atomica su J, con codominio $\{0,1\}$.

$\mathcal{U}$ si dice principale se

$$H = \bigcap_{X \in \mathcal{U}} X \neq \emptyset .$$

E' facile vedere che, se $\mathcal{U}$ è principale, esiste $x \in J$ tale che

$$H = \{x\}$$

e

$$\mathcal{U} = \{X \subseteq J : x \in X\},$$

e quindi μ è concentrata in x.

Se J è finito, tutti gli ultrafiltri in J sono di tipo principale, come è facile verificare; è necessario allora supporre J infinito, se si vogliono considerare ultrafiltri non principali in J.

Ad un ultrafiltro non principale corrisponde una massa atomica agglutinata (cfr.[8]) su J, e viceversa.

2. La μ-potenza $^*\mathcal{E}$ come estensione della struttura $\mathcal{E}$.

Un elemento di E^J sarà indicato con $(f(i))$; in particolare, si indicherà con (f) una funzione che assume su J il valore costante $f \in E$.

Sia

$$\gamma : E \to {}^*E$$

tale che

$$\gamma(e) = [e] \text{ (4)}$$

Essendo γ iniettiva, E si può riguardare come sottoinsieme di $^*E$, identificando l'elemento $e \in E$ con la classe delle funzioni che assumono q.o. il valore costante e.

Si osservi che se μ è concentrata in un unico punto $\{i_0\} = \bigcap_{I \in \mathcal{J}} I$, siccome

(4) Denotiamo, in generale, con $[f(i)]$ invece di $[(f(i))]$ la classe di equivalenza rispetto a $\overset{*}{=}$, rappresentata da $(f(i))$.

$\mu(\{i_0\}) = 1$, due elementi f e g di F sono equivalenti se e solo se

$$f(i_0) = g(i_0) .$$

Pertanto, dato un qualunque elemento

$$[f(i)] \in {}^*E ,$$

si ha

$$[f(i)] = \{f \in F : f(i_0) = e_0 \in E\},$$

e allora

$$[f(i)]$$

è necessariamente immagine (secondo φ) di $e_0 \in E$, cioè φ è, in tal caso, anche suriettiva. Ciò vuol dire che $^*E$ <u>non</u> costituisce un'estensione <u>propria</u> di E.

Viceversa, sia ora μ una massa arbitraria, ma <u>non</u> concentrata in <u>un</u> punto $i_0 \in J$ (cioè μ può essere, per esempio, concentrata in più punti, agglutinata, non atomica, continua: cfr., per questa terminologia, [8]).

Allora esiste $I \subseteq J$, con $\mu(I) = 1$ e card $I > 1$.

Se card $I \leq$ card E, possiamo definire una funzione <u>iniettiva</u>

$$f : I \to E$$

(ed ogni suo prolungamento a tutto J individua lo stesso elemento $[f(i)]$ di $^*E$).

Ne segue che, per qualunque $e \in E$, <u>non</u> può aversi $f(i) = e$ q.o. in J, e quindi

$$[f(i)] \in {}^*E - \varphi(E) ,$$

cioè $^*E$ è un'estensione <u>propria</u> di E.

3. La struttura $^*\mathbb{N}$

Sia $\mathfrak{C} = \mathbb{N}$, struttura dei naturali; J sia l'insieme N dei naturali come insieme di indici, e μ sia una massa su $\mathcal{P}(N)$, non concentrata, con