5 APPLICAZIONE TANGENTE

0 Siano $F \hookrightarrow E$ e $F' \hookrightarrow E'$ due sottovarietà, rispettivamente di dimensione m e m'. Sia $f : F \to F'$ un'applicazione differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$) .

In questo paragrafo, dopo aver fatto vedere che il vettore $D\tilde{f}(p)(\bar{v})$ appartiene allo spazio $T_{f(p)}F'$, diamo la nozione (analoga a quella data sugli spazi affini) di "applicazione tangente" di f. Inoltre, considerati due sistemi di coordinate adattati a F e a F', precisiamo l'espressione locale di Tf.

Concludiamo con un breve studio di alcune applicazioni differenziabili.

1.5.1. LEMMA Sia $\bar{v} \in T_pF$.

Allora, il vettore

$$D\tilde{f}(p)(\bar{v}) \in T_{f(p)}F'$$

ed esso non dipende dalla scelta dell'estensione differenziabile $\tilde{f} : U \to F' \hookrightarrow E'$.

D. Esiste una curva differenziabile $c : \mathbb{R} \to F \hookrightarrow E$ tale che

$$\bar{v} = Dc(o) \qquad ,c(o) = p \ .$$

Allora, è

$$\tilde{f} \circ c = f \circ c \quad : \mathbb{R} \to F' \hookrightarrow E' \quad .$$

Pertanto

$$D\tilde{f}(p)(\bar{v}) = D(\tilde{f} \circ c)(o) = D(f \circ c)(o) \in T_{f(p)} F' \qquad \dot{-}$$

1.5.2. Possiamo dare, allora, la nozione di "applicazione tangente" di f.

DEFINIZIONE

Dicesi APPLICAZIONE TANGENTE di f l'applicazione

$$Tf : TF \to TF'$$

data da $$Tf : (p,\bar{v}) \mapsto (f(p), D\tilde{f}(p)(\bar{v}))$$ $\dot{-}$

1.5.3. La seguente proposizione dà l'espressione locale di Tf.

PROPOSIZIONE Siano $x \equiv (x^1,\ldots,x^n)$ e $y \equiv (y^{1'},\ldots,y^{n'})$ due sistemi di coordinate adattati ad F e ad F', rispettivamente(se $\dim E = n$, $\dim E' = n'$).

Allora, l'espressione locale di Tf è data da

$$\check{y}^i \circ Tf = y^i \circ f \equiv f^i$$

$$\check{y}^i \circ Tf = (\partial x_j . f^i) x^j$$ $\dot{-}$

1.5.4. COROLLARIO

Se f è di classe $\mathscr{C}^k$, allora Tf è di classe $\mathscr{C}^{k-1}$ $\dot{-}$

1.5.5. Vediamo ora due casi interessanti di applicazioni differenziabili.

1) CASO $f : \mathbb{R} \to F$.

Sia f un'applicazione differenziabile. Allora poniamo

$$df : \mathbb{R} \to TF$$

dove

$$df(\lambda) \equiv Tf(\lambda,1) \qquad , \forall \lambda \in \mathbb{R} .$$

2) CASO $f : F \to \mathbb{R}$.

Sia f un'applicazione differenziabile. Allora poniamo

$$\dot{f} : TF \to \mathbb{R}$$

dove

$$\dot{f}(p,\bar{v}) \equiv \pi^2(Tf(p,\bar{v})) = \tilde{D}f(p)(\bar{v}) \quad , \quad \forall (p,\bar{v}) \in TF .$$

1.5.6. PROPOSIZIONE Sia $x \equiv (x^1,\dots x^n)$ un sistema di coordinate adattato ad F.

Allora, $\forall\ 1 \leq i \leq m$, è

$$\dot{\overset{\circ}{x}}{}^i = \overset{\circ}{\dot{x}}{}^i \quad .$$

D. Per ogni $(p,\bar{v}) \in TF$, è

$$\dot{\overset{\circ}{x}}{}^i(p,\bar{v}) \equiv Dx^i(p)(\bar{v}) = \dot{x}^i(p,\bar{v}) = \overset{\circ}{\dot{x}}{}^i(p,\bar{v}) \qquad \underline{\cdot}$$