Un'introduzione ai metodi non-standard attraverso le misure semplicemente additive

ALBERTO GIANNONE (LECCE)

ABSTRACT. *Some fundamental ideas of non standard analysis are introduced through an arbitrary finitely additive measure (extending the two-valued one corresponding to the case of an ultrafilter) on the set of indices occurring in the construction of the superstructure.*

La seguente introduzione ad alcuni concetti fondamentali dell'analisi non-standard, prescindendo da considerazioni "metamatematiche" circa l'ammissibilità di linguaggi, simboli e relative formule, generalizza la trattazione classica mediante il concetto di ultrapotenza, ed è accessibile anche a chi non abbia conoscenze specifiche di logica matematica. Al concetto di ultrapotenza sostituiamo quello più generale di μ-potenza, ottenuto considerando, sull'insieme J degli indici mediante il quale viene costruita la struttura "prodotto", una misura μ (non negativa), finita, semplicemente additiva (in breve, massa). Pertanto il concetto di "verità" rispetto a un ultrafiltro in J, che consente di trasferire una proprietà dalla struttura di partenza a quella prodotto, viene sostituito da quello di proprietà valida μ-q.o. in J (cioé in $J - I_0$, con I_0 insieme μ-nullo) o, se si preferisce (assumendo $\mu(J) = 1$, cioé μ misura di probabilità semplicemente additiva) da quello di proprietà "quasi certa" (cioé valida con probabilità uguale ad 1).

La trattazione classica mediante gli ultrafiltri si ottiene non appena si prenda, in particolare, una massa atomica su J, con codominio $\{0,1\}$; tale massa può essere concentrata in un solo punto oppure agglutinata su J, a seconda che il corrispondente ultrafiltro sia principale o no.

1. Il concetto di μ-potenza

Dato un insieme di indici J, sia μ una misura non negativa, semplicemente (cioé "finitamente") additiva su $\mathcal{P}(J)$ e tale che $\mu(J) < +\infty$.

Secondo la terminologia adottata anche da R. Scozzafava [8], chiameremo massa una tale μ. Non è restrittivo supporre $\mu(J) = 1$, così che il codominio di μ è contenuto in $[0,1]$.

Sia, inoltre, $\mathfrak{G} = (E,Q)$ una struttura costituita da un insieme E (sostegno) e da un insieme Q di relazioni in E.

A partire da $\mathfrak{G}$ e dall'insieme:

$$\mathfrak{J} = \{I \subseteq J : \mu(I) = 1\}\ ^{(1)},$$

si consideri la struttura:

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{J}} = (F, {}^*Q)\ ,$$

dove $F = E^J$ è l'insieme delle funzioni da J in E, e ${}^*q_n \in {}^*Q$, relazione n-aria in F, è così definita:
se $(f_1,f_2,\dots f_n)$ è una n-pla ordinata di elementi di F e q_n è una relazione n-aria in E, allora:

$$(f_1,f_2,\dots f_n) \in {}^*q_n$$

se e solo se

$$(f_1(i),f_2(i),\dots f_n(i)) \in q_n \quad \text{q.o.} \quad \text{per} \quad i \in J\ ^{(2)}$$

Esempio. Se q_2 è la relazione di uguaglianza in E ed f,g sono due elementi di F, si ha:

---

(1) Si noti che: 1) $\emptyset \notin \mathfrak{J}$; 2) se $I_1 \in \mathfrak{J}$ e $I_2 \in \mathfrak{J}$, allora $I_1 \cap I_2 \in \mathfrak{J}$; 3) se $I_1 \in \mathfrak{J}$ $I_1 \subseteq I_2 \subseteq J$, allora $I_2 \in \mathfrak{J}$. Pertanto $\mathfrak{J}$ è un filtro in J.

(2) cioé in $J - I_o$, con I_o insieme μ-nullo; si osservi che $J - I_o \in \mathfrak{J}$.

$$f \overset{*}{=} g$$

se e solo se

$$f(i) = g(i) \text{ q.o. } \quad \text{per} \quad i \in J$$

Se una relazione binaria q_2 in E è di equivalenza, lo è anche la corrispondente relazione $^*q_2$ in F, in quanto essa risulta, ovviamente, riflessiva e simmetrica ed è anche transitiva, perché se

$$(f,g) \in {}^*q_2$$

e

$$(g,h) \in {}^*q_2 ,$$

allora

$$(f(i),g(i)) \in q_2 \text{ per } i \in J - I_1 \text{ (con } \mu(I_1) = 0)$$

e

$$(g(i),h(i)) \in q_2, \text{ per } i \in J - I_2 \text{ (con } \mu(I_2) = 0);$$

quindi

$$(f(i),h(i)) \in q_2, \text{ per } i \in J - (I_1 \cup I_2) ;$$

e siccome si ha

$$\mu(I_1 \cup I_2) = 0 ,$$

ciò vuol dire che:

$$(f,h) \in {}^*q_2 .$$

La struttura che si ottiene da $\mathcal{E}_{\mathcal{J}}$ sostituendo ad F l'insieme $^*E$, quoziente di F rispetto alla relazione $\overset{*}{=}$, si dice una μ-potenza di $\mathcal{E}$, e sarà denotata col simbolo:

$$^*\mathcal{E} = (^*E, {}^*Q)$$

In particolare, se $\mathcal{J}$ risulta essere un ultrafiltro (in tal caso lo indicheremo con $\mathcal{U}$ (3)) $^*\mathcal{E}$ si dice "ultrapotenza di $\mathcal{E}$ rispetto ad $\mathcal{U}$ ".

Ciò si verifica se e solo se (cfr. ad es., [3], pag. 357-58) la massa μ è

(3) $\mathcal{U}$ è un filtro in J che soddisfa l'ulteriore condizione: se $X \subset J$, allora o $X \in \mathcal{U}$ oppure $J - X \in \mathcal{U}$.

atomica su J, con codominio $\{0,1\}$.

$\mathcal{U}$ si dice principale se

$$H = \bigcap_{X \in \mathcal{U}} X \neq \emptyset .$$

E' facile vedere che, se $\mathcal{U}$ è principale, esiste $x \in J$ tale che

$$H = \{x\}$$

e

$$\mathcal{U} = \{X \subseteq J : x \in X\},$$

e quindi μ è concentrata in x.

Se J è finito, tutti gli ultrafiltri in J sono di tipo principale, come è facile verificare; è necessario allora supporre J infinito, se si vogliono considerare ultrafiltri non principali in J.

Ad un ultrafiltro non principale corrisponde una massa atomica agglutinata (cfr.[8]) su J, e viceversa.

2. La μ-potenza ${}^*\mathcal{E}$ come estensione della struttura $\mathcal{E}$.

Un elemento di E^J sarà indicato con $(f(i))$; in particolare, si indicherà con (f) una funzione che assume su J il valore costante $f \in E$.

Sia

$$\varphi : E \to {}^*E$$

tale che

$$\varphi(e) = [e]\ ^{(4)}$$

Essendo φ iniettiva, E si può riguardare come sottoinsieme di ${}^*E$, identificando l'elemento $e \in E$ con la classe delle funzioni che assumono q.o. il valore costante e.

Si osservi che se μ è concentrata in un unico punto $\{i_0\} = \bigcap_{I \in \mathcal{F}} I$, siccome

(4) Denotiamo, in generale, con $[f(i)]$ invece di $[(f(i))]$ la classe di equivalenza rispetto a $\overset{*}{=}$, rappresentata da $(f(i))$.

$\mu(\{i_0\}) = 1$, due elementi f e g di F sono equivalenti se e solo se

$$f(i_0) = g(i_0) .$$

Pertanto, dato un qualunque elemento

$$[f(i)] \in {}^*E ,$$

si ha

$$[f(i)] = \{f \in F : f(i_0) = e_0 \in E\},$$

e allora

$$[f(i)]$$

è necessariamente immagine (secondo φ) di $e_0 \in E$, cioé φ è, in tal caso, anche suriettiva. Ciò vuol dire che $^*E$ <u>non</u> costituisce un'estensione <u>propria</u> di E.

Viceversa, sia ora μ una massa arbitraria, ma <u>non</u> concentrata in <u>un</u> punto $i_0 \in J$ (cioé μ può essere, per esempio, concentrata in più punti, agglutinata, non atomica, continua: cfr., per questa terminologia, [8]).

Allora esiste $I \subseteq J$, con $\mu(I) = 1$ e card $I > 1$.

Se card $I \leq$ card E, possiamo definire una funzione <u>iniettiva</u>

$$f : I \to E$$

(ed ogni suo prolungamento a tutto J individua lo stesso elemento $[f(i)]$ di $^*E$).

Ne segue che, per qualunque $e \in E$, <u>non</u> può aversi $f(i) = e$ q.o. in J, e quindi

$$[f(i)] \in {}^*E - \varphi(E) ,$$

cioé $^*E$ è un'estensione <u>propria</u> di E.

3. La struttura $^*\mathbb{N}$

Sia $\mathcal{C} = \mathbb{N}$, struttura dei naturali; J sia l'insieme N dei naturali come insieme di indici, e μ sia una massa su $\mathcal{P}(N)$, non concentrata, con

$\mu(N) = 1$.

In particolare, possiamo prendere (come nella trattazione classica) una μ avente codominio $\{0,1\}$ e tale che $\mu(Y) = 1$ se l'insieme $N-Y$ è finito.

Allora il filtro

$$\{ X \subseteq N : \mu(X) = 1\},$$

è necessariamente un ultrafiltro $\mathcal{U}$ in N, non principale (essendo μ non concentrata). Detto Q l'insieme delle relazioni in N, si considera

$$\mathbb{N}_{\mathcal{U}} = (F, {}^*Q),$$

dove F è l'insieme delle <u>successioni</u> in N (o "aritmetiche").

La struttura

$$^*\mathbb{N} = ({}^*N, {}^*Q),$$

che si ottiene da $\mathbb{N}_{\mathcal{U}}$ con il procedimento descritto al n. 1, è una μ-potenza (in particolare, un'ultrapotenza) di $\mathbb{N}$, che è un'estensione <u>propria</u> di $\mathbb{N}$.(5)

Sia

$$\varphi : N \to {}^*N, \qquad \text{con } \varphi(m) = [m];$$

si individua un elemento di $^*N$ che "non proviene" (mediante φ) da alcun elemento di N, definendo la funzione iniettiva (introdotta alla fine del n.2) $f : N \to N$ mediante la $f(i) = i$.

Allora la classe $[i]$ è un elemento di $^*N$ che risulta "star-maggiore" di ogni elemento di N, cioè

$$[m] \overset{*}{<} [i], \qquad \text{per ogni } m \in N;$$

infatti, la relazione (elemento di $^*Q$) sopra scritta significa che, per ogni

(5) $^*\mathbb{N}$ si dice un modello elementare non-standard dell'aritmetica.

(fissato) $m \in N$, si ha:

$$m < i \quad \text{q.o.} \quad \text{per} \quad i \in N,$$

e questa disuguaglianza non è soddisfatta solo per $i = \{1,2,\ldots m\}$, insieme μ-nullo.

Ogni "numero" di $^*N$ che, come $[i]$, risulta *maggiore di un qualunque "numero" $[m]$ di N, si dice un naturale infinito.

In $^*N$ non è, quindi, vuoto il seguente insieme dei naturali infiniti:

$$N_1 = \{[\nu(i)] \in {}^*N : [m] \overset{*}{<} [\nu(i)] \ , \ \forall \ m \in N\} \quad (6)$$

Ogni numero di $^*N$ che non appartenga ad N_1 si dice naturale finito.

Si può verificare che in $^*\mathbb{N}$ valgono le solite proprietà delle operazioni aritmetiche. Una proprietà di $\mathbb{N}$ che, invece, non si "trasferisce" in $^*\mathbb{N}$ è il buon ordinamento.

Per convincersene, basta considerare, per esempio, l'insieme N_1 dei naturali infiniti: è chiaro che esso non può contenere un elemento minimo ν_0, perché se $\nu_0 \in N_1$, allora anche $\nu_0 - 1 > m$ per ogni $m \in N$, cioè $\nu_0-1 \in N_1$.

4. La struttura $^*\mathbb{R}$.

Con procedimento del tutto analogo a quello del n. 3, si può costruire una μ-potenza $^*\mathbb{R}$ a partire da $\mathbb{R}$, struttura dei reali, sempre assumendo come insieme degli indici $J = N$ (e quindi considerando successioni reali $(a(i))$ in luogo di successioni aritmetiche).

Anche $^*\mathbb{R}$ è un'estensione propria di $\mathbb{R}$(7), e non è vuoto il seguente

---

(6) Più semplicemente si può scrivere:
$N_1 = \{\nu \in {}^*N : m < \nu \ , \ \forall \ m \in N\}$, a patto di attribuire il corretto significato ad ogni simbolo.

(7) $^*\mathbb{R}$ si dice un modello elementare non-standard dell'analisi.

sottoinsieme dei numeri reali infiniti positivi:

$$R_1^+ = \{[\beta] \in {}^*R : [\alpha] \overset{*}{<} [\beta] \ , \ \forall \alpha \in R\} \quad (8) \ ,$$

perché almeno vi appartiene l'elemento $[i]$ (riguardando $a(i) = i$ come successione reale).

Si può dimostrare facilmente (cfr. ad es., [10]) che anche ${}^*\mathbb{R}$ (come $\mathbb{R}$) è un campo ordinato.

Allora è chiaro, dato $\beta \in {}^*R$, il significato del simbolo $|\beta|$, e pertanto possiamo definire in ${}^*R$ il sottoinsieme dei numeri reali infiniti:

$$R_1 = \{\beta \in {}^*R : \alpha < |\beta| \ , \ \forall \alpha \in R\} \ .$$

Ogni "numero" di ${}^*R$ che non appartenga ad R_1 si dice numero reale finito; poniamo:

$$R_F = {}^*R - R_1 = \{\beta \in {}^*R : \exists \ \alpha \in R^+ \text{ tale che } |\beta| < \alpha\}$$

Si osservi che il seguente sottoinsieme di R_F, detto insieme dei numeri reali infinitesimi, è non vuoto:

$$R_0 = \{\beta \in {}^*R : |\beta| < \alpha \quad , \ \forall \alpha \in R^+\} \quad (9) \ .$$

Infatti, se consideriamo la classe $\left[\frac{1}{i}\right] \in {}^*R$ e se come massa μ su $J = N$ prendiamo la stessa del n. 3 (che, in particolare, è nulla su ogni sottoinsieme finito di N), si ha, per ogni $\alpha \in R^+$,

$$\frac{1}{i} < \frac{1}{\alpha} \quad \text{q.o. per } i \in N.$$

Quindi $\beta = \left[\frac{1}{i}\right] \in R_0$. Si noti che lo zero è l'unico numero reale che appartiene a R_0.

---

(8) o, più semplicemente, $R_1^+ = \{\beta \in {}^*R : \alpha < \beta, \ \forall \alpha \in R\}$; cfr. nota (6).

(9) Si verifica facilmente che R_F è un anello e che R_0 è un suo ideale.

Concludiamo questo paragrafo osservando che

a) poiché ${}^{*}\mathbb{R}$ è un campo ordinato che contiene propriamente $\mathbb{R}$ (più precisamente, ${}^{*}\mathbb{R}$ contiene un sottocampo ordinato isomorfo ad $\mathbb{R}$), ${}^{*}\mathbb{R}$ non può essere archimedeo (10) e neanche completo (cfr. ad es. [4] e [9]).

b) ogni numero $\beta \in R_F$ si può rappresentare in modo <u>unico</u> come $\beta = r + \varepsilon$, con $r \in R$ ed $\varepsilon \in R_0$.

Infatti, se

$$A = \{a \in R : a \leq \beta\},$$

posto

$$r = \sup A,$$

si ha

$$r \in R :$$

basta allora verificare che

$$\beta - r \in R_0.$$

Ma <u>per ogni</u>

$$\alpha \in R^+$$

si ha

$$r + \alpha > \beta,$$

e pertanto, se

$$|\beta - r| = \beta - r,$$

si ha

$$|\beta - r| < \alpha ;$$

se invece

$$|\beta - r| = r - \beta$$

non può esistere

$$\alpha_0 \in R^+$$

tale che

$$|\beta - r| \geq \alpha_0 ,$$

altrimenti

$$r - \beta \geq \alpha_0 ,$$

cioé

$$r - \frac{\alpha_0}{2} > \beta . \quad \text{(impossibile)}$$

---

(10) nel senso usuale di "N-archimedeo": non è difficile però provare (cfr. ad. es [9]) che ${}^{*}\mathbb{R}$ è *N-archimedeo (ed è ovvio qual'è il significato da attribuire a questo termine). Un'osservazione analoga vale per la completezza.

Il numero reale r si dice la <u>parte standard</u> di β.

5. I sottoinsiemi "interni" di $^*\mathcal{E}$.

Data la struttura $\mathcal{E} = (E,Q)$ introdotta al n. 1, possiamo associarle la struttura

$$\hat{\mathcal{E}} = (\mathcal{P}(E), \hat{Q}),$$

dove $\hat{Q}$ è un insieme di relazioni in $\mathcal{P}(E)$, cioé fra sottoinsiemi di E.

Costruiamo una μ-potenza $^*\hat{\mathcal{E}}$, prendendo ancora $J = N$ e μ agglutinata, con valore 1 sui sottoinsiemi il cui complementare è finito.

Sia $^*\mathcal{P}(E)$ il sostegno di $^*\hat{\mathcal{E}}$: allora, se $\xi \in {}^*\mathcal{P}(E)$, un rappresentante di tale classe è una successione $(A(i))$ di sottoinsiemi $A(i) \subseteq E$.

Possiamo "identificare" $\xi \in {}^*\mathcal{P}(E)$ con un elemento dell'insieme $\mathcal{P}({}^*E)$, cioé con un sottoinsieme $G \subseteq {}^*E$, nel modo seguente:
gli elementi di G sono <u>tutte e sole le classi</u> $[e(i)]$ di successioni in E tali che

$$e(i) \in A(i) \qquad \text{q.o.} \quad \text{per} \quad i \in N.$$

Pertanto:

$$^*\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{P}({}^*E) .$$

Quindi chiameremo sottoinsiemi di $^*E$ anche gli elementi di $^*\mathcal{P}(E)$, a patto di intendere ciò nel senso della suddetta identificazione, cioé definendo una

$$\Phi : {}^*\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}({}^*E)$$

tale che

$$\Phi([A(i)]) = \{[e(i)] \in {}^*E : e(i) \in A(i) \text{ q.o. per } i \in N\} = G.$$

Esistono tuttavia elementi di $\mathcal{P}({}^*E)$ che <u>non</u> appartengono a $^*\mathcal{P}(E)$: per esempio, E stesso (o, più precisamente, $\varphi(E)$: cfr. n. 2); se fosse $E \in {}^*\mathcal{P}(E)$ (cioé se E fosse rappresentabile come l'insieme G) allora dovrebbe aversi $e \in A(i)$ q.o. per $i \in N$, <u>per ogni $e \in E$</u>; ciò implicherebbe $A(i)= E$ q.o., ma la classe $[A(i)] = [E] \in {}^*\mathcal{P}(E)$ individua (tramite Φ) l'insieme $^*E \in \mathcal{P}({}^*E)$, e <u>non</u> l'insieme E.

Quei particolari sottoinsiemi di $^*E$, che sono anche elementi di $^*\mathcal{P}(E)$, si dicono sottoinsiemi <u>interni</u> di $^*\mathcal{E}$.

Osserviamo che gli elementi $[e(i)] \in {}^*E$ si possono evidentemente riguardare come sottoinsiemi "interni", perché ognuno di essi si può ottenere considerando la successione di singoletti $A(i) = \{e(i)\}$.

<u>Esempio 1</u>. Abbiamo visto, alla fine del n. 3, che $^*\mathbb{N}$ <u>non</u> è bene ordinato.[11]

E' interessante osservare che, se ci limitiamo a considerare i sottoinsiemi "interni" di $^*\mathbb{N}$, cioé gli elementi di $^*\mathcal{P}(N)$ ognuno di essi ha minimo.[12]

Sia infatti $\xi \in {}^*\mathcal{P}(N)$ rappresentato dalla successione $(A(i))$, con $A(i) \subseteq N$; consideriamo $[a(i)] \in {}^*N$, elemento di ξ tale che $a(i) = \min A(i)$, e sia poi $[x(i)]$ un qualunque elemento di ξ.

Si ha $x(i) \geq a(i)$ q.o. per $i \in N$,

cioé

$$[x(i)] \overset{*}{\geq} [a(i)]$$

<u>Esempio 2.</u> Il sottoinsieme degli infinitesimi $R_0 \subset {}^*R$ <u>non</u> è "interno": osserviamo infatti che, se

$$[\varepsilon(i)] \in R_0,$$

si ha anche

$$[n\,\varepsilon(i)] \in R_0 \qquad \text{per ogni} \quad n \in N$$

(in particolare, per $\varepsilon(i) = \frac{1}{i}$ si ha $\left[\frac{n}{i}\right] \in R_0$); allora se R_0 fosse immagine secondo Φ di un elemento $[A(i)] \in {}^*\mathcal{P}(R)$, si avrebbe, per ogni $n \in N$, $\frac{n}{i} \in A(i)$ q.o. per $i \in N$, e quindi, in particolare (per $n = i$), $1 \in A(i)$ q.o. per $i \in N$, da cui $1 \in R_0$ (contraddizione).

---

(11) l'insieme N_1 dei naturali infiniti non ha minimo.

(12) ciò non esclude, naturalmente, che possano esistere sottoinsiemi <u>non</u> "interni" che abbiano minimo: per esempio, N.

6. I sottoinsiemi "*finiti" di $^*E$.

Data la struttura $\mathcal{E} = (E,Q)$, consideriamo

$$\hat{\mathcal{E}}_F = (\mathcal{P}_F(E),\ Q_F),$$

dove $\mathcal{P}_F(E)$ è l'insieme dei sottoinsiemi <u>finiti</u> di E, e Q_F un insieme di relazioni in $\mathcal{P}_F(E)$.

Consideriamo una μ-potenza $^*\hat{\mathcal{E}}_F$ (fissando l'attenzione, in particolare, sul sostegno $^*\mathcal{P}_F(E)$ ed assumendo, al solito, $J = N$ e μ agglutinata su J).

Ogni elemento di $^*\mathcal{P}_F(E)$ può essere identificato (come si è fatto al n. 5) con un elemento di $\mathcal{P}(^*E)$: questi particolari sottoinsiemi interni di $^*E$, così ottenuti, si dicono * <u>finiti</u>. (Un insieme * finito è dunque un sottoinsieme di $^*E$, i cui elementi $[a(i)]$ si possono ottenere "estraendo" la successione $(a(i))$ da una successione $(A(i))$ di sottoinsiemi di E q.o. <u>finiti</u> per $i \in N$).

Ogni sottoinsieme finito di E è anche * finito (ma non viceversa!). Infatti se

$$D = \{e_1, e_2, \dots e_p\} \subset E,$$

e consideriamo la successione (D), l'insieme * finito che essa individua è proprio $\{e_1, e_2, \dots e_p\}$, perché ogni successione $e(i)$ di elementi di E, ottenuta tramite Φ da (D), ha codominio D, e quindi dà luogo ad una partizione <u>finita</u> di N in p insiemi

$$M_k = \{i \in N : e(i) = e_k\}, \qquad k = 1,2,\dots p;$$

uno solo, M_h, di essi, ha misura 1, e pertanto

$$[e(i)] = e_h;$$

d'altra parte è ovvio che ogni $e_k (k = 1,2,\dots p)$ si può ottenere in questo modo.

Un semplice esempio di insieme *finito che non è sottoinsieme finito di E si può dare per $E = N$, considerando il "segmento iniziale"

$$S = \{1,2,\ldots n,\ldots \nu\}$$

di $^*N$, dove ν è un numero naturale infinito (cfr. n. 3).

Per verificare che S è *finito, basta osservare che S è immagine secondo Φ dell'elemento $[A(i)] \in {}^*\mathcal{P}_F(N)$ rappresentato da

$$A(i) = \{1,2,\ldots i\} .$$

Gli insiemi interni e gli insiemi *finiti hanno particolare importanza in molte applicazioni dei metodi non standard dell'analisi, per esempio, nella cosiddetta "teoria della misura non standard" ([1] , [2]).

In particolare, questa teoria permette un nuovo approccio alle misure semplicemente additive: così il concetto di "massa", che interviene, nella nostra impostazione, a livello di costruzione della teoria non-standard, può essere a sua volta approfondito mediante la teoria stessa: verrebbe spontaneo dire ... "il cerchio si chiude", se non ci si trovasse, invece, di fronte ad un vasto campo di ricerche che ... si apre!

7. Bibliografia

Per concludere, diamo solo un minimo di riferimenti bibliografici, rimandando, per una bibliografia più vasta, a quella elencata in [5]:

[1] A.R.BERNSTEIN, F.WATTENBERG, Non-standard measure theory, in W.A.J.Luxemburg (ed.):"Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability", Holt and Rineardt (1969), pp. 171-185.

[2] A.R.BERNSTEIN, A non-standard integration theory for unbounded functions, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.,20 (1974), pp. 97-108.

[3] E.HEWITT,K.STROMBERG, Real and Abstract Analysis, Springer-Verlag, Berlin,(1969).

[4] H. LEVITZ Non-standard Analysis: an exposition, L'enseignement mathématique, 20, (1974), pp. 9-32.

[5] G.LOLLI, Non-standard Analysis, Annual meeting of GNAFA-CNR, Rimini, Italy (1977)

[6] A.ROBINSON, Non-standard Analysis, North Holland, Amsterdam, (1966).

[7] A.ROBINSON, Introduzione alla teoria dei modelli e alla metamatematica dell'Algebra, Boringhieri,Torino,(1974)

[8] R.SCOZZAFAVA, Alcune osservazioni sulle misure di probabilità semplicemente additive. (In corso di pubblicazione, 1977)

[9] S.TAKAHASHI Méthodes logiques en géométrie diophantienne, Sem. Math. Sup. 1970, Montreal (1974), cap. IV.

[10] D.H.VAN OSDOL Truth with respect to an ultrafilter, or how to make intuition rigorous. Amer. Math. Monthly, 79,(1972),p.355-363.