseudo-distanza e inoltre*

$C_\Omega(x,y) \leq d_\Omega(x,y)$ *per ogni* $x,y \in \Omega$.

Dimostrazione.Utilizzando le stesse notazioni delle definizioni di d_Ω e C_Ω, per ogni $h \in B$, $h \circ f_j$ è una funzione affine di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che applica $\mathbb{R}_+^*$ in $\mathbb{R}_+^*$. Quindi dal lemma 2.1.1. segue : $\sigma(h \circ f_j(t_j'), h \circ f_j(t_j'')) \leq \sigma(t_j', t_j'')$ per $j = 1 \dots \nu$.

D'altronde dalla disuguaglianza triangolare segue:

$$\sum_{j=1}^{\nu}\sigma(t_j',t_j'') \geq \sum_{j=1}^{\nu}\sigma(h\circ f_j(t_j'),h\circ f_j(t_j'')) \geq \sigma(h\circ f_1(t_1'),h\circ f_\nu(t_\nu'')) =$$

$= \sigma(h(x),h(y))$, pertanto $d_\Omega(x,y) \geq \sigma(h(x),h(y))$.

Prendendo l'estremo superiore rispetto a tutte le $h \in B$, abbiamo

$$d_\Omega(x,y) \geq C_\Omega(x,y) \qquad \text{per ogni } x,y \in \Omega.$$

C.V.D.

PROPOSIZIONE 2.1.2. *Risulta*

$$C_{\mathbb{R}_+^*} = \sigma = d_{\mathbb{R}_+^*} \quad .$$

Dimostrazione. Preso $\Omega = \mathbb{R}_+^*$, l'applicazione identica di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un elemento di B. Quindi dalla definizione di C_Ω segue che

$$C_{\mathbb{R}_+^*}(x,y) \geq \sigma(x,y) \qquad \text{per ogni } x,y \in \mathbb{R}_+^* \quad .$$

D'altro canto, dalla proposizione 2.1.1 e dal lemma 2.1.2, abbiamo

$$C_{\mathbb{R}_+^*}(x,y) \leq d_{\mathbb{R}_+^*}(x,y) = \sigma(x,y) \quad \text{per ogni } x,y \in \mathbb{R}_+^* \ .$$

Pertanto $\quad C_{\mathbb{R}_+^*}(x,y) = d_{\mathbb{R}_+^*}(x,y) = \sigma(x,y) \quad$ per ogni $x,y \in \mathbb{R}_+^*$

C.V.D.

PROPOSIZIONE 2.1.3. *Sia* Ω_j *un cono convesso aperto in* E_j *(spazio vettoriale reale localmente convesso di Hausdorff) con* $j = 1,2$, *se* F *è una applicazione affine continua di* $E_1 \to E_2$ *con* $F(\Omega_1) \subset \Omega_2$, *allora risulta*

$$d_{\Omega_1}(x,y) \geq d_{\Omega_2}(F(x),F(y))$$

per ogni $x,y \in \Omega$.

$$C_{\Omega_1}(x,y) \geq C_{\Omega_2}(F(x),F(y))$$

In particolare gli automorfismi affini continui di Ω *sono isometrie per* d_Ω *e* C_Ω .

Dimostrazione. Segue banalmente dalle definizioni di d_Ω e C_Ω (stesso discorso fatto per i lemmi 1.4.1 e 1.4.3).

OSSERVAZIONE 2. Osserviamo che il lemma 2.1.2 è la proprietà I), la proposizione 2.1.2 è la proprietà IV), la proposizione 2.1.3 è la proprietà II). Per la proprietà III):

$$d_\Omega(f(t_1),\ f(t_2)) \leq \sigma(t_1,t_2) \qquad \text{per ogni } f \in A \text{ e per ogni } t_1,t_2 \in \mathbb{R}_+^*,$$

segue dalla definizione di d_Ω;

$$\sigma(h(x),h(y)) \leq C_\Omega(x,y) \qquad \text{per ogni } h \in B \text{ e per ogni } x,y \in \Omega,$$

segue dalla definizione di C_Ω .

ESEMPIO 2.1.1. Se $\Omega = \mathbb{R} = E$, abbiamo

$$d_{\mathbb{R}}(x,y) = 0 \qquad \text{e quindi } C_{\mathbb{R}}(x,y) = 0 \text{ per ogni } x,y \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Siano $x,y \in \mathbb{R}$. Per ogni $t_1,t_2 \in \mathbb{R}_+^*$, con $t_1 \neq t_2$, esiste una funzione affine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(t_1) = x$ e $f(t_2) = y$.

Pertanto $d_{\mathbb{R}}(x,y) = d_{\mathbb{R}}(f(t_1),f(t_2)) \leq \sigma(t_1,t_2) = \left|\log \frac{t_2}{t_1}\right|$,

ma $\left|\log \frac{t_2}{t_1}\right|$ tende a zero quando t_2 tende a t_1 , quindi $d_{\mathbb{R}}(x,y) = 0$ per ogni $x,y \in \mathbb{R}$.

C.V.D.

ESEMPIO 2.1.2. (cfr. [15])

Sia $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Per ogni $x = (x_1,x_2)$ e $y = (y_1,y_2)$ in Ω , $x \neq y$, abbiamo :

$$C_\Omega(x,y) = \max\{\sigma(x_1,y_1),\sigma(x_2,y_2)\} ,$$

$d_\Omega(x,y) = \max\{\sigma(x_1,y_1),\sigma(x_2,y_2)\}$ se la retta individuata da x e y incontra Ω in una semiretta,

$d_\Omega(x,y) = \sigma(x_1,y_1) + \sigma(x_2,y_2)$ se la retta individuata da x e y incontra Ω in un segmento finito.

ESEMPIO 2.1.3. Se $\Omega = E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, risulta $d_{\mathbb{R}^2}(x,y) = 0$ e quindi $C_{\mathbb{R}^2}(x,y) = 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Siano $x = (x_1,x_2)$ e $y = (y_1,y_2)$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Siano F_1 e F_2 applicazioni lineari continue di $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definite dalle

$$F_1 : z \to (z, x_2) \quad \text{e} \quad F_2 : z \to (y_1,z) .$$

Applicando la disuguaglianza triangolare, la proposizione 2.1.3 e l'esempio 2.1.1, abbiamo

$$d_{\mathbb{R}^2}((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \leq d_{\mathbb{R}^2}((x_1,x_2),(y_1,x_2)) + d_{\mathbb{R}^2}((y_1,x_2),(y_1,y_2)) =$$

$$= d_{\mathbb{R}^2}(F_1(x_1),F_1(y_1)) + d_{\mathbb{R}^2}(F_2(x_2),F_2(y_2)) \leq d_{\mathbb{R}}(x_1,y_1)$$

$$+ d_{\mathbb{R}}(x_2,y_2) = 0 + 0 = 0 \ .$$

Quindi $d_{\mathbb{R}^2}(x,y) = 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

C.V.D.

Più in generale, per ogni spazio localmente convesso e di Hausdorff E, abbiamo (cfr. [15])

$$C_E = d_E = 0 \quad .$$

§ 2.2. APPLICAZIONI.

DEFINIZIONE 2.2.1. Il cono Ω dicesi regolare se la sua chiusura $\bar{\Omega}$ non contiene rette.

Valgono inoltre i risultati seguenti.

PROPOSIZIONE 2.2.1. (cfr. [15])

Se il cono convesso aperto Ω è regolare allora C_Ω e d_Ω sono distanze. Viceversa se C_Ω (o d_Ω) è una distanza, allora Ω è regolare.

PROPOSIZIONE 2.2.2.(cfr. [3]) .

La topologia relativa di Ω in E è equivalente alla topologia definita da C_Ω o d_Ω , se, e soltanto se, tutte le sezioni piane di

Ω *hanno aperture uniformemente limitate cioé se, per ogni* $x \in \Omega$ *ed ogni seminorma continua* p *su* Ω *esiste una costante* $k > 0$ *tale che* $\{y \in E : p(x-y) = k\} \not\subset \Omega$.

IL CONO DEGLI ELEMENTI HERMITIANI POSITIVI.

Sia A un'algebra di Banach complessa con elemento identico e, cioé A è un'algebra complessa in cui è definita una norma $\|\ \|$ rispetto alla quale A è di Banach ed inoltre è verificata la proprietà $\|x\cdot y\| \leq \|x\|\cdot\|y\|$ per ogni $x,y \in A$.

Ricordiamo che per ogni $x \in A$ lo spettro di x, Spx, è l'insieme $\{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e$ non è invertibile$\}$.

Supponiamo ancora che in A sia definita una involuzione continua $*$ rispetto alla quale A sia simmetrica, cioé sia definita una applicazione $* : x \longmapsto x^*$ continua di A in A tale che:

(a) $(x^*)^* = x$, $(x+y)^* = x^*+y^*$, $(\lambda x)^* = \bar{\lambda}\, x^*$,

$(xy)^* = y^*x^*$, per ogni $x,y \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$;

(b) ogni elemento della forma $e + x^*x$ è invertibile.

Siccome A ammette l'elemento identico, allora x è invertibile se, e solo se, x^* invertibile e $(x^{-1})^* = (x^*)^{-1}$.

Poiché $(x-\lambda e)^* = x^*-\bar{\lambda}e$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, si deduce che $Spx^* = \overline{Spx}$

Questo fatto implica che l'involuzione $*$ è hermitiana, cioé ogni elemento hermitiano di A($h\in A$, h hermitiano $\overset{def}{\Longleftrightarrow} h^*=h$)ha uno spettro reale.

Sia $E = H_A$ il sottospazio reale di tutti gli elementi hermitiani di A. H_A è un sottospazio chiuso di A in quanto l'involuzione $*$ è continua.

Un elemento $h \in H_A$ è detto positivo, " $h \geq 0$" se $Sph \subset \mathbb{R}_+$.

Sia Ω_o il cono degli elenti hermitiani positivi di H_A. Essendo A simmetrica se $h \geq 0$, $k \geq 0$ allora (cfr. [6] lemma 4.7.10 pag. 234) $h + k \geq 0$. Quindi il cono Ω_o è convesso.

Sia Ω la parte interna di Ω_o per la topologia in H_A. Facciamo vedere che Ω è il cono convesso aperto degli elementi hermitiani strettamente positivi. Intanto se $h \in \Omega_o$ con $0 \in Sph$ allora $h \notin \Omega$; infatti siccome $y_n = h - \frac{1}{n}e \notin \Omega_o$ per ogni intero $n > 0$, segue che non esiste un intorno di $h = \lim y_n$ contenuto in Ω_o . Sia ora $h \in \Omega_o$ con $0 \notin Sph$, siccome l'applicazione $x \longmapsto Spx$ (cfr. [6] pag. 35-36) è semi-continua superiormente, allora esiste un intorno $I(h)$ di h in H_A tale che per ogni $k \in I(h)$: $Spk > 0$, cioé h è interno a Ω_o .

Quindi $\Omega = \{h \in H_A : Sph \subset \mathbb{R}_+^*\}$.

Dato $x \in \Omega$, sia $x^{\frac{1}{2}}$ la sua radice quadrata positiva.

Lo $Sp\, x^{\frac{1}{2}}$ è l'immagine di $Sp\, x$ per l'applicazione $t \longmapsto \sqrt{t}$.

Quindi $x^{\frac{1}{2}} \in \Omega$, e $x^{\frac{1}{2}}$ è invertibile.

Indichiamo l'inverso di $x^{\frac{1}{2}}$ con $x^{-\frac{1}{2}}$: $x^{-\frac{1}{2}} = (x^{\frac{1}{2}})^{-1}$.

L'automorfismo lineare $Tx : z \longmapsto x^{-\frac{1}{2}} z x^{-\frac{1}{2}}$ $(x \in \Omega)$ di A in A, applica H_A in sé. Per $y \in \Omega$, essendo $Tx(y) = x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} =$

$=(y^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}})^*(y^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}})$ segue (cfr. 6 pag. 233) che $Tx(y) \geq 0$.

Inoltre essendo y invertibile, anche $Tx(y)$ è invertibile, per cui $Tx(y) \in \Omega$. Quindi Tx applica Ω in sé, ed essendo $Tx(e) = e$ possiamo affermare che il gruppo $\{Tx : x \in \Omega\}$ opera transitivamente su Ω. Perciò Ω è omogeneo-affine.

Si dimostra che la distanza "tipo Carathéodory" C_Ω è data dalla

$$C_\Omega(x,y) = \max\{\log \rho(x^{-1}y) , \log(xy^{-1})\} \qquad (x,y \in \Omega) , \qquad (2.2.1)$$

dove ρ è il raggio spettrale in A. La dimostrazione richiede considerazioni delicate sugli stati di A. Per essa rinviamo a [15].

TEOREMA 2.2.1 *Il cono* $\Omega = \{h \in H_A : Sph \subset R_+^*\}$ *è regolare se e solo se* A *non contiene elementi hermitiani quasi-nilpotenti diversi da quello banale.*

Dimostrazione. Dalla (2.2.1) si vede che C_Ω è invariante rispetto all'applicazione $x \longmapsto x^{-1}$ di Ω su di sé. D'altronde sempre dalla (2.2.1)

$C_\Omega(e,h) = 0$ se, e solo se, $Sph = \{1\}$. Ma se $Sph = \{1\}$, allora $h = \exp x$ con x elemento hermitiano, quasi-nilpotente (i.e. $\rho(x) = 0$). Pertanto il teorema 2.2.1 segue dalla proposizione 2.2.1.

C.V.D.

Supponiamo ora che A sia un'algebra C^* con identità. L'algebra A non contiene elementi hermitiani quasi-nilpotenti diversi da quello banale, pertanto dal teorema 2.2.1 segue che Ω è regolare. Inoltre per ogni elemento hermitiano h : $\rho(h) = ||h||$.

Per $x,y \in \Omega$, $x^{-\frac{1}{2}}yx^{-\frac{1}{2}}$ e $y^{-\frac{1}{2}}\, x\, y^{-\frac{1}{2}}$ sono hermitiani, perciò

$$||x^{-\frac{1}{2}}\, y\, x^{-\frac{1}{2}}|| = \rho(x^{-\frac{1}{2}}\, y\, x^{-\frac{1}{2}}) = \rho(x^{-1}y)$$

$$||y^{-\frac{1}{2}}\, x\, y^{-\frac{1}{2}}|| = \rho(y^{-\frac{1}{2}}\, x\, y^{-\frac{1}{2}}) = \rho(y^{-1}\, x) \;,$$

e dalla (2.2.1)

$$C_\Omega(x,y) = \max\{\log||x^{-\frac{1}{2}}\, y\, x^{-\frac{1}{2}}||, \log||y^{-\frac{1}{2}}\, x\, y^{-\frac{1}{2}}||\} \qquad (2.2.2)$$

Ne segue (cfr. [15] pag.686-687) che la $||\;||$-topologia e la C_Ω-topologia coincidono in Ω. In definitiva vale la

PROPOSIZIONE 2.2.3. *Se* A *è una algebra* C^* *con identità, allora* C_Ω *è definita dalla* (2.2.2), Ω *è regolare, e la topologia definita da* C_Ω *è equivalente alla topologia relativa. Quindi* Ω *ha sezioni piane di apertura uniformemente limitate.*

Sia ε uno spazio di Hilbert complesso, $\mathcal{L}(\varepsilon)$ l'algebra degli operatori lineari continui di ε in sé.

L'algebra $\mathcal{L}(\varepsilon)$ è un'algebra C^*. Anzi, ogni algebra C^* è isomorfa ad una sottoalgebra autoaggiunta di $\mathcal{L}(\varepsilon)$ chiusa per la topologia definita dalla norma.

Una sottoalgebra autoaggiunta di $\mathcal{L}(\varepsilon)$, contenente l'elemento identico e chiusa per la topologia debole degli operatori, è un'algebra di Von

Neumann.

Una definizione equivalente di algebra di Von Neumann è la seguente. Sia A un'algebra C^*. Se lo spazio di Banach A è duale di uno spazio di Banach, A è un'algebra di Von Neumann.

Sia quindi A un'algebra di Von Neumann di operatori lineari limitati di ε in sé. Indichiamo con $(,)$ il prodotto scalare di ε.

Per ogni $h \in H_A$ è (cfr. [15]) :

$$\rho(h) = ||h|| = ||h^{\frac{1}{2}}||^2 = \mathrm{Sup}\{||h^{\frac{1}{2}}\xi||^2 : \xi \in \varepsilon, (\xi,\xi) = 1\}$$

$$= \mathrm{Sup}\{(h\xi,\xi) : \xi \in \varepsilon \ , \ (\xi,\xi) = 1\}$$

$$C_\Omega(e,h) = \mathrm{Sup}\{(\log(h\xi,\xi)) : \xi \in \varepsilon, \ (\xi,\xi) = 1\}$$

$$C_\Omega(x,y) = \mathrm{Sup}\{\sigma((x\xi,\xi),(y\xi,\xi)) : \xi \in \varepsilon \ , \ (\xi,\xi) = 1\} \qquad (2.2.3)$$

Utilizzando queste formule si provano i teoremi:

Teorema 2.2.2 (cfr. [15])

Se A è un'algebra di Von-Neumann la metrica C_Ω, definita dalla (2.2.3), è completa su Ω.

Teorema 2.2.3 (cfr. [15])

Sia A un'algebra di Von-Neumann. Siano V_1 e V_2 due sottoinsieme limitati di Ω. L'insieme delle applicazioni lineari limitate T di H_A in sé tale che $T(\Omega) \subset \Omega$ e $T(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$, è uniformemente limitato in norma.

B I B L I O G R A F I A

[1] T.J.BARTH, *The kobayashi distance induces the standard topology*, Proc. Amer. Math. Soc. 35 (1972) pp. 439-441.

[2] L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, Vol. I, Parte II, Zanichelli, Bologna, 1927; Cap. XIV, pp. 607-653

[3] T. FRANZONI, *Some properties of invariant distances on convex cones*, Proc. of the Conference on complex analysis, Cortona, 1977(in corso di stampa).

[4] S. KOBAYASHI, *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings, Dekker*, New York, 1970

[5] S. KOBAYASHI, *Intrinsic distances, measures and geometric function theory*, Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1975), pp. 357-416.

[6] C.E.RICKART, *General theory of Banach algebras*, New York, Van Nostrand, 1960

[7] W. RINOW, *Die innere Geometric der metrischen Râume*, Springer-Verlag, Berlin, 1961

[8] H. L. ROYDEN, *Remarks on the Kobayashi metric*, Several complex variables,II (Proc. Internat.Conf. University of Maryland, College Park, Md. 1970) Lecture Notes in Math., Vol. 185, Springer-Verlag, Berlin, 1971,pp.125-137.

[9] W. RUDIN, *Real and complex analysis*, Mc Graw Hill series in higher mathematics.

[10] S. SAKAI, *C^*-algebras and W^*-algebras*, Heidelberg, Springer-Verlag, 1971.

[11] G. SANSONE, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa*, Vol.II, CEDAM, Padova;(1947;Cap.X § 1 pp.256-299.

[12] I.M.SINGER-J.A.THORPE, *Lecture notes on elementary topology and geometry*. Scott. Foresman and Company, Dallas, Glenview 1967.

[13] E. VESENTINI, *Variations on a theme of Carathēodory*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (in corso di stampa).

[14] E. VESENTINI, *Invariant distances and invariant differential metrics in locally convex spaces*, Proc. of Banach Center-Varsavia (in corso di stampa).

[15] E. VESENTINI, *Invariant metrics on convex cones*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, serie IV - vol.III, n.4 (1976) pp.671-696.

[16] J.P. VIGUE, *Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espaces de Banach complexe. Application aux domaines bornés symétriques*. Ann.Sci.Ec.Norm. Sup.,(4) 9 (1976),pp. 203-282.