0 INTRODUZIONE

In questo capitolo facciamo uno studio dei più importanti sistemi di coordinate, applicati frequentemente in vari campi della Matematica e della Fisica.

Possiamo, quindi, rivedere tutte quelle nozioni del capitolo precedente espresse in un qualsiasi sistema di coordinate.

Il primo sistema, che andiamo ad introdurre, è un sistema di coordinate "cartesiano ortonormale" definito su uno spazio affine euclideo E di dimensione 3.

La facile estensione ad uno spazio di n dimensioni è lasciata al lettore.

Tale sistema rispetta la struttura affine ed è senza dubbio il più semplice, perciò è molto usato per studiare problemi che presentano o meno, simmetrie particolari.

Si vede inoltre che le basi indotte da questo sistema sono costanti.

Dunque, i simboli di Christoffel sono tutti nulli.

Introduciamo poi un sistema di coordinate "sferico" su E il quale, a differenza di quello cartesiano, non è definito in tutto lo spazio: in caso contrario una delle sue funzioni coordinate non sarebbe continua.

Tale sistema rispetta la simmetria sferica, pertanto viene privilegiato per lo studio di problemi a simmetria sferica; anche se esso è meno semplice di quello cartesiano.

Un altro sistema di coordinate interessante è quello "cilindrico", il quale non è definito in tutto lo spazio E: in caso contrario una delle sue fun zioni coordinate non sarebbe continua.

Inoltre, tale sistema rispetta la simmetria cilindrica, pertanto viene privilegiato per lo studio di problemi a simmetria cilindrica.

A differenza di quello cartesiano, quest'ultimi due sistemi di coordinate inducono delle basi non costanti.

Dunque i simboli di Christoffel (relativi ai sistemi cilindrico-sferico) non sono tutti nulli.

Un sistema di coordinate sferico o cilindrico, ristretti al piano equatoriale, danno luogo ad un unico sistema di coordinate detto "polare".

Diamo, infine, una rappresentazione grafica dei tre sistemi di coordinate (dim E = 3), individuati da un punto e da una base ortonormale assegnati, precisando così le relative funzioni e curve coordinate.

Si tenga presente che esistono infiniti altri sistemi di coordinate.

1 SISTEMA DI COORDINATE CARTESIANO ORTONORMALE

0 Sia E uno spazio affine euclideo di dimensione 3.

La facile estensione dei seguenti risultati ad uno spazio di n dimensioni è lasciata al lettore.

Cominciamo questo paragrafo definendo su E un sistema di coordinate cartesiano ortonormale che, senza dubbio, è quello più frequentemente applicato nell'analisi classica. Tale sistema, che è anche il più semplice, rispetta la struttura affine.

Si osservi che su E è possibile definire infiniti altri sistemi di coordinate (cartesiani e non cartesiani).

Definito un sistema di coordinate cartesiano ortonormale $E \to \mathbb{R}^3$, possiamo precisare le basi, l'una duale dell'altra, per i campi di vettori e di covettori su E, osservando che esse sono costanti. Pertanto possiamo rivedere tutte quelle nozioni del precedente capitolo, espresse in un qualsiasi sistema di coordinate. Conseguentemente, si vede che le matrici della metrica danno luogo ad un'unica matrice che è quella unità (δ^i_j).

Inoltre si vede che i simboli di Christoffel sono tutti nulli, poiché le basi, indotte dal sistema cartesiano, sono costanti.

6.1.1. DEFINIZIONE Sia $o \in E$ un punto di E e sia $B \equiv \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ una base ortonormale di $\bar{E}$.

Dicesi SISTEMA DI COORDINATE CARTESIANO ORTONORMALE individuato da (o,B), il sistema di coordinate

$$(x,y,z) : E \to \mathbb{R}^3$$

dato da

$$\begin{cases} x(p) \equiv (p-o) \cdot \bar{e}_1 \\ y(p) \equiv (p-o) \cdot \bar{e}_2 \\ z(p) \equiv (p-o) \cdot \bar{e}_3 \end{cases} \qquad \forall\, p \in E \quad .$$

Tale applicazione è biiettiva, poiché ogni vettore $(p-o)$ ha un'unica decomposizione secondo la base B.

In base ai teoremi di esistenza delle basi ortonormali in uno spazio vettoriale euclideo, si osserva che esistono infiniti sistemi di coordinate cartesiani ortonormali in uno spazio affine euclideo.

In seguito, per semplicità, indicheremo con (x,y,z) un sistema di coordinate cartesiano.

6.1.2. PROPOSIZIONE

Le tre funzioni coordinate $E \to \mathbb{R}$ del sistema cartesiano sono date da

$$\begin{cases} x(p) = \langle \underline{\epsilon}^1, (p-o) \rangle = \bar{e}_1 \cdot (p-o) \\ y(p) = \langle \underline{\epsilon}^2, (p-o) \rangle = \bar{e}_2 \cdot (p-o) \\ z(p) = \langle \underline{\epsilon}^3, (p-o) \rangle = \bar{e}_3 \cdot (p-o) \end{cases} \quad , \quad \forall\, p \in E \quad ,$$

avendo posto

$$\underline{\epsilon}^i \equiv {}'\underline{g}(\bar{e}_i) \qquad , \forall\, 1 \leq i \leq 3 \ .$$

Le tre curve coordinate $\mathbb{R}\times E \to E$ su E sono date da

$$x(\lambda,p) = p + \lambda\bar{e}_1$$

$$y(\lambda,p) = p + \lambda\bar{e}_2$$

$$z(\lambda,p) = p + \lambda\bar{e}_3 \qquad , \forall(\lambda,p) \in \mathbb{R} \times E \qquad \dot{-}$$

Si osservi che, con abuso di linguaggio, si è indicato con la stessa notazione le funzioni coordinate e le curve coordinate.

6.1.3. Dunque, possiamo determinare i tre campi di covettori e i tre campi di vettori su E, indotti da (x,y,z).

PROPOSIZIONE

E'

$$Dx = \underline{\epsilon}^1 \quad , \quad Dy = \underline{\epsilon}^2 \quad , \quad Dz = \underline{\epsilon}^3$$

$$\delta x = \bar{e}_1 \quad , \quad \delta y = \bar{e}_2 \quad , \quad \delta z = \bar{e}_3 \quad .$$

D. Infatti, poiché (x,y,z) è differenziabile, è

$$x(p+\bar{h}) = \langle \underline{\epsilon}^1, p-o \rangle + \langle \underline{\epsilon}^1, \bar{h} \rangle = x(p) + \langle \underline{\epsilon}^1, \bar{h} \rangle \Rightarrow Dx = \underline{\epsilon}^1$$

$$y(p+\bar{h}) = \langle \underline{\epsilon}^2, p-o \rangle + \langle \underline{\epsilon}^2, \bar{h} \rangle = y(p) + \langle \underline{\epsilon}^2, \bar{h} \rangle \Rightarrow Dy = \underline{\epsilon}^2$$

$$z(p+\bar{h}) = \langle \underline{\epsilon}^3, p-o \rangle + \langle \underline{\epsilon}^3, \bar{h} \rangle = z(p) + \langle \underline{\epsilon}^3, \bar{h} \rangle \Rightarrow Dz = \underline{\epsilon}^3 \quad .$$

Inoltre, è

$$\delta x(p) = D_1 x(o,p) = \bar{e}_1$$

$$\delta y(p) = D_1 y(o,p) = \bar{e}_2$$

$$\delta z(p) = D_1 z(o,p) = \bar{e}_3 \qquad \dot{-}$$

Dunque, il sistema di coordinate cartesiano (x,y,z) induce la base costante $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ per i vettori di $\bar{E}$ e la base costante $\{\underline{\epsilon}^1,\underline{\epsilon}^2,\underline{\epsilon}^3\}$ per i covettori di $\bar{E}^*$, l'una duale dell'altra.

6.1.3. COROLLARIO

E'

$$\Gamma_{ij}^{k} = o \qquad , \forall\ 1 \leq i,j,k \leq 3.$$

E'

$$g^{ij}=g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ o & \text{se } i \neq j \end{cases} \qquad , \qquad \forall\ 1\leq i,j\leq 3.$$

D. I simboli di Christoffel sono nulli perché è

$$D\delta x = D\delta y = D\delta z = o \qquad \underline{.}$$

2 SISTEMA DI COORDINATE SFERICO

0 Sia E uno spazio affine euclideo di dimensione 3.

Diamo in questo paragrafo un altro sistema di coordinate, più indicato a trattare problemi a simmetria sferica anche se meno semplice di quello cartesiano. Tale sistema, detto sferico, non è definito in tutto lo spazio, purché, in caso contrario una sua funzione coordinata (φ) non sarebbe continua.

Osserviamo, poi, che le basi indotte dalle relative funzioni e curve coordinate di E sono solo ortogonali e, inoltre, variano punto per punto, sicché occorre specificare, di volta in volta, il punto di applicazione.

Dunque,possiamo calcolare le matrici jacobiane dei cambiamenti di coordinate, relativamente ad un sistema di coordinate cartesiano e sferico.

Concludiamo, calcolando i simboli di Christoffel , i quali non sono tutti nulli poiché le basi, indotte da tale sistema, non sono costanti.

6.2.1. DEFINIZIONE Sia $o \in E$ un punto di E. Sia $B \equiv \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ una base ortonormale ordinata di $\bar{E}$. Sia $S \subset E$ il semipiano

$$S \equiv \{p \in E \;/\; (p-o)\cdot\bar{e}_2 = o \;,(p-o)\cdot\bar{e}_1 \geq o\} .$$

Dicesi SISTEMA DI COORDINATE SFERICO individuato da (o,B) l'applicazione

$$(r,\theta,\varphi) : E - S \to (o,\infty) \times (o,\pi) \times (o,2\pi) \subset \mathbb{R}^3$$

dato da

$$r(p) \equiv ||p-o||$$

$$\theta(p) \equiv \arccos[\,(p-o)\cdot\bar{e}_3/||p-o||\,]$$

$$\varphi(p) \equiv \begin{cases} \arccos[\,(p-o)\cdot\bar{e}_1/||p-o||\,] \\ \arccos[\,(p-o)\cdot\bar{e}_2/||p-o||\,] \end{cases} \quad ,\forall\, p \in E - S \;.$$

6.2.2. Dare l'espressione esplicita delle curve coordinate in questo sistema è alquanto difficoltoso. Al riguardo il lettore può leggere 6.5.2. .

6.2.3. Diamo ora, le relazioni che legano le funzioni coordinate dei sistemi cartesiano-sferico.

PROPOSIZIONE

E'

$$\begin{cases} x = r\,\mathrm{sen}\theta\cos\varphi \\ y = r\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arccos(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \\ \varphi = \begin{cases} \mathrm{arcsen}(y/\sqrt{x^2+y^2}\,) & \text{se} \quad x \geq o \\ \mathrm{arcsen}(-y/\sqrt{x^2+y^2}\,) & \text{se} \quad x \leq o \end{cases} \end{cases} \;.$$

6.2.4. Utilizzando le precedenti relazioni, esplicitiamo ora le matrici jacobiane dei cambiamenti di coordinate relativamente alle basi indotte da tali coordinate. Si fa osservare che, con abuso di linguaggio, si è indicato le funzioni coordinate e le curve coordinate con la stessa notazione.

Dunque, è

$$(J_{12}) \overset{1)}{\equiv} \begin{pmatrix} \partial r.x & \partial\theta.x & \partial\varphi.x \\ \partial r.y & \partial\theta.y & \partial\varphi.y \\ \partial r.z & \partial\theta.z & \partial\varphi.z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi & r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$(J_{21}) \overset{1)}{\equiv} \begin{pmatrix} \partial x.r & \partial y.r & \partial z.r \\ \partial x.\theta & \partial y.\theta & \partial z.\theta \\ \partial x.\varphi & \partial y.\varphi & \partial z.\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi/r & \cos\theta\operatorname{sen}\varphi/r & -\operatorname{sen}\theta/r \\ -\operatorname{sen}\varphi/r\operatorname{sen}\theta & \cos\varphi/r\operatorname{sen}\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Conseguentemente, osservato che è $(J_{21}) = (J_{12})^{-1}$, abbiamo

$$\det(J_{12}) = r^2 \operatorname{sen}\theta \quad ,$$

$$\det(J_{21}) = 1/r^2 \operatorname{sen}\theta \ .$$

6.2.5. Siano $\{\delta r, \delta\theta, \delta\varphi\}$ e $\{Dr, D\theta, D\varphi\}$ le basi, indotte da (r,θ,φ) di $\bar{E}$ e $\bar{E}^*$, l'una duale dell'altra.

Possiamo riscrivere le relazioni, date in 5.9.1., nei sistemi di coordinate cartesiano-sferico.

Allora, è

$$\delta r = (\partial r.x)\bar{e}_1 + (\partial r.y)\bar{e}_2 + (\partial r.z)\bar{e}_3 = \operatorname{sen}\theta(\cos\varphi\,\bar{e}_1 + \operatorname{sen}\varphi\,\bar{e}_2) + \cos\theta\,\bar{e}_3$$

$$\delta\theta = (\partial\theta.x)\bar{e}_1 + (\partial\theta.y)\bar{e}_2 + (\partial\theta.z)\bar{e}_3 = r[\cos\theta(\cos\varphi\,\bar{e}_1 + \operatorname{sen}\varphi\,\bar{e}_2) - \operatorname{sen}\theta\,\bar{e}_3]$$

$$\delta\varphi = (\partial\varphi.x)\bar{e}_1 + (\partial\varphi.y)\bar{e}_2 + (\partial\varphi.z)\bar{e}_3 = r\operatorname{sen}\theta(-\operatorname{sen}\varphi\,\bar{e}_1 + \cos\varphi\,\bar{e}_2)$$

---

1) L'indice 1 di J_{12} è riferito al sistema di coordinate cartesiano; invece l'indice 2 è riferito al sistema di coordinate sferico.

$$\begin{cases} Dr = (\partial x.r)\underline{\epsilon}^1 + (\partial y.r)\underline{\epsilon}^2 + (\partial z.r)\underline{\epsilon}^3 = \operatorname{sen}\theta(\cos\varphi\underline{\epsilon}^1 + \operatorname{sen}\varphi\underline{\epsilon}^2)+\cos\theta\underline{\epsilon}^3 \\ D\theta = (\partial x.\theta)\underline{\epsilon}^1 + (\partial y.\theta)\underline{\epsilon}^2 + (\partial z.\theta)\underline{\epsilon}^3 = 1/r[\cos\theta(\cos\varphi\ \underline{\epsilon}^1+\operatorname{sen}\varphi\ \underline{\epsilon}^2)-\operatorname{sen}\theta\ \underline{\epsilon}^3] \\ D\varphi = (\partial x.\varphi)\underline{\epsilon}^1 + (\partial y.\varphi)\underline{\epsilon}^2 + (\partial z.\varphi)\underline{\epsilon}^3 = (\operatorname{sen}\varphi\underline{\epsilon}^1+\cos\varphi\ \underline{\epsilon}^2)/r\ \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{e}_1=\delta x=(\partial x.r)\delta r+(\partial x.\theta)\delta\theta+(\partial x.\varphi)\delta\varphi =\cos\varphi(\operatorname{sen}\theta\ \delta r+\cos\theta/r\ \delta\theta)-\operatorname{sen}\varphi/r\ \operatorname{sen}\theta\ \delta\varphi \\ \bar{e}_2= \delta y=(\partial y.r)\delta r+(\partial y.\theta)\delta\theta+(\partial y.\varphi)\delta\varphi=\operatorname{sen}\varphi(\operatorname{sen}\theta\delta r+\cos\theta/r\ \delta\theta)+\cos\varphi/r\operatorname{sen}\theta\ \delta\varphi \\ \bar{e}_3= \delta z=(\partial z.r)\delta r+(\partial z.\theta)\delta\theta+(\partial z.\varphi)\delta\varphi = \cos\theta\ \delta r - \operatorname{sen}\theta/r\ \delta\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\epsilon}^1 = Dx=(\partial r.x)Dr+(\partial\theta.x)D\theta+(\partial\varphi.x)D\varphi= \cos\varphi(\operatorname{sen}\theta\ Dr+r\cos\theta\ D\theta)-r\ \operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\varphi D\varphi \\ \underline{\epsilon}^2 = Dy=(\partial r.y)Dr+(\partial\theta.y)D\theta+(\partial\varphi.y)D\varphi = \operatorname{sen}\varphi(\operatorname{sen}\theta\ Dr+r\cos\theta D\theta)+ r\ \operatorname{sen}\theta\ \cos\varphi D\varphi \\ \underline{\epsilon}^3 = Dz=(\partial r.z)Dr+(\partial\theta.z)D\theta + (\partial\varphi.z)D\varphi = \cos\theta\ Dr - r\ \operatorname{sen}\theta\ D\theta. \end{cases}$$

6.2.6. Dunque, è

- $||\delta r|| \equiv (\delta r\cdot\ \delta r)^{\frac{1}{2}} = 1$

- $||\delta\theta|| \equiv (\delta\theta\cdot\ \delta\theta)^{\frac{1}{2}} = r$

- $||\delta\varphi|| \equiv (\delta\varphi\ \cdot\delta\varphi)^{\frac{1}{2}} = r\ \operatorname{sen}\theta$

con la relazione d'ortogonalità della base $(\delta r,\delta\theta,\ \delta\varphi)$

$$\delta r\ \cdot\ \delta\theta = \delta r\ \cdot\ \delta\varphi = \delta\theta\ \cdot\ \delta\varphi = o$$

In termini matriciali, è

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & o & o \\ o & r^2 & o \\ o & o & r^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix}$$

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & o & o \\ o & 1/r^2 & o \\ o & o & 1/r^2\operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix}$$

Facciamo, allora, le seguenti osservazioni.

a) E'

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} .$$

b) E'

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = r^2 \operatorname{sen}\theta,$$

$$\sqrt{\det(g^{ij})} = 1/\sqrt{\det(g_{ij})} = 1/r^2\operatorname{sen}\theta \quad .$$

6.2.7. Tenendo presente l'uguaglianza di Christoffel

$$\Gamma^i_{hk} = \frac{1}{2}\, g^{ij}(\partial y_h \cdot g_{jk} + \partial y_k \cdot\, g_{jh} - \partial y_j \cdot g_{hk})$$

diamo, dei 36, i 9 simboli di Christoffel non nulli. Il lettore farà un utile esercizio verificandone i risultati.

$$\Gamma^1_{22} = -r \quad , \Gamma^1_{33} = r\,\mathrm{sen}^2\theta \quad , \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1/r \quad ,$$

$$\Gamma^2_{33} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta \quad , \quad \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = 1/r \quad , \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cos\theta/\mathrm{sen}\theta \ .$$

Dunque, poiché $\Gamma_{j,hk} \equiv g_{ji}\Gamma^i_{hk}$, è anche

$$\Gamma_{1,22} = -r \quad , \quad \Gamma_{1,33} = r\,\mathrm{sen}^2\theta \quad , \quad \Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} = r$$

$$\Gamma_{2,33} = -\frac{r^2}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta \quad , \quad \Gamma_{3,13} = \Gamma_{3,31} = r\,\mathrm{sen}^2\theta \quad , \quad \Gamma_{3,23} = \Gamma_{3,32} = \frac{r^2}{2}\,\mathrm{sen}2\theta \ .$$

3. SISTEMA DI COORDINATE CILINDRICO

0 Sia E uno spazio affine euclideo di dimensione 3.

Il sistema di coordinate che andiamo a definire, detto cilindrico, è un "misto" di quello cartesiano e sferico. Si fa uso di tale sistema per lo studio di problemi a simmetria cilindrica.

Il sistema di coordinate cilindrico, come quello sferico, non è definito in tutto lo spazio, altrimenti una sua funzione coordinata (φ) non sarebbe continua.

Si osservi poi che le basi, indotte da questo sistema, non sono costanti.

Dunque, possiamo determinare tutti i simboli di Christoffel non nulli.

Inoltre, precisate le matrici jacobiane dei cambiamenti di coordinate, relativamente ad un sistema di coordinate cartesiano e cilindrico, possiamo scrivere le relazioni che legano gli elementi delle basi, indotte da questi sistemi.

6.3.1. DEFINIZIONE Sia $o \in E$ un punto di E. Sia $B \equiv \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ una base ortonormale ordinata di $\bar{E}$. Sia $S \subset E$ il semipiano

$$S \equiv \{p \in E \;/\; (p-o)\cdot\bar{e}_2 = o \quad , (p-o)\cdot \bar{e}_1 \geq o\}.$$

Dicesi SISTEMA DI COORDINATE CILINDRICO individuato da (o,B), l'applicazione

$$(\rho, \varphi, z) : E - S \to (o,\infty)\times(o,2\pi)\times(-\infty,\infty)\subset R^3$$

data da

$$\rho(p) \equiv \sqrt{[(p-o)\cdot\bar{e}_1]^2 + [(p-o)\cdot\bar{e}_2]^2}$$

$$\varphi(p) \equiv \begin{array}{l} \arccos[(p-o)\cdot\bar{e}_1/||p-o||] \\ \arccos[(p-o)\cdot\bar{e}_2/||p-o||] \end{array}$$

$$z(p) \equiv (p-o)\cdot\bar{e}_3$$

6.3.2. Dare l'espressione esplicita delle curve coordinate in questo sistema è alquanto difficoltoso. Al riguardo il lettore può leggere 6.5.3. .

6.3.3. Diamo ora le relazioni che legano le funzioni coordinate dei sistemi cartesiano-cilindrico e cilindrico-sferico.

PROPOSIZIONE

E'

$$x = \rho\cos\theta \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$y = \rho\operatorname{sen}\theta \qquad \varphi = \begin{cases} \operatorname{arcsen}(y/\sqrt{x^2+y^2}) & \text{se } x \geq 0 \\ \operatorname{arcsen}(-y/\sqrt{x^2+y^2}) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$z = z \qquad z = z \qquad .$$

Inoltre, è

$$\rho = r\operatorname{sen}\theta, \ \varphi = \varphi, \ z = r\cos\theta \qquad .$$

6.3.4. Utilizzando le prime due relazioni precedenti, otteniamo le matrici jacobiane dei cambiamenti di coordinate cilindriche-cartesiane relativamente alle basi indotte da tali coordinate. Si osservi che, con abuso di linguaggio, si è indicato le funzioni coordinate e le curve coordinate del sistema (ρ,φ,z) con la stessa notazione.

$$(J_{13}) \overset{1)}{\equiv} \begin{pmatrix} \partial\rho.x & \partial\varphi.x & \partial z.x \\ \partial\rho.y & \partial\varphi.y & \partial z.y \\ \partial\rho.z & \partial\varphi.z & \partial z.z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi & 0 \\ \mathrm{sen}\,\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(J_{31}) \overset{1)}{\equiv} \begin{pmatrix} \partial x.\rho & \partial y.\rho & \partial z.\rho \\ \partial x.\varphi & \partial y.\varphi & \partial z.\varphi \\ \partial x.z & \partial y.z & \partial z.z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \mathrm{sen}\,\varphi & 0 \\ -\mathrm{sen}\,\varphi/\rho & \cos\varphi/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conseguentemente, osservato che è$(J_{31}) = (J_{13})^{-1}$, abbiamo

$$\det(J_{13}) = \rho \ ,$$

$$\det(J_{31}) = 1/\rho .$$

6.3.5. Siano $\{\delta\rho, \delta\varphi, \delta z\}$ e $\{D\rho, D\varphi, Dz\}$ le basi, indotte da (ρ,φ,z) di $\bar{E}$ e $\bar{E}^*$, l'una duale dell'altra.

Possiamo riscrivere le relazioni, date in 5.9.1. , nei sistemi di coordinate cartesiano-cilindrico.

Allora, è

1) L'indice 1 di J_{12} è riferito sempre al sistema di coordinate cartesiano; invece, l'indice 3 è riferito al sistema di coordinate cilindrico.

$$\begin{cases} \delta\rho=(\partial\rho.x)\bar{e}_1 +(\partial\rho.y)\bar{e}_2+(\partial\rho.z)\bar{e}_3 = \cos\varphi\bar{e}_1 + \operatorname{sen}\varphi\ \bar{e}_2 \\ \delta\varphi=(\partial\varphi.x)\bar{e}_1+(\partial\varphi.y)\bar{e}_2 + (\partial\varphi.z)\bar{e}_3 =\rho(-\operatorname{sen}\varphi\bar{e}_1 + \cos\varphi\bar{e}_2) \\ \delta z=(\partial z.x)\bar{e}_1 + (\partial z.y)\bar{e}_2 + (\partial z.z)\bar{e}_3 = \bar{e}_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D\rho=(\partial x.\rho)\underline{\epsilon}^1 + (\partial y.\rho)\underline{\epsilon}^2 + (\partial z.\rho)\underline{\epsilon}^3 = \cos\varphi\underline{\epsilon}^1 + \operatorname{sen}\varphi\underline{\epsilon}^2 \\ D\varphi=(\partial x.\varphi)\underline{\epsilon}^1 + (\partial y.\varphi)\underline{\epsilon}^2 +(\partial z.\varphi)\underline{\epsilon}^3+ \cos\varphi\, \epsilon^2) \\ Dz=(\partial x.z)\underline{\epsilon}^1 +(\partial y.z)\underline{\epsilon}^2 + (\partial z.z)\underline{\epsilon}^3 = \underline{\epsilon}^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{e}_1=\delta x=(\partial x.\rho)\delta\rho+(\partial x.\varphi)\delta\varphi+(\partial x.z)\delta z = \cos\varphi\delta\rho- \operatorname{sen}\varphi/\rho\ \delta\varphi \\ \bar{e}_2=\delta y=(\partial y.\rho)\delta\rho+ (\partial y.\varphi)\delta\varphi +(\partial y.z)\delta z= \operatorname{sen}\varphi\delta\rho+ \cos\varphi/\rho\ \delta\varphi \\ \bar{e}_3= \delta z=(\partial z.\rho)\delta\rho+(\partial z.\varphi)\delta\varphi +(\partial z.z)\delta z = \delta z = \bar{e}_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\epsilon}^1=Dx=(\partial\rho.x)D\rho +(\partial\varphi.x)D\varphi +(\partial z.x)Dz = \cos\varphi\ D\rho -\rho\operatorname{sen}\varphi D\varphi \\ \underline{\epsilon}^2=Dy=(\partial\rho.y)D\rho+(\partial\varphi.y)D\varphi+(\partial z.y)Dz = \operatorname{sen}\varphi\ D\rho + \rho\cos\varphi\ D\varphi \\ \underline{\epsilon}^3=Dz=(\partial\rho.z)D\rho+(\partial\varphi.z)D\varphi+(\partial z.z)Dz = Dz = \underline{\epsilon}^3 \end{cases} .$$

6.3.6. Dunque, è

- $||\delta\rho|| = (\delta\rho \cdot \delta\rho)^{\frac{1}{2}} = 1$
- $||\delta\varphi|| = (\delta\varphi \cdot \delta\varphi)^{\frac{1}{2}} = \rho$
- $||\delta z|| = (\delta z \cdot \delta z)^{\frac{1}{2}} = 1$

con la relazione d'ortogonalità della base $(\delta\rho, \delta\varphi, \delta z)$

$$\delta\rho \cdot \delta\varphi = \delta\rho \cdot \delta z = \delta\varphi \cdot \delta z = 0$$

In termini matriciali, è

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Facciamo, allora, le seguenti osservazioni.

- E'

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} .$$

- E'

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = \rho ,$$

$$\sqrt{\det(g^{ij})} = 1 / \sqrt{\det(g_{ij})} = 1/\rho .$$

6.3.7. Nel sistema di coordinate cilindrico, i simboli di Christoffel non nulli sono 3. Più precisamente, è

$$\Gamma^1_{22} = -\rho \quad , \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1/\rho .$$

Dunque, anche

$$\Gamma_{1,22} = -\rho \quad , \quad \Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} = \rho .$$

4 SISTEMA DI COORDINATE POLARE (dim E = 2)

0 Sia E uno spazio affine euclideo di dimensione 2.

I sistemi di coordinate sferico o cilindrico, ristretti al piano equatoriale, danno luogo ad un unico sistema di coordinate, detto polare.

6.4.1. DEFINIZIONE Sia $o \in E$ un punto di E. Sia $B \equiv \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ una base ortonormale ordinata di $\bar{E}$. Sia $s \subset E$ la semiretta

$$s \equiv \{p \in E \,/\, (p-o)\cdot \bar{e}_2 = o \quad , (p-o)\cdot \bar{e}_1 \geq o\} \quad .$$

Dicesi SISTEMA DI COORDINATE POLARE individuato da (o,B), l'applicazione

$$(\rho, \varphi) : E - s \to (o,\infty) \times (o, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$$

data da

$$r(p) \equiv \rho(p) \equiv \sqrt{[(p-o)\cdot\bar{e}_1]^2 + [(p-o)\cdot\bar{e}_2]^2}$$

$$\varphi(p) \equiv \begin{array}{l} \text{arcos}\ [(p-o)\cdot\bar{e}_1 / \|p-o\|\ ] \\ \text{arsen}\ [(p-o)\cdot\bar{e}_2\ \|p-o\|\ ] \end{array} \quad \dot{-}$$

6.4.2. Dunque, è

$$\begin{array}{ll} x = \rho \cos\varphi \qquad & \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y = \rho \,\text{sen}\, \varphi \qquad & \text{arcos}\ (x \,/\, \sqrt{x^2 + y^2}\ ) \\ & \varphi\ \ \text{arcsen}(y \,/\, \sqrt{x^2 + y^2}\ ) \end{array} \quad .$$

6.4.3. Allora, le matrici jacobiane dei cambiamenti di coordinate cartesiane-polari, relativamente alle basi indotte da tali coordinate, sono

$$(J_{12}) \equiv \begin{pmatrix} \partial\rho.x & \partial\ .x \\ \partial\rho.y & \partial\ .y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos & -\rho\,\mathrm{sen} \\ \mathrm{sen} & \rho\cos \end{pmatrix}$$

$$(J_{21}) \equiv \begin{pmatrix} \partial x.\rho & \partial y.\rho \\ \partial x. & \partial y. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos & \mathrm{sen} \\ -\mathrm{sen}/\rho & \cos/\rho \end{pmatrix} .$$

Conseguentemente, osservato che è $(J_{21}) = (J_{12})^{-1}$, è

$$\det(J_{12}) = \rho$$

$$\det(J_{21}) = 1/\rho$$

6.4.4. Siano $\{\delta\rho, \delta\ \}$ e $\{D\rho, D\ \}$ le basi, indotte da $(\rho,\ )$, di $\bar{E}$ e di $\bar{E}^*$, l'una duale dell'altra.

Allora, le relazioni 6.2.5. e 6.3.5. si riducono alle seguenti [1].

$$\delta\rho = (\partial\rho.x)\bar{e}_1 + (\partial\rho.y)\bar{e}_2 = \cos\varphi\ \bar{e}_1 + \mathrm{sen}\varphi\ \bar{e}_2$$

$$\delta\varphi = (\partial\varphi.x)\bar{e}_1 + (\partial\varphi.y)\bar{e}_2 = \rho\ (-\mathrm{sen}\varphi\bar{e}_1 + \cos\varphi\bar{e}_2)$$

$$D\rho = (\partial x.\rho)\underline{\epsilon}^1 + (\partial y.\rho)\underline{\epsilon}^2 = \cos\varphi\ \underline{\epsilon}^1 + \mathrm{sen}\varphi\ \underline{\epsilon}^2$$

$$D\varphi = (\partial x.\ )\underline{\epsilon}^1 + (\partial y.\varphi)\ \underline{\epsilon}^2 = 1/\rho(-\mathrm{sen}\varphi\ \underline{\epsilon}^1 + \cos\varphi\ \underline{\epsilon}^2)$$

---

1) Si osservi che, con abuso di linguaggio, si è indicato le funzioni coordinate e le curve coordinate su E con la stessa notazione.

$$\bar{e}_1 = \delta x = (\partial x.\rho)\delta\rho + (\partial x.\varphi)\delta\varphi = \cos\varphi\,\delta\rho - \operatorname{sen}\varphi/\rho\ \delta\varphi$$

$$\bar{e}_2 = \delta y = (\partial y.\rho)\delta\rho + (\partial y.\varphi)\delta\varphi = \operatorname{sen}\varphi\delta\rho + \cos\varphi/\rho\ \delta\varphi \quad .$$

6.4.5. Dunque, ricordiamo che è

- $||\delta\rho|| \equiv (\delta\rho \cdot \delta\rho)^{\frac{1}{2}} = 1$

- $||\delta\varphi|| \equiv (\delta\varphi \cdot \delta\varphi)^{\frac{1}{2}} = \rho$

con la relazione d'ortogonalità della base $(\delta\rho, \delta\varphi)$

$$\delta\rho \cdot \delta\varphi = 0 \quad .$$

In termini matriciali, è

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 \end{pmatrix} \quad .$$

Dunque, è

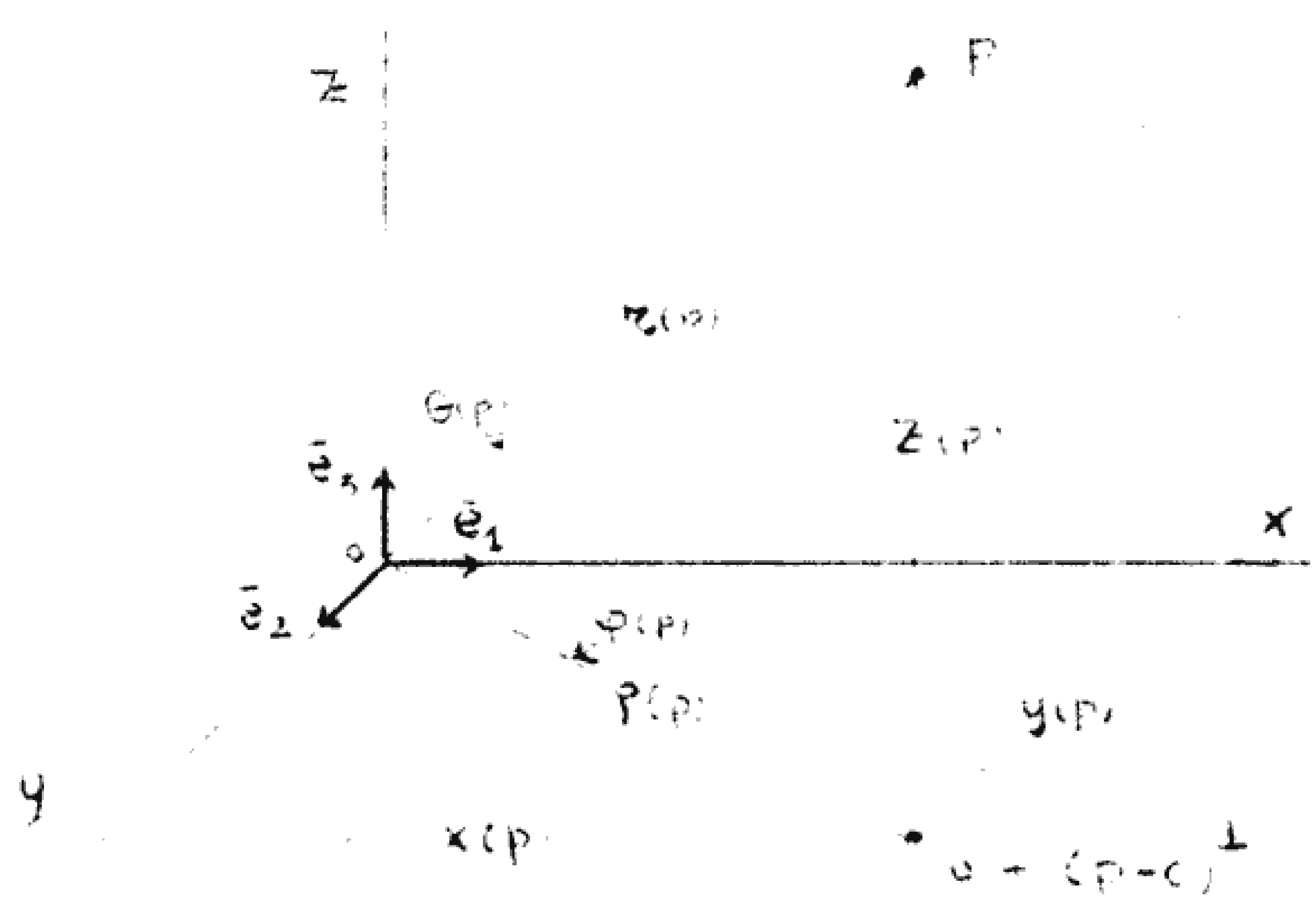
- $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$,

- $\sqrt{\det(g_{ij})} = \rho$, $\sqrt{\det(g^{ij})} = 1/\rho$.

6.4.6. Concludiamo questo paragrafo ricordando che i simboli di Christoffel sono quelli dati in 6.3.7.dove, appunto, manca la terza coordinata.

5 RAPPRESENTAZIONE DEI SISTEMI DI COORDINATE (dim E = 3)

0 Diamo ora una rappresentazione grafica dei tre sistemi di coordinate, individuati da (o,B), specificando così le relative funzioni e curve coordinate. Concludiamo indicando le basi per i vettori di $\bar{E}$,indotti da tali sistemi.



- Le funzioni coordinate x,y,z assumono valori costanti su dei piani.
- La funzione r assume valori costanti su delle sfere, θ su dei coni e φ su dei semipiani.
- La funzione ρ assume valori costanti sulle superfici laterali dei cilindri.

Intersecando queste"superfici" otteniamo i "sostegni" delle curve coordinate.

6.5.1. Sistema di coordinate cartesiano

- La curva coordinata c_{ip} $(\forall 1 \leq i \leq 3)$ ha per sostegno la retta parallela ad $\bar{e}_1$ e passante per p.

6.5 .2. Sistema di coordinate sferico

- C_{1p} ha per sostegno la semiretta uscente da o e passante per p;

- C_2p ha per sostegno la semicirconferenza di raggio $r(p)$,centro o e passante per p,

- C_3p ha per sostegno la circonferenza (escluso un punto) di raggio $\rho(p)$, ortogonale ad $\bar{e}_3$ e passante per p.

6.5.3. <u>Sistema di coordinate cilindrico.</u>

- c_1p ha per sostegno la semiretta ortogonale ad $\bar{e}_3$, uscente da un punto della retta $(o,\bar{e}_3)$ e passante per p;

- c_2p ha per sostegno la circonferenza (escluso un punto) di raggio $\rho(p)$, ortogonale ad $\bar{e}_3$ e passante per p;

- c_3p ha per sostegno la retta parallela ad $\bar{e}_3$ e passante per p.

6.5.4. Diamo, infine, una rappresentazione grafica per le basi $\{\delta r,\delta\theta,\delta\varphi\}$ e $\{\delta\rho,\delta\varphi,\delta z\}$, indotte rispettivamente da (r,θ,φ) e(ρ,φ,z).