ORBITE PERIODICHE, PERTURBAZIONI, RISONANZE.

ELEMENTI DI STORIA INTERNA ED ESTERNA DELLA MECCANICA CELESTE

di

Andrea Milani

Istituto Matematico dell'Università di Pisa

Marzo 1978

§ 0. PREMESSA.

Questa esposizione parte da due esigenze in contraddizione tra loro: quella di esporre rapidamente i contenuti di una teoria complessa come la meccanica celeste, tanto da consentire ad un pubblico non specialistico di apprezzare i risultati ed i problemi della ricerca contemporanea; e quella di riflettere sull'evoluzione storica della teoria, non solo nella sua logica deduttiva "interna" ma anche nei suoi rapporti con le visioni del mondo e con la tecnologia disponibile per la ricerca sperimentale.

Queste due esigenze non possono portare ad una sintesi piena, per ragioni di organizzazione del lavoro intellettuale abbastanza evidenti: io sono un matematico e non uno storico, non nel senso che non voglio sapere di storia ma nel senso che non ho, e non posso avere da solo, gli strumenti tecnici e la preparazione metodologica che rendono scientifico lo studio della storia. Per esempio non ho facile accesso a biblioteche in cui trovare i testi originali, se li trovassi con i miei ricordi liceali di latino e greco non riuscirei neppure a leggerli, e in definitiva non ho neppure il tempo di fondare le mie affermazioni "storiche" su di una documentazione di prima mano.

Perciò queste sono soltanto le riflessioni di un matematico sulla storia di ciò che studia, sono più che altro dei problemi aperti, delle domande e delle provocazioni sulla storia della matematica e della fisica a cui dovrebbe rispondere un'indagine storica approfondita. D'altro canto se l'indagine storica non utilizza gli strumenti più potenti della matematica moderna per semplificare l'esposizione, è inevitabile che si perda il senso complessivo dello sviluppo storico; questo per lo meno in un caso, come quello della meccanica celeste, in cui la mole dei lavori antichi (e anche ottocenteschi) è spaventosa.

Perciò sarà raccontata qui una storia che, almeno quanto a linguaggio, è basata sul senno di poi: spetta a chi ascolta non dimenticare che i metodi moderni consentono di far fare "corto circuito" a procedimenti che sono costati fatiche immani ai loro primi scopritori.

§ 1. CINEMATICA CELESTE E MOTI QUASI-PERIODICI.

Il problema matematico dell'astronomia antica è posto da *Platone* con queste parole: "Le stelle, rappresentando oggetti eterni, divini ed immutabili, si muovono con velocità uniforme attorno alla terra, come noi possiamo constatare, e descrivono la più regolare e perfetta di tutte le traiettorie, quella della circonferenza senza fine. Ma alcuni oggetti celesti, cioé il sole, la luna, i pianeti, vagano attraverso il cielo e seguono cammini complessi, con inclusione anche di moti retrogradi. Tuttavia, essendo corpi celesti, anche essi devono muoversi in maniera conforme al loro rango elevato: i loro moti devono perciò derivare da una qualche combinazione di cerchi perfetti, dal momento che non descrivono esattamente cerchi perfetti. Quali sono le combinazioni di moti circolari con velocità uniforme che possono spiegare così peculiari variazioni in un insieme coerente di moti regolari nel cielo?"

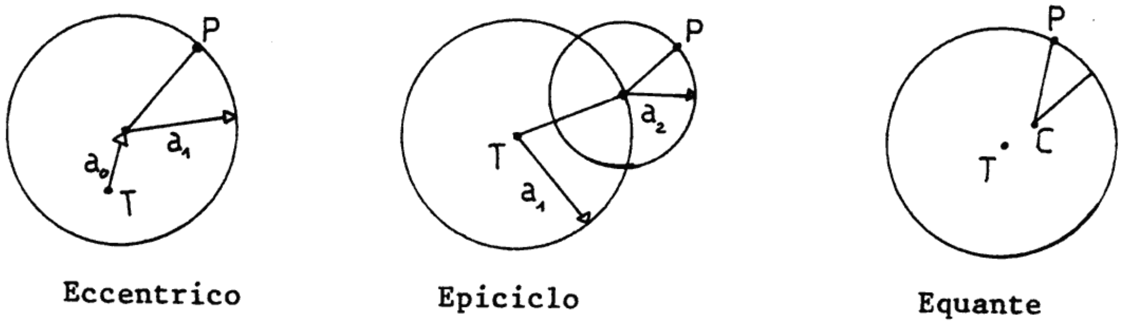
Gli astronomi greci seguirono alla lettera questo programma; supponiamo cioè che $z(t)$ sia una funzione che esprime qualche coordinata di un corpo celeste (per esempio, riducendoci al caso piano, $z(t) = x(t) + iy(t)$ possono essere le coordinate cartesiane del pianeta nel piano con la terra all'origine degli assi); allora essa dovrà esprimersi mediante uno sviluppo in somma di Fourier:

(1) $z(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\omega_j t}$ Caso particolare di quello che in termini moderni si chiama una "*funzione condizionalmente periodica*",

$z: R \longrightarrow C$ con "*frequenze*" $\omega_1 \dots \omega_n$.

Ipparco per primo introdusse un *eccentrico*, cioè uno sviluppo $a_0 + a_1 e^{i\omega t}$ con due termini di cui una costante, per eliminare l'uso di funzioni non trigonometriche comune nelle tavole degli astronomi babilonesi. *Tolomeo* fondò la sua teoria, rimasta d'avanguardia per secoli, sull'uso di *epicicli* cioè della formula (1) con almeno due frequenze ω_1 , ω_2 indipendenti (ma anche di più: Tolomeo usa per i sette corpi celesti "non fissi" più di 50 termini $e^{i\omega t}$), in questo modo la posizione dei pianeti sul cielo poteva essere predetta per un periodo di molti anni e con un errore inferiore ai 2° (la teoria di Tolomeo era tridimensionale, cioé i cerchi non giacevano tutti su di un piano e gli a_j erano dei vettori di R^3).

Fig.1:



Tuttavia nella formulazione di questa teoria Tolomeo fece anche uso di *equanti* , cioé di velocità angolari non costanti rispetto al centro del cerchio ma rispetto ad un altro punto eccentrico, e l'uso degli equanti parve a *Copernico* "né sufficientemente assoluto né sufficientemente ben accetto alla mente". Copernico tornò perciò agli sviluppi in funzioni trigonometriche con funzioni di fase $f_j(t) = \omega_j t$ lineari;

egli però osservò che nello sviluppo di tutti i pianeti e del sole compariva un termine con la stessa frequenza $\omega_1 = n$ moto medio del sole; e poichè

$$(2) \qquad a_1 e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{i\omega_2 t} = a_2 e^{i\omega_2 t} + a_1 e^{i\omega_1 t}$$

niente impedisce di scambiare tra loro il *deferente* $a_1 e^{i\omega_1 t}$ con *l'epiciclo* $a_2 e^{i\omega_2 t}$ e di supporre che il termine con frequenza $\omega_1 = n$ sia il deferente per tutti i pianeti.

Ora Copernico scoprì che si poteva supporre che non solo il primo termine fosse di frequenza $\omega_1 = n$ per tutti i pianeti, ma che anche il coefficiente a_1 poteva essere lo stesso. In effetti, se le osservazioni sono puramente misure angolari dalla terra e non misure di distanza (come le osservazioni astronomiche sono rimaste fino al 1960 circa), e il punto di osservazione è l'origine, ciò che si osserva è (nel nostro modello semplificato piano) soltanto $\arg z(t)$ e pertanto poichè

$$(3) \qquad \arg z(t) = \arg \sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\omega_j t} = \arg \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{r} e^{i\omega_j t} \qquad r \in \mathbb{R}, r > 0$$

ciò che si misura è soltanto il rapporto tra i raggi del deferente e degli epicicli di un pianeta $\left|\frac{a_1}{a_j}\right|$. Ma se il punto di osservazione è la terra che ruota lungo $a_1 e^{i\omega_1 t}$, allora $\arg[z(t)-a_1 e^{i\omega_1 t}]$ consente di misurare il rapporto di tutti i deferenti e gli epicicli di tutti i pianeti rispetto ad $|a_1| = 1$ unità astronomica. Perciò Copernico fissò i valori dei raggi delle orbite dei pianeti nel sistema eliocentrico, e i valori dei raggi dei relativi epicicli. Tuttavia il sistema di Copernico non portò ad una precisione di previsione superiore a quella di

Tolomeo. Perciò quando il re di Danimarca finanziò il primo grande centro di ricerca astronomica della storia, il castello-osservatorio di Uraniborg diretto da *Tycho Brahe*, e grazie agli studi di Tycho la precisione delle osservazioni astronomiche fatta con grandi strumenti fissi arrivò ad un margine di errore inferiore ai 2' , la teoria di Copernico e quella di Tolomeo assieme furono messe in crisi malgrado ogni tentativo di perfezionarle da un'inspiegabile "*diseguaglianza*" di 8' nella longitudine della posizione di Marte, rilevato dall'assistente di Tycho, *Keplero*.

Di regola, questa parte della storia è esclusa dai trattati moderni di meccanica celeste, perchè - dicono alcuni - l'astronomia antica e medioevale fino a Newton è *puramente cinematica*, cioè descrive il moto e non ne "spiega" la fisica. Io non concordo con questa affermazione. L'astronomia antica è *empirica* ed *operativa*, nel senso che cerca di *descrivere* il moto come è verificato dall'esperienza di osservazioni fatte su di un lungo arco di tempo, e di *predire* la posizione futura dei pianeti, del sole e della luna, é perciò una *teoria fisica completa* nello stesso senso in cui lo è la moderna teoria delle particelle elementari.

Certo l'osservazione di Platone che le funzioni dell'astronomia debbono essere condizionalmente periodiche (come nella (1)) è "metafisica". In realtà è un dato empirico che le posizioni degli astri siano *quasi-periodiche nel senso di Bohr*: una funzione continua $f(t)$ si dice quasi- periodica se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $L(\varepsilon)$ tale che in ogni intervallo di $\mathbb{R}$ della forma $(a,a + L(\varepsilon))$ esiste un numero τ tale che :

$$(4) \qquad |f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R} .$$

Ossia le posizioni degli astri non sono periodiche ma hanno degli ε - quasi periodi τ soddisfacenti la (4) per ε arbitrariamente piccolo.

Bene, *ogni funzione quasi-periodica può essere approssimata uniformemente (cioè in norma C^0) da funzioni della forma (1) (Teorema di Bohr 1926)*. Questo è un risultato matematico profondo, che si può far discendere dalla teoria delle rappresentazioni di gruppi (misura di Haar, teorema di Peter-Weyl). E' chiaro che l'osservazione di Platone, condivisa dagli astronomi antichi, sui moti circolari ha motivazioni metafisiche; tuttavia tra l'affermazione di Platone e il teorema di Bohr la differenza è un passaggio al limite, cioè il fatto che non sono necessariamente sufficienti un numero finito di termini per descrivere il moto di un corpo celeste, ma occorre una *serie di Fourier*. Vedremo come questa idea sia alla base della meccanica celeste del XVIII e XIX secolo.(+)

(+) L'affermazione fatta, che l'astronomia antica e medievale sia basata sull'esperienza, mi sembra nel complesso valida anche se non lo è necessariamente per tutti i singoli autori antichi.
Per esempio il carattere sperimentale dell'opera di Tolomeo è stato recentemente messo in dubbio da Robert R. Newton nel suo libro, dal clamoroso titolo "Il crimine di Claudio Tolomeo", di prossima pubblicazione (recensito in Scientific American, ottobre 1977, pag.79-81): secondo R. Newton, Tolomeo deduce le sue asserite osservazioni dalla sua teoria. Questa interpretazione merita comunque di essere verificata da una critica storica molto attenta e da calcoli precisi.

Bibliografia:

S. Sternberg "*Celestial Mechanics*" Benjamin, Amsterdam - N. York, 1969 Cap.I
"*The project phisics course*" Unità 2, Zanichelli - Bologna 1974
G. Cavallo e A.Messina "*Astronomia*" in "*Enciclopedia Einaudi*", vol. I Torino 1977.

§ 2. IL PROBLEMA DI KEPLERO E DI NEWTON.

Continuando con fredda determinazione la destoricizzazione del linguaggio dell'esposizione storica, chiameremo "*problema dei due corpi Kepleriano*" il problema che effettivamente si posero Kepler e Newton posto però nella forma che si usa chiamare "*equazioni di Hamilton*" (che non sono dovute ad Hamilton bensì a Lagrange):

$$(5)\ \begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} & \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} \\ \dot{p}_r = -\dfrac{\partial H}{\partial r} & \dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} \end{cases} \qquad H = H(r,\theta,p_r,p_\theta) = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + \phi(r) \qquad \phi(r) = -\frac{1}{r}$$

Queste equazioni sono caratterizzate dall'esistenza di due *integrali primi indipendenti dal tempo, globali* cioè due funzioni $I(r,\theta,p_r,p_\theta)$, periodiche di periodo 2π in θ, tali che lungo le soluzioni I è costante: poichè $\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$, $p_\theta = J$ è *l'integrale primo del momento angolare o delle aree*, cioè la 2^a legge scoperta da Keplero (1609) nelle osservazioni planetari; poichè $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, $H(r,p_r,p_\theta) = E$ è *l'integrale primo dell'energia o delle forze vive* (pare scoperto da John Bernouilli, 1710).

La sola conoscenza di questi due integrali primi consente (naturalmente con l'uso di tecniche topologiche moderne) di comprendere la struttura qualitativa delle soluzioni di (5). Consideriamo infatti nello *spazio delle fasi* delle variabili $(x,y,\dot{x},\dot{y})$ (oppure in coordinate polari

$r, \theta, p_r = \dot r$, $p_\theta = r^2\dot\theta$) le superfici di livello definite dalle equazioni $p_\theta = J$, $H = E$.

Poichè $\text{grad}\, H = [\frac{1}{r^2} - \frac{J}{r^3}, 0, p_r, \frac{J}{r^2}]$, $\text{grad}\, p_\theta = [0,0,0,1]$ le due funzioni H e p_θ definiscono superfici di livello lisce (cioè senza singolarità e di dimensione 2) dove H è regolare, cioè per $r > 0$, e al di fuori dei punti in cui $\text{grad}\, H$ e $\text{grad}\, p_\theta$ sono dipendenti, cioè di $p_r = \dot r = 0$, $\frac{1}{r^2} - \frac{J}{r^3} = \ddot r = 0$. Perciò se si escludono le *collisioni* $(r = 0)$ e le *orbite circolari* ($\dot r = \ddot r = 0$ da cui $r =$ $=$ costante) le superfici di livello $T(E,J)$ sono lisce.

Ora di queste superfici $T(E,J)$ lisce alcune saranno compatte; altre conterranno nella loro aderenza $r = 0$ oppure saranno illimitate: chiamiamo *dominio di Delaunay* (+) nello spazio delle fasi *l'unione di tutte le superfici di livello* $T(E,J)$ *lisce e compatte*. L'immagine nel piano E,J del dominio di Delaunay sarà definita dalle disuguaglianze $J \neq 0$ (che esclude le collisioni poichè $J = r^2\dot\theta$) e dalle altre che assicurano la limitatezza: per trovarle basta ricavare dall'integrale dell'energia $p_r = \dot r$ (*"legge oraria"*) :

$$\text{(6)} \qquad \dot r^2 = 2E + \frac{2}{r} - \frac{J}{r^2} = 2[E - V(r)]$$

e poichè il trinomio di 2° grado in $\frac{1}{r}$ a secondo membro deve essere positivo o nullo per avere $\dot r$ reale, le soluzioni saranno limitate per $1 + 2EJ^2 \geq 0$ (radici reali del trinomio) ed $E < 0$ (radici positive).

(+) ma bisognerebbe dire "di Keplero" visto che è il luogo di tutte le orbite ellittiche! .

Perciò l'immagine del dominio di Delaunay avrà equazioni

$$(7) \qquad J \neq 0 \qquad E < 0 \qquad 1 + 2EJ^2 > 0$$

escludendo le orbite circolari per le quali $1 + 2EJ^2 = 0$.

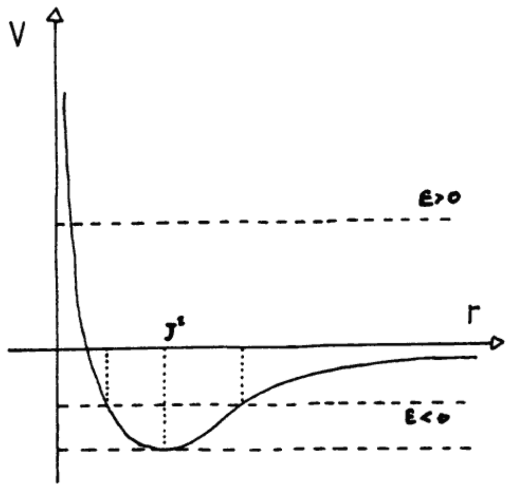


Fig.2:il potenziale effet tivo:
$$V(r) = \frac{J^2}{2r^2} - \frac{1}{r} \leqslant E$$

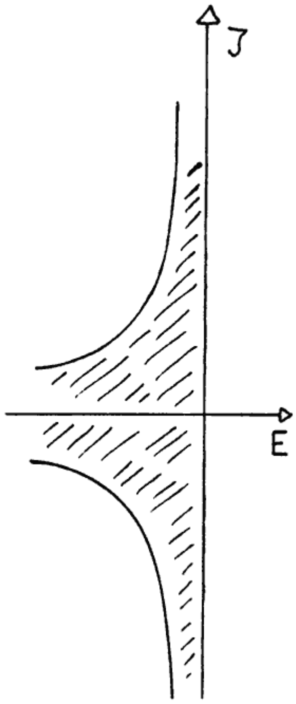


Fig.3 :immagine del dominio di Delaunay nel piano E,J.

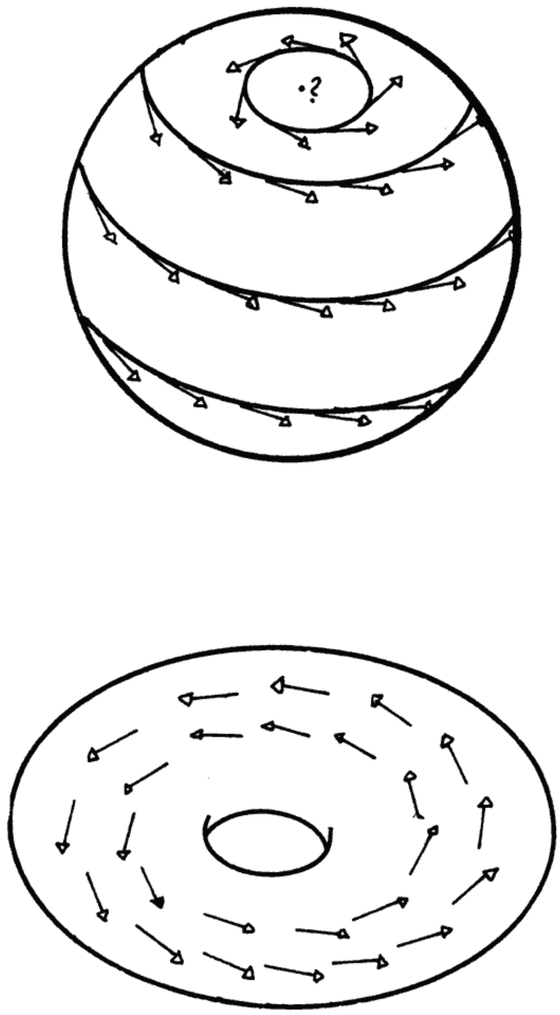


Fig.4 :si può "pettinare" solo il toro,tra tutte le superfici compatte senza bordo.

Si noti che le orbite circolari formano le "superfici" singolari (in realtà di dim 1) nell'aderenza del dominio di Delaunay.

Resta da decidere che tipo di superficie è T(E,J) nel dominio di Delaunay, e che tipo di moto di svolge su di essa.

Alla prima domanda si risponde osservando che il campo vettoriale (5) è tangente a T(E,J), poichè E,J sono costanti sulle soluzioni; inoltre tale campo vettoriale non si annulla mai. Perciò $T(E,J)$ *nel dominio di Delaunay è una superficie compatta con caratteristica di Eulero-Poincaré zero*, e quindi è *un toro* $S^1 \times S^1$. (l'unica superficie compatta che ammette un campo vettoriale mai nullo).

Perciò il moto su di un singolo toro potrà essere rappresentato da un sistema di due sole equazioni differenziali relative a due variabili angolari ϕ_1 , ϕ_2 : l'ipotesi più semplice che si possa fare su tali equazioni differenziali è che siano della forma

$$(8) \qquad \begin{cases} \dot{\phi}_1 = \omega_1\ (E,J) \\ \dot{\phi}_2 = \omega_2\ (E,J) \end{cases}$$

con ω_1 , ω_2 costanti su $T(E,J)$.

Ora le osservazioni di Keplero richiedevano che le soluzioni del problema dei 2 corpi fossero *periodiche* (1^a legge): perciò ω_1 ed ω_2 non possono essere arbitrari.

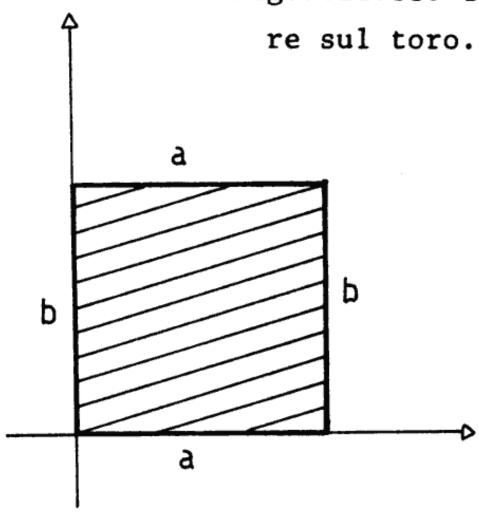


Fig.5:flusso lineare sul toro.

Infatti se il rapporto $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ ("*numero di rotazione*") è irrazionale, quando ϕ_1 aumenta di $\omega_1\ t = 2\pi q$, q intero $\neq 0$, ϕ_2 aumenta di $\omega_2\ t = 2\pi q\ \frac{\omega_2}{\omega_1}$ che non è mai un multiplo intero di 2π perchè ciò richiederebbe $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{p}{q}$ (p,q interi) . Perciò le curve integrali si avvolgono infinite volte sul toro senza mai ripassare dallo stesso punto (*caso ergodico*).

Se invece $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ è *razionale*, cioè $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{p}{q}$, allora le soluzioni ripassano dal punto di partenza dopo che è passato un tempo T tale che

$\omega_1 T = 2\pi q$, $\omega_2 T = 2\pi p$ cioè $T = \frac{2\pi p}{\omega_2} = \frac{2\pi q}{\omega_1}$ e quindi *tutte le soluzioni sono periodiche*. Perciò la 1ª legge di Keplero è verificata se e solo se si ha una relazione di *degenerazione*:

(9) $\qquad p\omega_1 - q\omega_2 = 0 \qquad\qquad p,q \in \mathbb{Z},\ (p,q) \neq (0,0)$

su ogni toro $T(E,J)$.

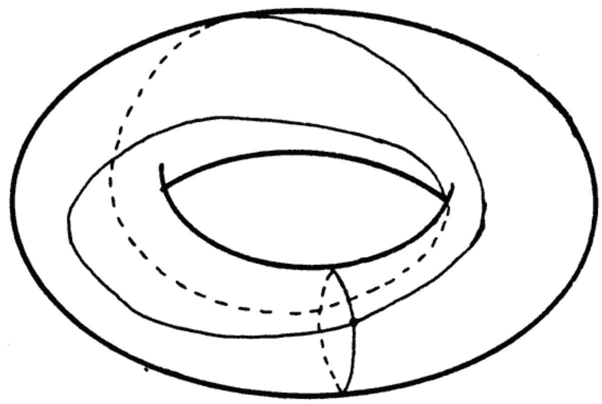


Fig.6 :degenerazione 2/1

Resta da stabilire perchè mai bisogna supporre che il campo vettoriale (5) ristretto al toro debba essere del tipo (8): in effetti non è necessariamente così, però se le variabili angolo ϕ_1, ϕ_2 sono scelte in modo opportuno ci si può effettivamente ricondurre a questo caso. Questo è stato scoperto da Liouville (1849) (che dà un enunciato locale; per l'enunciato globale, Arnold (1963)), con metodi di cui parleremo nel prossimo paragrafo.

Bibliografia:

A. Wintner "*The analytical foundations of celestial mechanics*" Princeton 1941.

§ 3. FORMALISMO HAMILTONIANO E VARIABILI AZIONE - ANGOLO.

Ritorneremo più avanti alla meccanica settecentesca, poichè ora ci servono gli strumenti ottocenteschi di *Cauchy*, *Hamilton*, *Jacobi*, *Liouville* per trovare le opportune "*variabili angolo*" sui tori $T(E,J)$ nel dominio di Delaunay.

Il metodo di Hamilton consiste nel cercare una *funzione generatrice* $W = W(r,\theta,L,G)$ che definisca implicitamente una *trasformazione canonica* con le relazioni

$$(10) \qquad \ell = \frac{\partial W}{\partial L} \qquad g = \frac{\partial W}{\partial G} \qquad p_r = \frac{\partial W}{\partial r} \qquad p_\theta = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

in modo che nelle nuove coordinate (ℓ,g,L,G) le equazioni di Hamilton (5) si scrivano ancora nella forma Hamiltoniana

$$(11) \qquad \dot{\ell} = \frac{\partial K}{\partial L} \qquad \dot{g} = \frac{\partial K}{\partial G} \qquad \dot{L} = -\frac{\partial K}{\partial \ell} \qquad \dot{G} = -\frac{\partial K}{\partial G}$$

dove K è H scritta nelle coordinate ℓ,g,L,G .

Il metodo di Jacobi per trovare W e al tempo stesso per semplificare l'espressione della K (e quindi le equazioni (11)) consiste nel risolvere *l'equazione di Hamilton - Jacobi* che in questo caso (tenendo già conto dell'integrale dell'energia) si riduce a :

$$(12) \qquad H\left(r, \frac{\partial W}{\partial r}, \frac{\partial W}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \phi(r) = E(L,G)$$

perciò le equazioni (11) si riducono a : $\dot{L} = \dot{G} = 0$, $\dot{\ell} = \frac{\partial E}{\partial L}(L,G)$, $\dot{g} = \frac{\partial E}{\partial G}(L,G)$ cioè ad una forma simile alla (8) poichè le frequenze $\dot{\ell},\dot{g}$

sono costanti per L,G fisso.

Per risolvere la (12) si "*separa*" la variabile θ ponendo $\frac{\partial W}{\partial \theta} = p_\theta = J = G$ e quindi ricavando $\frac{\partial W}{\partial r} = \dot r$ come nella "*legge oraria*"

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \dot r = \pm \sqrt{2E(L,G) - 2\phi(r) - \frac{G^2}{r^2}}$$

da cui

$$W = G \pm \int_{r}^{r} \sqrt{2E(L,G) - 2\phi(s) - \frac{G^2}{s^2}}\, ds \qquad \pm \text{ secondo che } \dot r \gtrless 0 . \tag{13}$$

A questo punto resta solo da verificare che ℓ, g definite dalle (10) sono veramente "variabili angolo" cioè che quando ℓ (oppure g) aumenta di 2π, le vecchie variabili $r, \theta, \dot r, \dot\theta$ ritornano allo stesso valore tranne al più θ che essendo a sua volta un angolo può aumentare di un multiplo di 2π .

A questo scopo poniamo $E(L,G) = E(L)$: allora

$$g = \pm \int_{r_\circ}^{r} \sqrt{2E(L) - 2\phi(s) - \frac{G^2}{s^2}}^{\,-1} \left(-\frac{G}{s^2}\right) ds \tag{14}$$

è una costante, $\dot g = \frac{\partial E}{\partial G} = 0$ e perciò $g = \theta(r_\circ)$ è una direzione in cui r diventa uguale all'estremo di integrazione fissato. Per $\phi(r) = -\frac{1}{r}$ l'integrale (14) è integrabile in termini finiti mediante un arcocoseno e perciò si ricava *in termini finiti la legge della traiettoria:*

$$(15) \qquad r = G^2 [1 + \sqrt{1+2E(L)G^2} \cos(\theta - g)]^{-1}$$

dalla quale è ovvio che g è una variabile angolo; se si pone $r_o = \frac{1}{1+e}$, $e = \sqrt{1+EG^2}$, g si indica col nome di *argomento del pericentro*.

D'altro canto $\dot{\ell} = \frac{dE}{dL}(L) = n(L)$ è una costante, e perciò se si vuole che ℓ sia una variabile angolo occorre che n sia il *moto medio*, cioè la velocità angolare θ mediata su $[0, 2\pi]$. Il valore del moto medio è calcolabile poichè $\frac{r^2}{2}\dot{\theta} = \frac{J}{2}$ è la *velocità areolare* e quindi il tempo in cui l'ellisse (15) (nel dominio di Delaunay $0 < e < 1$) è percorsa per intero è $\frac{2\pi a b}{J} = \frac{2\pi G^4}{(1-e^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{G} = \frac{\pi}{\sqrt{-2E^3}}$, perciò $n(L) = \frac{2\pi}{\pi}\sqrt{-2E^3} = (-2E)^{3/2}$ (3^a *legge di Keplero*) da cui ricavo l'equazione:

$$(16) \qquad \frac{dE(L)}{dL} = \dot{\ell} = (-2E)^{3/2}$$

la cui soluzione si ottiene separando le variabili, $E(L) = -\frac{1}{2L^2}$; perciò $\ell = n(t-t_o) = \frac{1}{L^3}(t-t_o)$ è *l'anomalia media* che è una variabile angolo, il cui aumento di 2π fa percorrere esattamente 1 volta un'orbita ellittica.

Che le orbite siano periodiche è soddisfatto automaticamente sia per la (15), sia perchè le equazioni differenziali per le variabili angolo ℓ, g sono

$$(17) \qquad \dot{\ell} = \frac{1}{L^3} \qquad \dot{g} = 0$$

e perciò $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 0$ è razionale per ogni L,G e perciò per ogni toro $T(E,J) = T(-\frac{1}{2L^2}, G)$ nel dominio di Delaunay.

L'esistenza di variabili "*azione-angolo*" come ℓ,g,L,G non è caratteristica della "*legge di Newton*" $\phi(r) = -\frac{1}{r}$, ma discende solo dall'esistenza di due integrali primi E,J, come riconobbe Liouville (1849) : ciò che invece deriva dalla forma molto particolare delle equazioni del problema dei due corpi gravitazionale è che i numeri di rotazione siano sempre razionali, cioè che tutti i tori siano percorsi con moti periodici.

Infatti si può dimostrare (*Bertrand, 1873*) che *se il dominio di Delaunay* è (non vuoto e) *unione di sole orbite periodiche, allora* $\phi(r)$ *è la legge di Newton* $-\frac{K}{r}$ *oppure quella di Hoohe* $K^2 r^2$ (K costante).

Le variabili (ℓ,g,L,G) sono note come "*variabili di Delaunay*", ma l'uso delle variabili ℓ, g risale a Keplero, come risale a Keplero l'equazione "di Keplero" : $\ell = u - e \sin u$ che consente, passando attraverso la variabile ausiliara u (" anomalia eccentrica") di trovare coordinate cartesiane o polari del corpo orbitante in funzione di ℓ,g,L,G.

L'impiego di questi strumenti consentì subito a Keplero di formulare predizioni sulle posizioni dei pianeti (specie Marte) molto più precise di quelle basate sugli epicicli. Tuttavia la sintesi Newtoniana tra leggi di Keplero e teoria della gravitazione consentì di aprire un campo di ricerca più vasto: se neppure le ellissi bastano a spiegare il moto dei pianeti in modo perfetto, specie se si formulano predizioni a lunga scadenza, era possibile spiegare le "diseguaglianze" dei moti reali rispetto ai moti Kepleriani puri come effetto dell'attrazione dei pianeti tra loro?

Bibliografia:

V. Arnold "*Les Methodes Mathématiques de la Mécanique classique*" Ed. Mir, Mosca 1976.

H. Goldstein "*Classical Mechanics*" Addison-Wesley, Reading, Mass. 1950 .

§ 4. IL PROBLEMA DEI 3 CORPI RISTRETTO.

Già Newton (nei Principia) si cimenta sul problema dei 3 corpi, in particolare nella teoria della Luna, ed ottiene ulteriori verifiche della teoria della gravitazione spiegando come perturbazioni prodotte dall'influenza del sole le principali "variazioni" dell'orbita della luna. Tuttavia la sua opinione in proposito era che il problema era difficile, tanto da dire ad Halley che il problema dei tre corpi "gli aveva fatto venire il mal di testa e lo aveva tenuto sveglio così spesso che non voleva pensarci più ". Le difficoltà del problema sono (ancora oggi) di due nature. Primo, l'ordine del sistema di equazioni differenziali del problema dei tre corpi è molto elevato: in principio di ordine 18 (12 nel caso piano) e anche con un oculato uso degli integrali primi classici ("eliminazione dei nodi") non si può ridurre al di sotto dell'ordine 8 (6 nel caso piano): la struttura delle soluzioni e delle varietà invarianti in cui esse si stratificano è complicata perchè contiene le possibili complicazioni topologiche dei sottinsiemi di spazi euclidei di dimensione elevata, e i conti analitici contengono un gran numero di variabili. Secondo, il problema è difficile anche se se ne riduce la dimensionalità con un artificio: questo secondo fatto non fu però subito evidente. Vediamo dunque come si riduce il problema ad uno di ordine 4 .

Eulero (1772) per primo propose (per l'uso nella teoria della luna) di studiare il problema dei tre corpi "ristretto" cioè di supporre che due dei tre corpi ruotassero attorno al loro centro di massa in orbite circolari e il terzo si muovesse nel campo di forze dei primi due, senza però reagire (in quanto di massa "trascurabile") sui primi due .

Supponiamo che P_1 , P_2 siano i corpi di massa $1-\mu$, μ $(0 \leq \mu \leq 1)$ che ruotano su orbite circolari di raggi μ , $1-\mu$ attorno al centro di massa, posto nell'origine, con velocità angolare 1 (si sono "normalizzate" secondo l'uso degli astronomi e dei matematici, ma non dei fisici , tutte le unità di misura e anche la costante gravitazionale). Allora il terzo corpo "infinitesimo" P_3 si muoverà sotto l'azione del potenziale

$$U = \frac{\mu}{|P_3 - P_2|} + \frac{1-\mu}{|P_3 - P_1|}$$

perciò si potrà descrivere il moto di P_3 con un sistema hamiltoniano in cui però la hamiltoniana H' dipenderà dal tempo:

$$(18) \quad H' = \frac{\dot{x} + \dot{y}}{2} - \frac{\mu}{[(x-(1-\mu)\cos t)^2 + (y-(1-\mu)\sin t)^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1-\mu}{[(x+\mu\cos t)^2 + (y+\mu\sin t)^2]^{\frac{1}{2}}} .$$

Con questo metodo (o meglio con la corrispondente formulazione "Lagrangiana" inventata da Eulero, e non con quella "Hamiltoniana" inventata da Lagrange) Eulero riduceva il problema a due soli gradi di libertà (nel piano) e perciò all'ordine 4 . Però la dipendenza di H' dal tempo rendeva le equazioni più complicate da trattare, ed Eulero la eliminò trasformando le equazioni in un sistema di coordinate rotante. In termini più moderni, supponiamo di usare nel problema definito dalla hamiltoniana (18) al posto delle coordinate e momenti cartesiani $x,y,\dot{x},\dot{y}$ le *variabili di Delaunay* ℓ,g,L,G (riferite sempre all'origine cioè al centro di massa di P_1 e P_2): avremo allora $H' = H'(\ell,g,L,G,t)$. Però se $t \mapsto t+\varepsilon$, i due corpi P_1 e P_2 ruotano di ε radianti attorno all'origine; se invece $g \mapsto g+\varepsilon$, con ℓ,L,G fissi . P_3 si troverà su di una "*ellisse osculatrice*" ruotata di ε attorno al fuoco (cioè l'origine) e nella stessa posizione su di essa (determinata da ℓ): perciò se ℓ,L,G restano fisse e t,g aumentano della stessa quantità, il triangolo $P_1\ P_2\ P_3$ ruota rigidamente, le distanze $|P_3 - P_2|$ e $|P_3 - P_1|$ restano costanti e perciò H' non varia. Allora H' si può in realtà scrivere come funzione di ℓ,L,G e $z = g - t$:

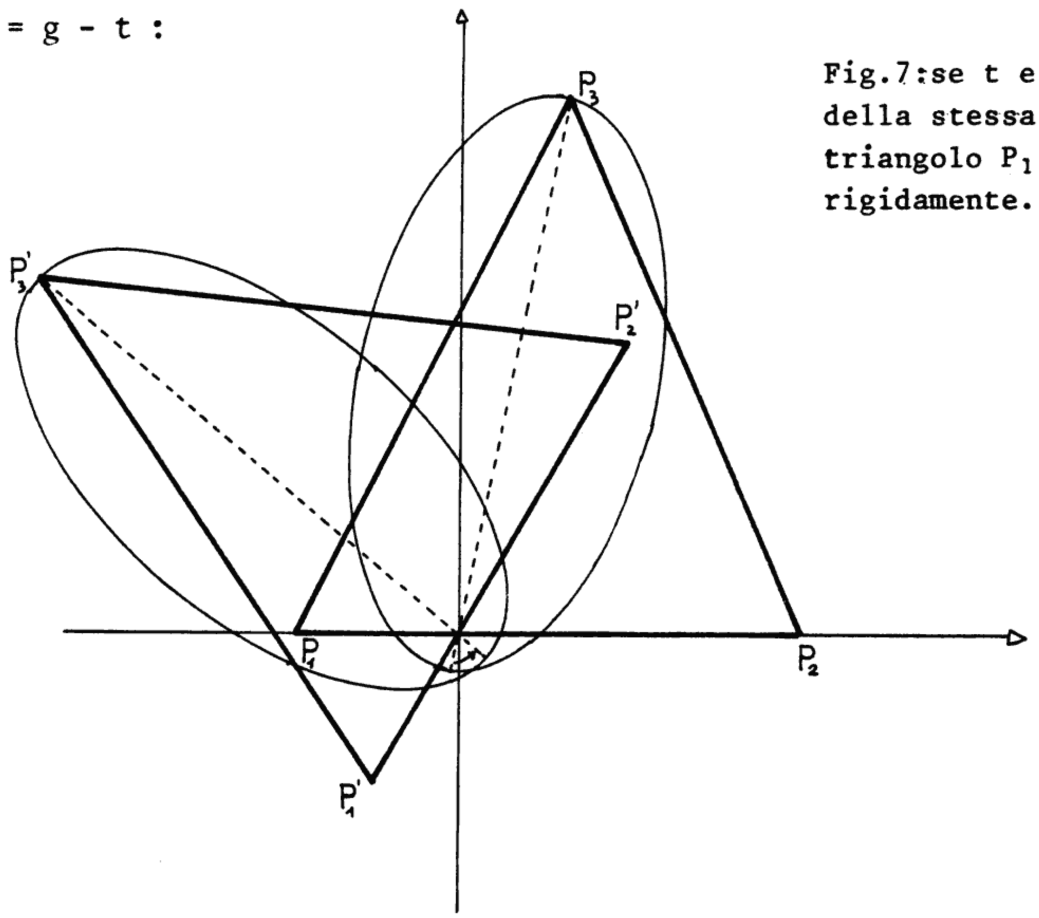


Fig.7:se t e g aumentano della stessa quantità,il triangolo $P_1\ P_2\ P_3$ ruota rigidamente.

$$H' = H'(\ell,z,L,G) \ .$$

D'altro canto $\dot{z} = \dot{g} - \dot{t} = \frac{\partial H'}{\partial G} - 1$; perciò se prendiamo una nuova hamiltoniana:

(19) $$H = H'(\ell,z,L,G) - G$$

le equazioni di moto avranno forma hamiltoniana con *hamiltoniana* H *indipendente dal tempo*:

(20) $$\dot{L} = -\frac{\partial H}{\partial \ell} \qquad \dot{G} = -\frac{\partial H}{\partial z} \qquad \dot{\ell} = \frac{\partial H}{\partial L} \qquad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial G} = \frac{\partial H'}{\partial G} - 1 \ .$$

In particolare $H = H' - G$ sarà un integrale primo indipendente dal tempo (*integrale di Jacobi*). Si noti che H *non è l'energia*, che è H' .

Il problema dei tre corpi ristretto definito dalle (20),(19),(18) si può trattare come un problema di *perturbazioni* del problema dei due corpi: ossia, essendo H funzione analitica anche di μ (massa di P_2) , si può sviluppare in serie di potenze rispetto a μ :

(21) $$H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \dots$$

e il termine indipendente da μ , H_0, sarà la parte dell'Hamiltoniana corrispondente al problema dei due corpi; H_1 è quello che generalmente si indica con il termine "*funzione perturbatrice*" (ed il simbolo $-R$). Però per $\mu = 0$, H non si riduce alla solita funzione di Hamilton dei due corpi $H_0' = E(L) = -\frac{1}{2L^2}$ perchè $H = H' - G$ e quindi

(22) $$H_0 = -\frac{1}{2L^2} - G = E - J$$

perciò le equazioni di Hamilton per $\mu = 0$ sono:

$$(23) \qquad \dot{\ell} = \frac{1}{L^3} = n \qquad \dot{z} = -1 \qquad \dot{L} = 0 \qquad \dot{G} = 0 .$$

Le (23) presentano alcune conferme ed una sorpresa. L , G sono integrali primi per $\mu = 0$, ed $\ell = n(t-t_\circ)$. Però il numero di rotazione $\frac{\omega_2}{\omega_1(L)} = -L^3 = -\frac{1}{n}$ non è zero, ed è razionale od irrazionale a seconda del valore di n (cioè di L).

Allora dove sono sparite le *orbite periodiche* e la *degenerazione* del problema dei due corpi? Nelle variabili ℓ,z,L,G non ci sono più (neppure per $\mu = 0$) : perchè *un'orbita di* P_3 *periodica nel sistema di riferimento fisso o"sidereo"* (ℓ,g,L,G) *è periodica nel riferimento rotante"sinodico"* (ℓ,z,L,G) se e solo se dopo il tempo $\frac{2\pi}{n}p$, P_3 torna nella stessa posizione mentre anche P_1 e P_2 ritornano nella stessa posizione, cioè se è passato il tempo $2\pi q$ (p,q interi); perciò le orbite periodiche ci sono *solo per* $p - nq = 0$. Queste orbite, periodiche nei due sistemi di riferimento, del problema con $\mu = 0$, si chiamano *orbite risonanti*. Perciò nel sistema (ℓ,z,L,G) a tori pieni di orbite risonanti si mescolano inestricabilmente tori con frequenze indipendenti su cui il moto è ergodico.

Nota: l'importanza del "problema ristretto" fu di molto accresciuto dai lavori di Hill e di Poincaré nella seconda metà dell'800, con la scoperta di nuove soluzioni periodiche. La teoria delle pertur

./.

./.

Nota: bazioni, di cui parleremo nel prossimo paragrafo, fu in realtà sviluppata sul problema dei 3 corpi non ristretto (o anche degli n corpi , $n > 3$); tuttavia per mettere in rilievo le difficoltà indipendenti dal gran numero di variabili applichiamo la teoria ad un "problema modello" come quello dei 3 corpi ristretto.

Bibliografia:

H. Poincaré "*Les Méthodes nouvelles de la mécanique celeste*" Vol. I Gauthiers-Villars, Paris 1892

F.R. Moulton "*An introduction to celestial mechanics*" Macmillan, London 1902 .

§ 5. PERTURBAZIONI, RISONANZE, DISEGUAGLIANZE SECOLARI.

Quale è l'effetto di una "piccola perturbazione" del problema dei due corpi, cioè nel nostro caso quali sono le soluzioni del problema (20) per $\mu \neq 0$ ma piccolo? Questo problema impegnò la ricerca matematica ed astronomica per più di 200 anni; occorse un secolo dalle prime osservazioni qualitative di Newton (1687) alla teoria delle perturbazioni formalmente completa di Lagrange (1782), ed un altro secolo per portare a termine i calcoli relativi ai pianeti del sistema solare fino alle elaboratissime teorie perturbative della fine dell'800 (contenenti centinaia di termini). Ciò che interessa di più è che questa enorme massa di lavori teorici ed osservativi costituiva un esplicito programma di verifica della teoria della gravitazione di Newton: come diceva, verso la fine di questa fase storica, Poincaré: "lo scopo finale della meccanica celeste è di risolvere questa grande questione, di sapere se la legge di Newton spiega da sola tutti i fenomeni astronomici; il solo modo di arrivarvi è di fare delle osservazioni precise quanto è possibile e di compararle quindi con i calcoli. Questi calcoli non possono che essere approssimativi e non servirebbe a niente, d'altronde, calcolare più decimali di quelli che le osservazioni ci possono far conoscere" (++).

(++) Poincaré, fatto questo omaggio alla teoria ben radicata nella tradizione, sviluppa poi il suo ragionamento in tutt'altra direzione (cfr. § 6).

La sostanza matematica della "*teoria delle perturbazioni*" si può esporre, nel nostro "problema campione" dei due corpi ristretto piano e con la notazione moderna delle variabili azione-angolo, in poche formule : se la hamiltoniana (19) è sviluppabile in serie rispetto a μ : $H = H_o + \mu H_1 + \ldots$ dove i puntini stanno per $\sigma(\mu)$ per $\mu \to 0$, anche le soluzioni dipendenti dal parametro μ : $\ell(t,\mu)$, $g(t,\mu)$, $L(t,\mu)$, $G(t,\mu)$ saranno sviluppabili in serie rispetto a μ ; cerchiamo allora i termini del primo ordine in μ : ℓ_1, z_1 , L_1 , G_1 : avremo allora, eguagliando i termini di ordine 0 e 1 delle serie formali a 1° e 2° membro nelle equazioni di Hamilton (20), le *equazioni di Delaunay*:

$$(24) \qquad \dot{L}_1 = -\frac{\partial H_1}{\partial \ell} \qquad \dot{G}_1 = -\frac{\partial H_1}{\partial z}$$

$$(25) \qquad \dot{\ell}_1 = \frac{1}{L_1^3} + \frac{\partial H_1}{\partial L} \qquad \dot{z}_1 = -1 + \frac{\partial H_1}{\partial G}$$

formulazione moderna delle celebri *equazioni di Lagrange* (1782) . Per comprendere il vantaggio delle equazioni (24) e (25) occorre osservare che, a meno di termini di ordine superiore al 1° in μ , si può sostituire nei secondi membri dentro H_1 soltanto i termini di ordine 0 in μ (+) , cioè le soluzioni L_o = cost, G_o = cost , $z_o = g_o - t$,

(+) con l'eccezione dell'L_1 che compare nel 2° membro della 1ª delle (25).

$\ell_o = \frac{1}{L_o^3}\, t = n_o\, t$ (scelta l'origine dei tempi in modo che $\ell_o(0) = 0$) del problema dei *due* corpi P_1 e P_3 in coordinate rotanti , perchè i termini contenenti H_1 hanno già a fattore μ . Allora i secondi membri delle (24) e (25) contengono solo funzioni note del tempo e delle costanti L_o, G_o, g_o (+) e perciò le (24) e (25) sono integrabili per quadrature (++) .

Il metodo classico per effettuare questa integrazione consiste nel ritorno agli epicicli, cioè nello *sviluppare la funzione perturbatrice* H_1 , che è periodica nelle variabili angolo ℓ, z , in *serie di Fourier:*

$$(26) \qquad H_1(\ell,z,L,G) = \sum_{k_1,k_2} B_{k_1 k_2}(L,G)e^{i(k_1\ell+k_2 z)}$$

e quindi integrare termine a termine : per esempio per L_1 :

$$(27) \qquad L_1(t) = L_o - \mu \sum_{k_1\neq 0} B_{k_1 k_2}(L,G) \; ik_1 \int_0^t e^{i(k_1\ell_0+k_2 z_0)}dt' \;.$$

Ora gli integrali nella (24) sono di due tipi: infatti l'argomento dell'esponenziale, come funzione del tempo, si legge:

$$k_1\,\ell_0 + k_2\, z_o = (k_1\, n_o - k_2)t+k_2\, g_0$$

e perciò da integrare nella (27) vi sono dei *termini risonanti* con

---

(+) con l'eccezione dell'L_1 che compare nel 2° membro della 1ª delle (25).

(++) la prima delle (25) con una doppia integrazione.

$k_1 n_\circ - k_2 = 0$ $(k_1 \neq 0)$, che danno luogo a funzioni lineari del tempo (*termini secolari*) e dei termini non risonanti che danno luogo, integrati, a *termini periodici* con la comparsa del "*divisore*" $k_1 n_\circ - k_2$ (e con *periodo* $\dfrac{2\pi}{k_1 n_\circ - k_2}$) :

$$
\begin{aligned}
L_1(t) = L_\circ - i\,\mu \sum_{\substack{k_1 n - k_2 = 0 \\ k_1 \neq 0}} B_{k_1 k_2}(L_\circ, G_\circ) k_1 e^{i k_2 g_\circ}\, t\; - \\
- \mu \sum_{\substack{k_1 n - k_2 \neq 0 \\ k_1 \neq 0}} B_{k_1 k_2} \frac{k_1}{k_1 n_\circ - k_2}\, e^{i(k_1 n_\circ - k_2)t + k_2 g_\circ}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Si noti che *non vi sono termini secolari che non provengano da risonanze*, cioè il termine $B_{\circ\circ}$ non compare (perchè H_1 è derivata rispetto ad ℓ che sta all'esponente e non rispetto alle variabili L,G che stanno nei coefficienti $B_{k_1 k_2}$) ("*Teorema di Lagrange (1776) della invariabilità dei semiassi maggiori*"); altro accade nelle (25) ("*moti secolari del pericentro*").

Supponiamo che non ci siano risonanze - cioè n_0 *irrazionale*. Questa ipotesi ha una sua legittimità perchè i razionali sono "meno" degli irrazionali (+).

(+) Sull'influsso del problema dei "piccoli divisori" in meccanica celeste sul successivo sviluppo della teoria della misura, cfr. Wintner cit. § 529; il problema andrebbe approfondito dal punto di vista storico, ma è certo che la motivazione per la teoria della misura non è quella puramente "insiemistica" che oggi si usa dare nei corsi elementari.

Allora se si conoscono i coefficienti $B_{k_1 k_2}$ e se per di più essi tendono a zero per $k_1, k_2 \to \infty$ si possono approssimare le serie a secondo membro della (28) con somme finite di funzioni trigonometriche. Per circa 100 anni - da Eulero a Delaunay - studiare il problema dei 3 corpi con metodi perturbativi volle dire aggiungere sempre nuovi termini alle somme parziali della serie a secondo membro della (28), ogni volta che compariva una "diseguaglianza" tra teoria ed osservazioni: i termini periodici per rendere conto di diseguaglianze periodiche a periodo $\frac{2\pi}{k_1 n_o - k_2}$ lungo o breve; i termini secolari (specie per g_1, ℓ_1) per rendere conto di variazioni sistematiche dei dati su di un periodo di molti decenni di osservazione. In realtà questi calcoli richiedono molte altre tecniche matematiche qui non descritte; per esempio i termini $B_{k_1 k_2}(L,G)$ venivano sviluppati in serie di potenze di $e = \sqrt{1 - \frac{G^2}{L^2}}$, in modo da poter trascurare le potenze elevate di e (per i pianeti $e < 0,25$).

Vale la pena di dare un'idea quantitativa del grado di accordo tra teoria ed osservazione raggiunto nella seconda metà dell'800 : le tavole compilate da Le Verrier negli anni 60-70 davano luogo a "diseguaglianze" di non più 2" - 3" su di un arco di tempo di 1 secolo (con qualche difficoltà particolare per Saturno, dovuta al termine a lungo periodo con frequenza $5n_o - 2$ se n_o è il moto medio di Saturno), con quattro sole eccezioni: due variazioni secolari negli elementi di Mercurio, una per Venere ed una per Marte. Nel 1895 Newcomb, compilate nuove tavole, analizzò il rapporto tra tutte le diseguaglianze e l'errore probabile delle osservazioni, concludendo che restava inspiegabile sulla base della teoria newtoniana un moto del perielio di Mercurio pari a circa 43" al secolo, ed era da considerarsi probabile un moto analogo (difficilmente separabile dall'errore sperimentale) dei perielio di Venere, la Terra e Marte di pochi secondi per secolo. Per la prima volta in oltre 200 anni si raggiungeva la prova sperimentale di una deviazione dalle leggi di Newton, la cui entità era tale da causare errori di predizione nella posizione di Mercurio visto da terra di al massimo 8" in campo ad 1 secolo: per intendersi sul valore di questo ordine di precisione , 8" corrispondono a circa $\frac{1}{2}$ secondo di tempo. La teoria Newtoniana - con tutti i progressi matematici della meccanica analitica classica - aveva abbassato il limite di precisione della predizione astronomica di 60 volte, dagli 8' di Keplero agli 8" di Einstein (1915 - 1917) .

Poichè la meccanica celeste rappresenta l'unico modo possibile di fare verifiche sperimentali di alta precisione della meccanica Newtoniana (+) , tutto il valore "paradigmatico" della meccanica classica nella storia della scienza si può riassumere in questi due dati: 230 anni di dominio incontrastato, un aumento di precisione di 60 volte nelle predizioni senza alcuna eccezione tra i corpi celesti osservabili (e di 240 volte con una sola eccezione) su di un arco di tempo di predizioni ed osservazioni di 250 anni.

(+) Ancora oggi, mentre è possibile conoscere le distanze nel sistema solare con un margine di errore di 1 metro (cioè con 12 cifre significative), la quarta cifra significativa della costante di gravitazione universale (in unità di misura terrestri) è incerta.

Resta da valutare il senso dello sviluppo in serie (28), la misura dell'errore commesso troncandolo dopo un numero finito di termini, e la legittimità dell'ipotesi di "*non risonanza*": $k_1 n_o - k_2 \neq 0$ per ogni $(k_1, k_2) \neq (0,0)$. Le tre questioni sono connesse: infatti verificare che $k_1 n_o - k_2 \neq 0$ per escludere risonanze con interi k_1, k_2 piccoli è facile, ma diventa sempre più sensibile all'errore sperimentale nella misura di n_o man mano che k_1, k_2 crescono; al limite per k_1, $k_2 \rightarrow \infty$ i razionali sono densi, e quindi un'affermazione come "il moto medio di Saturno è non risonante" è "metafisica". (+) Perciò ogni soluzione di prima approssimazione come la (28) può contenere termini secolari, sia pure molto piccoli poichè $B_{k_1 k_2}$ tende a 0 velocemente per $k_1, k_2 \rightarrow \infty$. Inoltre anche se n_o è irrazionale, la (28) può contenere termini affetti da "divisori" $k_1 n_o - k_2$ che possono essere molto piccoli, e quindi da moltiplicatori $\dfrac{1}{k_1 n_o - k_2}$ che possono essere molto rapidamente crescenti con k_1 e k_2, per esempio più di un qualunque polinomio. Perciò anche in assenza di risonanze le serie (28) possono divergere per certi valori di n_o (che formano un denso).

(+) la giustificazione di affermazioni sull'irrazionalità di n_o è "metafisica" perchè finalistica: cioè n_o "deve" essere irrazionale perchè il problema "deve" essere risolubile.

Quanto alla misura dell'errore, è chiaro che in presenza di divisori $p\,n_o - q$ non nulli ma molto piccoli si possono presentare termini delle serie (28) di ordine $|k_1| + |k_2|$ molto elevato però importanti, e quindi le teorie perturbative ordinarie non possono essere precise; anche i termini in μ^2, μ^3 etc. possono diventare importanti se contengono un piccolo divisore. Perciò le teorie che vedono comparire piccoli divisori (come quella di Saturno e Giove, ma più ancora quelle dei satelliti di Giove, di Saturno e di Urano, e degli asteroidi) non possono raggiungere grande precisione malgrado enormi sforzi, come quelle i cui sviluppi in serie sono lentamente convergenti per altre ragioni (come nella teoria della Luna, che ancora nel 1896 dava luogo a diseguaglianze di 15").

Bibliografia:

F. Tisserand "*Traité de mècanique céleste*", 4 volumi, Gauthiers-Villars, Paris 1892/1896 .

§ 6. SISTEMI PIU' O MENO INTEGRABILI.

Che cosa vuol dire saper integrare, in maniera esatta, un sistema di equazioni differenziali ordinarie, come per esempio quello del problema dei tre corpi ristretto piano (20)? Si sa dai lavori di Cauchy (1827) che le soluzioni di un'equazione ordinaria come la (20) sono sviluppabili in serie di Taylor in un intorno del punto iniziale (purchè lo siano anche i secondi membri, come nel nostro caso) in funzione sia del tempo che delle condizioni iniziali. Allora usando il teorema delle funzioni implicite si vede che (per un'equazione autonoma) devono esistere, sempre in un intorno, *n-1 integrali primi funzionalmente indipendenti* (se n è il numero delle variabili dipendenti, nel nostro caso $n = 4$) funzione delle sole variabili dipendenti e non del tempo:

$$I(\ell,z,L,G) = I$$

tali che

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial \ell}\dot{\ell} + \frac{\partial I}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial I}{\partial L}\dot{L} + \frac{\partial I}{\partial G}\dot{G} = \frac{\partial I}{\partial \ell}\frac{\partial H}{\partial L} + \frac{\partial I}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial G} - \frac{\partial I}{\partial L}\frac{\partial H}{\partial \ell} -$$

$$- \frac{\partial I}{\partial G}\frac{\partial H}{\partial g} = [I,H] = 0 \quad . \quad \text{"Parentesi di Poisson".}$$

Se si conoscono n-1 integrali I , e la *legge oraria* (cioè un ulteriore integrale primo dipendente dal tempo) si può asserire di avere completamente integrato il sistema di equazioni (si intende a meno di inversioni o esplicitazioni di funzioni implicite), il tutto in un intorno del punto e istante iniziali.

Purtroppo però il teorema di Cauchy non è di alcuna utilità pratica in meccanica celeste perchè il *raggio di convergenza* delle serie di Taylor che definiscono integrali primi è limitato dalle singolarità dell'equazione (20), e la collisione del corpo P_3 con uno dei due corpi P_1 e P_2 è appunto una singolarità ; ne segue che nessuno degli integrali primi così trovati si estende, a priori, al di là di una frazione di giro attorno ad uno dei due corpi principali, e perciò il metodo delle serie di Taylor non è utilizzabile. (+) In linea di principio si può pensare ad una *continuazione analitica* degli integrali primi locali, ma girando attorno ad una singolarità gli integrali primi possono presentare fenomeni di polidromia: nelle variabili azione--angolo questo corrisponde ad avere funzioni $I(\ell,z,L,G)$ anche definite "globalmente" per ogni valore di ℓ,z e per valori di L,G in un aperto, ma non periodiche di periodo 2π nelle variabili angolo ℓ,z . Allora quale è il numero giusto di integrali primi (indipendenti tra loro e dal tempo) "uniformi" , o "isolanti" cioè globali, che dobbiamo aspettarci?

Nel problema dei due corpi vi erano tre integrali primi L,G e g ; o più esattamente, se vogliamo eliminare la polidromia della funzione g (argomento del pericentro) usando invece integrali primi periodici di periodo 2π in g , possiamo prendere gli integrali primi

$$L\ , \ \sqrt{2L-2G}\cos g, \qquad \sqrt{2L-2G}\sin g \tag{29}$$

che sono indipendenti funzionalmente in tutto il dominio di Delaunay.

Il teorema di Bertrand ci avverte però che la presenza dell'integra-

---

(+) Si pone semmai il problema della *regolarizzazione*, cioè di un cambiamento sia di variabili dipendenti che di parametrizzazione dell'asse dei tempi che renda possibile lo sviluppo in serie convergenti delle ./.

le g è un fatto eccezionale che si presenta solo, nel problema dei due corpi, per la legge di Newton e per quella di Hooke; normalmente i numeri di rotazione sui tori $L = \text{cost}$, $G = \text{cost}$ sono variabili con L e G , e perciò le orbite anzichè essere sempre periodiche sono talvolta periodiche e talvolta dense nel toro che le contiene, nel qual caso una funzione continua non potrà essere costante su di un'orbita se non lo è su tutto il toro.

Questa proprietà sarà conservata da "quasi tutte" le perturbazioni del problema dei due corpi, e perciò non ci dobbiamo aspettare di trovare più di 2 integrali uniformi; al contrario il massimo di integrabilità possibile sarà quello del caso del teorema di Liouville-Arnold, sarà cioè il caso in cui esistono due integrali primi come L,G e due variabili angolo soddisfacenti ad equazioni del tipo già visto (a "frequenze costanti" su ogni toro). Perciò il passaggio alle coordinate rotanti, cioè alle variabili angolo $z = g - t$ ed ℓ anzichè g,ℓ, non comporta il sacrificio di alcun integrale primo salvo che per $\mu = 0$. Si tratta però di vedere se per $\mu > 0$ possono continuare ad esistere due integrali primi indipendenti, e perciò dei tori invarianti che siano la "*continuazione*" (cioè la deformazione con parametro μ) dei tori $T(E,J)$ che riempiono il dominio di Delaunay nel problema dei 2 corpi. Poichè in tal caso il teorema di Liouville-Arnold ci assicura che le soluzioni sono ottenibili per quadrature (sia pure più generali

---

./. (+) soluzioni per ogni t . Questo problema, posto da Weierstrass, fu risolto solo nel secolo XX da Levi Civita (1904) e Sundmann (1907).

di quelle del § 3), rispondere a questa domanda equivale a decidere se il problema dei 3 corpi ristretto è integrabile per quadrature e quindi risolubile nel senso degli autori classici. Sull'inesistenza di nuovi integrali, diversi da quelli classici, rappresentati nel problema ristretto dal solo integrale di Jacobi H , vi erano dei sospetti da tempo tra i matematici, ma solo per opera di Bruns (1887) e Poincaré (1890) si arrivò ad un risultato negativo preciso. *Il teorema di Poincaré afferma precisamente che non esistono altri integrali primi "uniformi" (cioè periodici di periodo* 2π *in* ℓ, z*) delle equazioni (20) , sviluppabili in serie rispetto a* μ *in un intorno di* $\mu = 0$ *, e definiti per* L *,* G *variabili in un aperto, a parte* H *(integrale di Jacobi) e le funzioni di* H *.*

La dimostrazione di Poincaré è, a grandi linee, abbastanza semplice. Supponiamo che esista un tale integrale $\Phi = \Phi(\ell,z,L,G,\mu)$ e sviluppiamolo in serie rispetto a μ :

$\Phi = \Phi_o + \mu\,\Phi_1 + \mu^2\Phi_2 + \ldots$ così come abbiamo fatto per $H = H_o + \mu H_1 + \ldots$

allora poichè

$$\frac{d\Phi}{dt} = [\,\Phi, H\,] = 0 \tag{30}$$

sviluppando l'equazione (30) in serie di potenze di μ ed eguagliando a zero i coefficienti delle varie potenze di μ (poichè per ipotesi la (30) deve valere identicamente rispetto al parametro μ) , otteniamo le prime due di un sistema di infinite equazioni:

$$[\,\Phi_o, H_o] = 0 \tag{31}$$

$$[\,\Phi_1, H_o] + [\,\Phi_o, H_1] = 0 \tag{32}$$

La prima ci dice che Φ_o è un integrale primo del sistema generato da H_o, cioè del problema dei 2 corpi; e poichè siano nel sistema rotante, $\Phi_o = \Phi_o(L,G)$ (deve essere costante sui tori; a priori solo su quelli con numero di rotazione irrazionale, ma questi sono densi).

La (32) invece si semplifica, tenendo conto che H_o e Φ_o dipendono solo da L,G :

$$(33)\quad 0 = \frac{\partial\Phi_0}{\partial L}\frac{\partial H_1}{\partial \ell} + \frac{\partial\Phi_0}{\partial G}\frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial H_o}{\partial L}\frac{\partial\Phi_1}{\partial \ell} - \frac{\partial H_o}{\partial G}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial\Phi_0}{\partial L}\frac{\partial H_1}{\partial \ell} + \frac{\partial\Phi_o}{\partial G}\frac{\partial H_1}{\partial z} - \left[n\frac{\partial\Phi_1}{\partial \ell} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right]$$

poichè $$\frac{\partial H_o}{\partial L} = \frac{1}{L^3} = n\ , \quad \frac{\partial H_o}{\partial G} = -1\ .$$

Allora sviluppiamo in serie di Fourier non solo la funzione perturbatrice H_1, ma anche la parte del 1° ordine della Φ :

$$(34)\qquad \Phi_1(\ell,z,L,G) = \sum_{k_1,k_2} C_{k_1k_2}(L,G)e^{i(k_1\ell+k_2z)}$$

e sostituendo questo sviluppo in serie e l'analogo (26) di H_1 nella (33); eguagliando a zero i coefficienti di ogni armonica:

$$(35)\qquad B_{k_1k_2}(L,G)\left\{k_1\frac{\partial\Phi_o}{\partial L} + k_2\frac{\partial\Phi_o}{\partial G}\right\} - C_{k_1k_2}(L,G)\{k_1n - k_2\} = 0\ .$$

Scegliamo allora un valore di L tale che $n = \frac{1}{L^3}$ sia razionale, $n = \frac{p}{q}$. Allora prima o poi, cioè per valori di k_1 , k_2 più o meno grandi, si avrà una risonanza $k_1 n - k_2 = 0$, e perciò la (35) si ridurrà, per quel valore risonante di L e per quegli indici k_1 , k_2 che risuonano con n , ad una condizione

$$B_{k_1 k_2} = 0 \tag{36}$$

oppure $k_1 \frac{\partial \Phi_o}{\partial L} + k_2 \frac{\partial \Phi_o}{\partial G} = 0$, cioè poichè $k_2 = n\, k_1$:

$$\frac{\partial \Phi_o}{\partial L} + n \frac{\partial \Phi_o}{\partial G} = 0 \,. \tag{37}$$

Consideriamo allora l'integrale di Jacobi per $\mu = 0$, $H_o = - \frac{1}{2L^2} - G$; ricavando da esso G troviamo che Φ_o si può esprimere come funzione di L, H_o:

$$\Phi_o\left(L, - \frac{1}{2L^2} - H_o\right) = \Psi(L,H_o)$$

dove però la dipendenza da L è data da:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial L}(L,H_o) = \frac{\partial \Phi_o}{\partial L} + \frac{1}{L^3}\frac{\partial \Phi_o}{\partial G} = \frac{\partial \Phi_o}{\partial L} + n \frac{\partial \Phi_o}{\partial G}$$

cioè $\frac{\partial \Psi}{\partial L} = 0$ per ogni risonanza n per cui vale la (37). Perciò *se per ogni risonanza* $n = p/q$ *esistono termini risonanti* $B_{k_1 k_2}$ $(k_1 = hq,\ k_2 = hp)$ *non nulli*, cioè non vale la (36), deve valere la (37) e quindi $\frac{\partial \Psi}{\partial L} = 0$; ma poichè le risonanze sono dense nel dominio di Delaunay (gli L tali che

$\frac{1}{L^3}$ è razionale sono densi) ciò significa che (sempre nel dominio di Delaunay) $\frac{\partial\Psi}{\partial L} \equiv 0$ cioè

$$\Phi_o = \Psi(L, H_o) = f(H_o) \, . \tag{38}$$

Ma se $\Phi_o = f(H_o)$, allora $\Phi - f(H)$ è un integrale primo nullo per $\mu = 0$ cioè $\Phi - f(H) = \mu \; \Phi'$,

con Φ' un integrale primo. Poichè però il ragionamento che ci conduce a $\Phi_o = f(H_o)$ non dipende affatto da Φ ma solo dallo sviluppo in serie di Fourier della funzione perturbatrice, cioè dai coefficienti $B_{k_1 k_2}$, anche $\Phi'_o = f(H_o)$ e perciò

$$\Phi - f(H) - \mu f(H) = \mu^2 \; \Phi''$$

è un integrale primo a cui si applica lo stesso ragionamento ... per induzione si conclude perciò che $\Phi = F(H,\mu)$, con F definita per valori abbastanza piccoli di μ da una serie di cui si può verificare la convergenza.

Perciò se per ogni risonanza (o almeno per "quasi ogni risonanza", cioè per un insieme denso di risonanze) esistono termini risonanti non nulli, non ci sono altri integrali primi che l'hamiltoniana H (questa affermazione vale anche per problemi hamiltoniani del tutto diversi da quello dei 3 corpi!). Che i termini risonanti ci siano va verificato, ma non ci soffermiamo su ciò (sarebbe lungo). Ciò che conta è che questa dimostrazione spiega le difficoltà relative alle risonanze e ai piccoli divisori incontrate dagli astronomi, mostrando, come dice Poincaré, che "Le difficoltà che si incontrano in meccanica celeste a causa dell'esistenza dei piccoli divisori e delle commensurabilità approssimate dai moti medi sono connesse con la vera natura delle cose e non possono essere evitate".

Bibliografia:

H. Poincaré cit.

§ 7. TORI INVARIANTI E MOTI CONDIZIONALMENTE PERIODICI.

Nella sua famosa e premiata (dal re di Svezia) memoria sul problema dei tre corpi, in cui dimostrava il teorema di inesistenza degli integrali primi di cui abbiamo appena parlato, Poincaré asseriva che questo avrebbe implicato l'inesistenza di soluzioni condizionalmente periodiche, esprimibili in serie della forma:

$$z(t) = \sum_{k_1 k_2} A_{k_1 k_2}(L,G)\, e^{i(k_1 \ell + k_2 z)}$$

anche in assenza di termini secolari dovuti a "risonanze esatte" $k_1 n - k_2 = 0$.

Weierstrass però non rimase convinto, e scrisse in una lettera il caustico commento: "Questa osservazione, che è di fondamentale significanza, viene data senza dimostrazione" . In effetti il teorema di Poincaré sugli integrali primi esclude che il problema dei 3 corpi possa essere completamente integrabile nel senso del teorema di Liouville-Arnold, cioè che un intero aperto possa essere riempito di tori invarianti $T(A,B)$, definiti da $H = A$, $I = B$ (un altro integrale) su cui il moto risulterebbe quasi periodico o periodico a seconda del numero di rotazione.

Perciò alcuni dei tori invarianti presenti nel problema dei 3 corpi ristretto per $\mu = 0$ sono "distrutti dalla perturbazione" per $\mu > 0$. Questo non significa affatto che alcuni altri tori invarianti non siano "conservati" per $\mu > 0$ (cioè che una loro deformazione con parametro μ non sia invariante anche per $\mu > 0$) con tutto il loro corredo di orbite condizionalmente periodiche.

Per avere una intuizione geometrica della situazione possiamo abbassare la dimensionalità della situazione fissando prima il valore della *costante di Jacobi* H , in modo che il moto (20) si svolga su di una fissa varietà di dimensione 3 nello spazio di coordinate (ℓ, z, L, G). Facciamo quindi una *sezione trasversale* al moto: troveremo una superficie S di dimensione 2 , tale che i punti di S (di un aperto su S) stanno su orbite che restano distinte almeno per un certo tempo T . Se però si considerano le orbite globalmente, ogni orbita incontra S più volte. Per esempio se γ_0 è un'orbita periodica, possiamo supporre che γ_0 attraversi S solo in un punto $S \cap \gamma_0$, però l'orbita ripasserà dello stesso punto $\gamma_0 \cap S$ di S dopo ogni periodo. Consideriamo allora *l'applicazione di Poincaré* di S in sé definita dal seguire ogni orbita di P_3 per un giro attorno a P_1 fino a che incontra di nuovo per la prima volta S : i punti fissi o periodici di questa $\Theta_\mu : S \to S$ corrispondono ad orbite periodiche.

Per esempio definiamo S in questo modo: prendiamo per variabili gli integrali primi (29) del problema dei 2 corpi, e la longitudine media $\ell + g$, nel sistema sinodico (ruotante) con $z = g - t$ al posto di g :

$$(39)\begin{cases} \xi = -\sqrt{2L - 2G}\ \sin z \\ \lambda = \ell + z \\ \eta = \sqrt{2L - 2G}\ \cos z \\ \Lambda = L \end{cases} \qquad \textit{Variabili di Poincaré}\ (\xi, \lambda, \eta, \Lambda)$$

queste conservano la forma canonica delle equazioni, con nuova hamiltoniana uguale alla vecchia , nelle nuove variabili, per esempio per $\mu = 0$:

$$(40) \qquad H_o = -\frac{1}{2L^2} - G = -\frac{1}{2\Lambda^2} - \Lambda + \frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)$$

e per di più sono definite anche per $e = 0$, cioè $L = G$, cioè sulle orbite circolari, purchè si ponga in tal caso $\lambda = \theta - t$.

Come sezione trasversale S prendiamo $\lambda = 0$. Allora per $\mu = 0$ vi sono i tori invarianti $L =$ cost, $G =$ cost cioè $H_o =$ cost, $2L-2G =$ $=$ cost che tagliano S in circonferenze $\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2) = \tau =$ costante su cui stanno o punti periodici cioè fissi per Θ^p ; p intero, o le tracce su S di orbite condizionalmente periodiche (a seconda del nume-

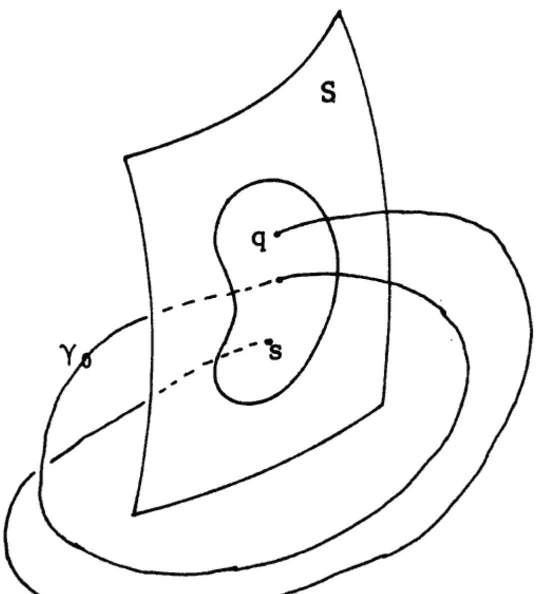


Fig.8: l'applicazione di Poincaré

$\Theta_\mu(q) = s$

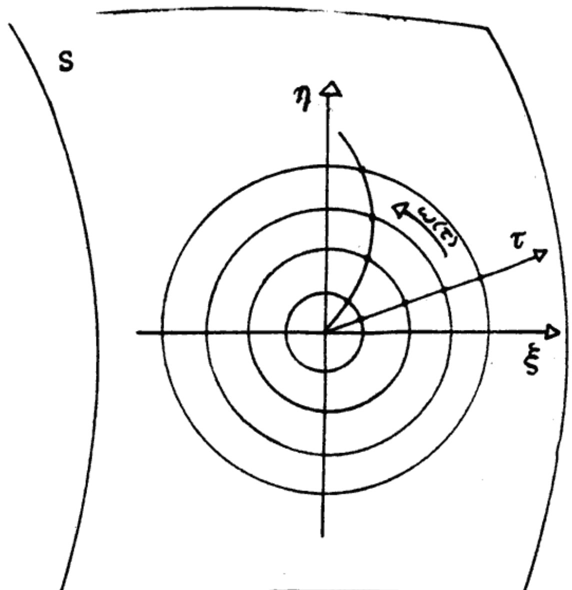


Fig.9: tracce su S dei tori invarianti per $\mu = 0$

ro di rotazione), tutte orbite ellittiche in realtà nel riferimento sidereo (fisso). Allora quando λ aumenta di 2π, cioè quando si ripassa da S perchè λ è un angolo, z aumenta e l'applicazione di Poincaré è una rotazione di un angolo $\omega(\tau)$ (nel piano ξ, η), angolo che dipende da $\tau = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$.

Ora $\lambda = \ell + g - t$, $\ell = n(t - t_\circ)$ e perciò quando, sull'orbita, λ aumenta di 2π, è passato il tempo $2\pi(n-1)^{-1}$, e z è aumentato di $2\pi(n-1)^{-1}$ perciò su $\tau = L - G =$ $= \text{cost}$, $\omega(\tau) = \dfrac{2\pi}{n-1}$ dove $n = \dfrac{1}{L^3}$ è il moto medio sull'orbita di energia $H_\circ$ (G deve essere eliminato tramite $H_\circ = -\dfrac{1}{2L^2} - G = \text{cost}$). Semplici calcoli consentono allora di sviluppare in serie la funzione $\omega(\tau)$, analitica in τ :

$$
(41) \quad \begin{cases} \omega(\tau) = \omega_\circ + \omega_1 \tau + \dots \\[2mm] \omega_\circ = \dfrac{2\pi}{n_\circ - 1} \qquad \omega_1 = \dfrac{6\pi n_\circ^{4/3}}{(1-n_\circ)^3} \quad \dots\dots \end{cases}
$$

dove $n_\circ$ è il moto medio sull'orbita circolare $\xi = \eta = 0$;
cioè l'applicazione ϑ_0 in coordinate polari $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, z si scrive:

$$
(42) \quad \begin{cases} \rho_1 = \rho_\circ \\[2mm] z_1 = z_\circ \quad \omega_\circ \quad \omega_1\tau - \tau^2\omega_2 \quad \dots\dots \end{cases}
$$

$\omega_\circ$ - *Twist map di Moser*

Ora dalla (42) si deduce che la matrice jacobiana A di Θ_0 in $\xi = \eta = 0$ ha autovalori $\pm i\,\omega_\circ$ (purchè $\omega_\circ$ sia ben definito, cioè $n_\circ \neq 1$); perciò $\det(A - \nu I) = 0$ non ha tra le sue soluzioni $\nu = 1$ purchè

(43) $$\omega_\circ \neq 2k\pi \qquad k \text{ intero },$$

e quindi l'equazione del punto fisso

(44) $$\Theta_\mu(\xi,\eta) = (\xi,\eta)$$

la cui soluzione è (0,0) per $\mu = 0$, ha una ed una sola soluzione vicina a (0,0) per μ abbastanza piccolo, per il teorema della funzione implicita ordinario. Perciò per μ abbastanza piccolo esiste una orbita periodica che è la continuazione dell'orbita circolare $\xi = \eta = 0$, purchè valga la (43) cioè purchè : $\omega_\circ = \dfrac{2\pi}{n_\circ - 1} \neq 2k\pi$ cioè $n_\circ - 1 \neq \dfrac{1}{k}$, k intero, "*ordine di risonanza* > 1" . Tale orbita periodica si dice *orbita periodica di 1ª specie* (di Poincaré) del problema (20).

Questo risultato ottenuto con il teorema delle funzioni implicite elementare ci pone l'interrogativo: esiste un'altra forma di teorema delle funzioni implicite che ci consenta di trovare non un punto fisso, ma una curva invariante chiusa

(45) $$\gamma_\mu : s \longmapsto (\xi(s)\ \eta(s)) \qquad \gamma_\mu(s) = \gamma_\mu(s+2k\pi)$$

tale che su di essa il flusso sia lineare nel parametro s , cioè valga :

$$(46) \qquad \gamma_\mu(s+2\pi\sigma) = \Theta_\mu \circ \gamma_\mu(s) \qquad s \in R$$

per ogni $\mu \geq 0$ abbastanza piccolo?

Ogni simile curva invariante su S darebbe luogo ad un toro invariante nello spazio delle fasi, e quindi ad un sistema ad 1 parametro s di soluzioni condizionalmente periodiche. Già *G.D. Birkhoff* (1927) trovò una serie di potenze che definiva formalmente un cambiamento di variabili con cui era possibile ricondurre l'applicazione Θ_μ di Poincaré per $\mu > 0$ alla forma (42) che essa aveva per $\mu = 0$, con $\omega_0 = \omega_0(\mu)$, $\omega_1 = \omega_1(\mu)$ ... Tuttavia tale cambiamento di variabili non poteva convergere in un intero intorno di $\xi = \eta = 0$ perchè altrimenti vi sarebbero stati troppi tori invarianti, tanti da contraddire il teorema degli integrali primi: ed in effetti nella definizione della funzione generatrice W della trasformazione cercata da Birkhoff compaiono i *piccoli divisori* $k_1 n - k_2$ che possono annullarsi per $n = \frac{1}{L^3}$ razionale o essere tanto "piccoli" da far divergere la serie.

Soltanto negli anni '60 fu possibile provare che tuttavia la funzione generatrice e quindi la trasformazione erano definite su *alcuni* tori, il che equivale a trovare le curve invarianti (45), (46) : precisamente sia $\Lambda = L$ tale che $n = \frac{1}{L^3}$ sia non solo irrazionale, ma non troppo ben approssimabile con i razionali, cioè tale che esistano due costanti $c(n)$, $r(n) > 0$ tali che :

$$(47) \qquad | k_1 n - k_2 | \geq c(| k_1 | + | k_2 |)^{-r} \qquad (k_1, k_2) \neq (0,0)$$

Allora *il toro invariante definito da* H_0, $\Lambda = L$ *è conservato per*

$\mu > 0$, *cioè esiste una curva invariante* γ_μ che soddisfa (45) e (46) con $\sigma = \frac{1}{n-1}$, $n = \frac{1}{L^3}$, identicamente rispetto a μ *per* μ *abbastanza piccolo.*

(Teorema di Kolmogorov - Arnold, 1963).

Ora i numeri irrazionali n che soddisfano alla (47) per qualche c , r sono quasi tutti (il loro complementare ha misura 0) ma non riempiono alcun intervallo: cioè "quasi tutti" i tori sono conservati per qualche $\mu \geq 0$, però nessun aperto può essere riempito di tori conservati. Al contrario i tori con numero di rotazione razionale sono "distrutti" dalla perturbazione e di essi restano solo orbite periodiche isolate, continuazione di orbite ellittiche risonanti del problema dei 2 corpi in coordinate sinodiche (*orbite periodiche di 2ª specie di Poincaré-Birkhoff--Arenstorf*).

Questo risultato non solo risponde positivamente alla domanda sull'esistenza di soluzioni "condizionalmente periodiche" posta da Weierstrass (e Platone), ma consente di risolvere il problema della stabilità delle soluzioni.

Prendiamo infatti un'orbita risonante circolare con $q\, n_\circ - p = 0$; per $\mu > 0$ da essa si otterrà per deformazione un'orbita periodica di 1ª specie. Con tecniche ancora più sottili di quelle di Arnold, *Moser e Siegel* hanno provato che se $\omega_\circ \neq \frac{2\pi k}{h}$, $h = 1,2,3,4$, k int., cioè se

(48) $\quad n_\circ \neq 1 + \frac{h}{k} \qquad h = 1,2,3,4$, k int. ovvero $n_\circ \neq p/q$ con $|p| - |q| \leq 4$

(ordine di risonanza > 4 *)*, allora *in un intorno piccolo a piacere di* $\xi = \eta = 0$ *l'applicazione* Θ_μ *possiede (per* μ *abbastanza piccolo) infinite curve invarianti* (45) (46) . Perciò l'orbita periodica α di 1ª specie ottenuta dal punto unito di Θ_μ è circondata da tori invarianti arbitrariamente vicini, che sulla superficie di livello di H_o in cui si svolge il moto *separano un sistema fondamentale di intorni di* α *dall'esterno rendendoli invarianti per il flusso integrale*: ogni condizione iniziale assegnata vicino ad α dà perciò luogo ad una soluzione per sempre ($t \in \mathbb{R}$) imprigionata tra due tori invarianti. *(Stabilità per* $t \longrightarrow \pm \infty$). La situazione estremamente complicata che si produce nell'intorno di una di queste orbite periodiche risonanti di 1ª specie è descritta dalla figura (da Arnold) nella quale possiamo notare che delle orbite periodiche di 2ª specie alcune sono stabili e circondate a loro volta da tori invarianti, altre instabili e accompagnate da varietà invarianti che si intersecano tra loro dando luogo ad un intrico di intersezioni (*punti eteroclinici ed omoclinici*).

Gran parte della teoria moderna dei sistemi dinamici strutturalmente stabili nasce dallo studio di queste varietà invarianti, ma questo discorso ci porterebbe fuori tema.

Bibliografia:

A.N. Kolmogorov, "*The general theory of dynamical systems and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics*" Address to 1954 International Congress of Mathematicians ; ristampato in Abraham, R. - Marsden J. ," *Foundations of mechanics*" Benjamin 1967

./.

Bibliografia:

./. V. Arnold, "*Small denominators and problems of stabilityof motion in classical and celestial mechanics*" Russian Mathematical Surveys 1963 .

J. Moser, "*Stable and random motions in Dynamical Systems*" Princeton University Press 1973 .

C.L. Siegel - J.K. Moser, *Lectures on celestial mechanics*" Springer 1971 .

Fig.10: struttura qualitativa delle curve invarianti nell'intorno di un punto su di un'orbita periodica di prima specie con ordine di risonanza > 4 (da Arnold cit.).

§ 8. UNA REALTA' A PIU' DIMENSIONI.

Resta da discutere se i risultati fondamentali della cosiddetta "*teoria* KAM " (da Kolmogorov-Arnold-Moser) debbano considerarsi come una risposta conclusiva al problema fisico-matematico della meccanica celeste. Mi pare che la risposta debba essere dialettica: se da una parte questi risultati sono decisivi, e non possono più essere ignorati dai ricercatori in astronomia come dai filosofi della scienza, dall'altra occorre tenere presente l'insorgere di tre ordini di difficoltà: quelle matematiche, quelle fisiche, quelle di metodologia sperimentale.

Le difficoltà matematiche derivano principalmente dall'osservazione, già anticipata al § 4 , che una parte delle difficoltà del problema degli n corpi ($n \geq 3$) deriva dall'elevata dimensionalità dello spazio delle fasi. Ora i teoremi di Kolmogorov-Arnold e di Siegel-Moser si estendono al caso di N gradi di libertà dimostrando *l'esistenza di tori invarianti di dimensione* N (nello spazio delle fasi di dimensione 2N) *su cui il moto è condizionalmente periodico non degenere*. Ma sulla varietà di livello dell'integrale primo I noto (per esempio $I = H$ integrale di Jacobi nel caso del problema dei 3 corpi ristretto spaziale, con $N = 3$) che hanno dimensione $2N-1$, un toro di dim. N non separa lo spazio perchè ha codimensione $N - 1 > 1$ (per $N \geq 3$). Perciò un'orbita periodica di 1^a specie nel problema ristretto tridimensionale è "circondata" da tori $S^1 \times S^1 \times S^1$ invarianti, ma mescolate inestricabilmente a questi vi sono regioni piene di orbite che possono aggirare i tori ed avvicinarsi come allontanarsi indefinitamente dall'orbita periodica di 1^a

specie: queste sono esattamente le regioni in cui i termini secolari o a lungo periodo della perturbazione producono effetti che restano imprevedibili ancora oggi, 200 anni dopo Lagrange. Perciò lo studio delle intricatissime proprietà topologiche del moto in queste regioni "quasi-risonanti" resta un problema significativo aperto, così come resta il problema di calcolare numericamente un esempio significativo di orbita in queste regioni.

Le difficoltà fisiche sono legate ai mutamenti che ha subito la concezione generale del sistema solare e della sua storia; ai tempi di Newton la concezione prevalente sull'età dell'Universo era quella su cui si basò l'arcivescovo J. Ussher (1658) per calcolare, in base alle genealogie bibliche, l'età dell'Universo: secondo i suoi calcoli, l'Universo era stato creato nel 4004 A.C. (errore probabile: ± 1 anno) (+) Se i tempi sono di questo ordine di grandezza, allora i metodi perturbativi sono perfettamente adeguati a descrivere le condizioni iniziali del sistema solare al momento della creazione; ed i teoremi di Lagrange, Laplace, Poisson, anche se dimostrano non *l'invariabilità* né la *stabilità* dei semiassi maggiori delle orbite planetarie, ma solo che la derivata prima e in un certo senso anche la seconda dei semiassi maggiori rispetto al parametro perturbativo sono costanti nel tempo (tolti i termini periodici), erano dei risultati adeguati ad assicurare la "stabilità pratica" del sistema solare su tempi dell'ordine delle migliaia di anni. Ma già Laplace e Kant avevano

---

(+) Giordano Bruno non era d'accordo, e anche per questo fece una brutta fine (1600).

allargato di molto la scala dei tempi dell'età dell'Universo, formulando delle teorie sulla nascita del sistema solare da una nebulosa primigenia: teoria che sembra chiaramente incompatibile con un creazionismo che accetti la lettera del testo Biblico, anche se non mi pare che Laplace si sentisse in grado di indicare quali tempi ipotizzare per la durata del sistema solare né per la durata del processo di formazione dello stesso.(++)

Nell'800 si sovrappone, nello stesso arco di anni, il prevalere di uno spirito più critico sul concetto di infinito in matematica, a partire da Cauchy, che portò naturalmente alla ricerca di soluzioni definite da serie convergenti per t tra $-\infty$ e $+\infty$ (Delaunay, Hill, Glyden, Linstedt, etc.); e il dibattito filosofico-scientifico sulla teoria dell'evoluzione delle specie.

Infatti, tra le molte obiezioni avanzate alla teoria di *Charles Darwin* (1859) sull'evoluzione delle specie fino all'uomo, vi era anche quella apparentemente fondata che l'evoluzione postulata da Darwin, se non si ammettono meccanismi discutibili come la trasmissione di caratteri acquisiti, richiede in base alla sola selezione naturale un numero enorme di generazioni, incompatibile, almeno per gli animali superiori, con un arco di tempo di poche migliaia di anni. La risposta decisiva a questa obiezione venne soprattutto dalla geologia, che con i progressi

---

(++) Poiché ancora nel'700 in Francia si celebravano crudelissimi processi per eresia, di cui ci dà vivida testimonianza Voltaire, può darsi che Laplace non volesse sbilanciarsi. Potrebbe essere interessante decidere questo punto con una ricerca storica precisa.

della tecnica stratigrafica nata alla fine del '700 mostrò sulla base di una evidenza "terrestre" che l'età della terra era di molti milioni di anni; tuttavia anche gli studi astrofisici ebbero un ruolo importante.

Fu *George Darwin* (figlio di Charles Darwin) a studiare per primo in modo quantitativo l'effetto di attrito della marea lunare sulla terra. Da questo studio risulta che la Terra rallenta lentamente il suo moto di rotazione cedendo momento angolare al moto di rivoluzione della Luna che si allotana; se si suppone che Terra e Luna si siano formate da un corpo ruotante unico per scissione(+) , allora il processo di allontanamento della Luna e di rallentamento della rotazione terrestre non può essere durata meno di 50 milioni di anni, limite minimo (corrispondente ad un rendimento del 100°/∘ del ciclo meccanico della marea) certamente di molto inferiore alla realtà.

Questo risultato, poi precisato e ampliato da Poincaré, è di importanza decisiva perchè da una parte rafforza la teoria dell'evoluzione, avvicinando di molto l'età prevista della Terra alla scala di tempi oggi in uso (4,6 miliardi di anni per la Terra, circa 15 miliardi di anni per l'Universo); dall'altra perchè è forse il primo risultato (quantitativo) di astronomia che non è basato sui presupposti della *meccanica celeste* : cioè non suppone che il sistema dinamico sia *conservativo*. I corpi celesti non solo non sono "eterni, divini ed immutabili" (Platone) e non scorrono su "volte tanto più divine quant'elle son dal centro più remote" (Dante, Paradiso XXVIII) ma la loro imperfezione diventa non

---

(+) e anche in altre ipotesi complicate da descrivere, per esempio la "cattura mareale" .

solo teoricamente possibile, ma anche oggetto di misure fisiche, e causa di attriti come quelli normali nella meccanica terrestre, anche se più piccoli in rapporto alle grandezze in giuoco. In questo contesto il problema della stabilità del sistema solare acquista un significato molto diverso, tanto che si può ricercare - almeno per i sistemi pianeta / satellite - un tipo diverso di stabilità, la *stabilità asintotica*. In conclusione nella ricerca attuale il problema della stabilità del sistema solare deve essere affrontato in tre modi diversi su tre scale di tempi diverse; con tecniche perturbative (o numeriche) per archi di tempo di migliaia di anni; con metodi basati sulla teoria delle risonanze e dei piccoli divisori per archi di tempo di milioni di anni; con modelli non conservativi su scale di tempo di miliardi di anni.

Resta da accennare alle difficoltà insite nella ricerca di corrispondenze tra teorie matematiche raffinate con la KAM e le osservazioni. Va detto che un esame preciso di questa corrispondenza è ancora da fare: la figura dimostra chiaramente che la teoria rende ragione di molte caratteristiche qualitative delle osservazioni per quanto riguarda la fascia asteroidale (trattata come problema dei 3 corpi ristretto) : i "gap di Kirkwood" si presentano in corrispondenza delle risonanze con ordine di risonanza ≤ 3 che, come dimostrò Levi-Civita, sono instabili; in presenza di risonanze con ordine 4 e 5 vi sono dei gap meno pronunciati (non è ancora stata pubblicata alcuna dimostrazione della stabilità delle risonanze di ordine 4 , anche se Siegel e Moser affermano che esse sarebbero stabili).

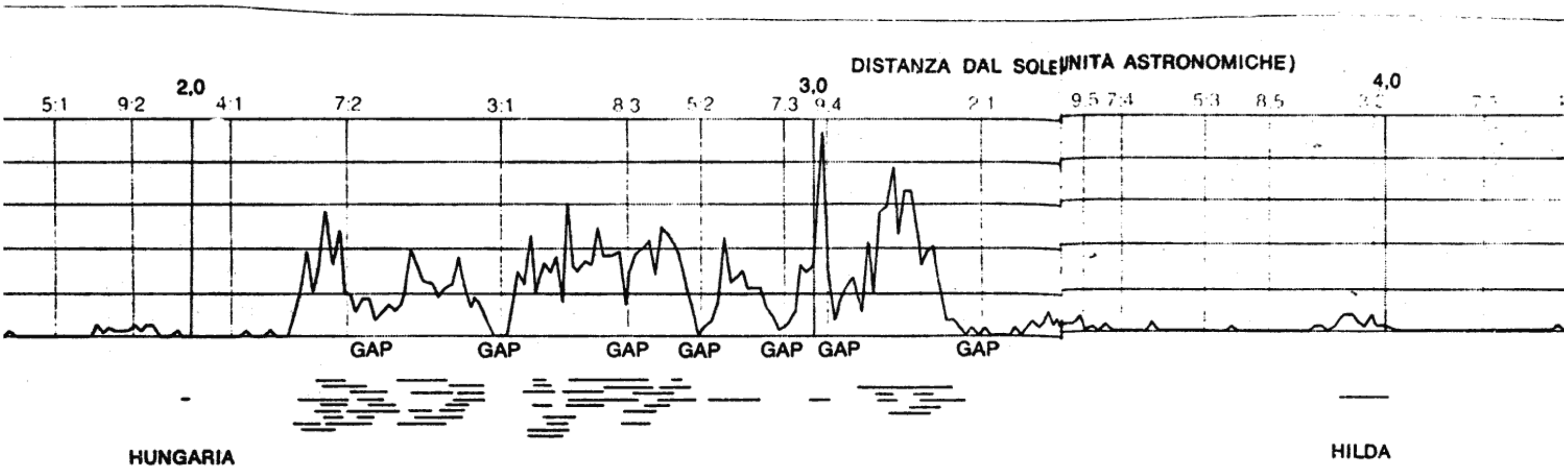


Fig.11: i "gap" di Kirkwood nella distribuzione degli asteroidi tra Marte e Giove. Le risonanze 4/1,3/1,5/2 e 2/1 sono certamente instabili nell'approssimazione del problema ristretto piano (Levi-Civita);quelle 7/2,8/3 e 9/4 sono stabili (Moser);quella 7/3 è probabilmente stabile(Siegel e Moser). (da"*Il sistema solare nelle esplorazioni spaziali*"cit.).

Tuttavia una teoria quantitativa della profondità e larghezza dei gap non sembra ancora pronta, anche se la teoria KAM potrebbe forse essere impiegata anche per questo.

Ma non si può parlare della verifica sperimentale odierna delle teorie meccaniche senza accennare al fatto che l'uso dei calcolatori elettronici recenti (a circuiti integrati) rende possibile uno studio numerico delle orbite saltando le metodologie analitiche tradizionali, partendo dalle equazioni di Newton in coordinate cartesiane (per es.

con i metodi di *Cowell* e di *Adams*).

Il conflitto culturale tra "numerici" e "analisti" sembra al centro del dibattito scientifico attuale; poichè tuttavia i dati sperimentali deducibili dalle traiettorie delle sonde spaziali sono utilizzabili solo se filtrati attraverso una considerevole analisi numerica dei dati, e nello stesso tempo è un'illusione pensare che non vi siano limiti all'uso dei metodi tipo differenze finite nella soluzione di equazioni differenziali *per un lungo arco di tempo*, sembra difficile che una verifica delle teorie meccaniche (sia classiche che relativistiche) su problemi delicati come gli asteroidi o i satelliti dei pianeti esterni possa essere ottenuta senza una sintesi dei due tipi di metodologie.

Bibliografia:

H. Poincaré, "*Leçons sur les Hypothèses Cosmogoniques*" Hermann 1913

G. Darwin, "*La Marea*" Torino 1905

A.A.V.V. , "*Il sistema solare nelle esplorazioni spaziali*" ed. Le Scienze , 1976 .

R. Greenberg, "*Orbit-Orbit resonances in the solar system: varieties and similarities*" Vistas in Astronomy 21 (1977) 209-239.