

MASSE A CODOMINIO FORTEMENTE CHIUSO

E. BARONE

INTRODUZIONE.

Se \mathcal{A} è una σ -algebra di parti $X \neq \emptyset$ ed $m: \mathcal{A} \rightarrow [0, m(X)]$ è una misura (σ -additiva) limitata, allora è noto che il codominio $m(\mathcal{A})$ è chiuso, anzi è finito o perfetto. Tale risultato è dovuto a vari Autori, come ad esempio Kai Rander Buch, P.R.Halmos, A.Sobczyk e P.C.Hammer (cfr. rispettivamente [1], [2], [3]). Se \mathcal{A} è solo un'algebra, allora $m(\mathcal{A})$ può non essere chiuso, anche se m è una misura limitata e positiva. Questo ci dice che se si cercano delle condizioni necessarie e sufficienti sulla chiusura del codominio per masse (funzioni d'insieme finitamente additive e limitate), non si può prescindere dall'ipotesi che \mathcal{A} sia una σ -algebra.

In questa nota si cercherà di presentare alcuni risultati sulle masse con codominio chiuso ottenuti recentemente dall'Autore e da D.Lenzi, in una forma quanto più possibile "self-contained" e si coglie l'occasione per riproporre nuove dimostrazioni di noti risultati.

Alcune parti di questa nota sono state argomento di seminari tenuti dall'Autore nel 1984 e 1985 nelle Università di Modena, Bari e Napoli.

1. MASSE CONTINUE E TEOREMA DI DECOMPOSIZIONE

Sia \mathcal{A} un'algebra di parti di X .

Tra le masse che hanno codominio chiuso, ci sono innanzitutto le masse continue, cioè quelle masse $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\forall \epsilon > 0 \exists \{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{A}$ partizione di X tale che $|\mu|(A_i) < \epsilon \forall i \in \{1, \dots, n\}$, avendo definito, per ogni $A \in \mathcal{A}$:

$$|\mu|(A) = \text{Sup} \left\{ \sum_{j=1}^m |\mu(A_j)|; \quad \{A_1, \dots, A_m\} \subset \mathcal{A} \text{ partizione di } A \right\}.$$

($|\mu|$ è una massa su \mathcal{A} positiva e coincide con μ se $\mu \geq 0$).

Per tali masse si ha precisamente, il seguente risultato.

TEOREMA (1.1)

Se $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ è una massa sull'algebra \mathcal{A} di parti di X , allora:

$$\begin{aligned} \mu \text{ è continua} &\iff \forall \beta \text{ ultrafiltro in } \mathcal{A} : a_\beta := \inf \{ \mu(B); B \in \beta \} = 0 \\ &\iff \forall A \in \mathcal{A} : \overline{\mu(\mathcal{A}_A)} = [0, \mu(A)] \quad \text{dove } \mathcal{A}_A = \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(A) \end{aligned}$$

Se poi \mathcal{A} è una σ -algebra oppure μ è completa, cioè $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ con $\mathcal{A}^* = \{A \subset X : \forall \epsilon > 0 \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A} \text{ tale che } A_1 \subset A \subset A_2 \text{ e } \mu(A_2 - A_1) < \epsilon\}$, allora si può asserire che:

$$\mu \text{ è continua} \iff \forall A \in \mathcal{A} : \mu(\mathcal{A}_A) = [0, \mu(A)].$$

Quest'ultima proprietà è nota come proprietà di Darboux per funzioni d'insieme (cfr. Dinculeanu: Vector Measures, Pergamon Press (1967)).

Il teorema precedente è dovuto a vari Autori, anche se con diverse sfumature (cfr. ad esempio [5], [6] e [7]).

Le ipotesi $\mu \geq 0$ ed \mathcal{A} σ -algebra sono indispensabili per la chiusura del codominio. Infatti se non è $\mu \geq 0$, anche se \mathcal{A} è una σ -algebra, allora $\mu(\mathcal{A})$ può essere un intervallo aperto (cfr. [14]). Inoltre se si considera l'algebra \mathcal{A}

(ma non σ -algebra) dei plurintervalli semiaperti a destra su $[0,1)$ con estremi razionali e si definisce $\mu([a,b))=b-a$, risulta μ σ -additiva, limitata e continua ma $\mu(\mathcal{A}) = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ e quindi non è chiuso.

Se la massa $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ sull'algebra \mathcal{A} non è continua, allora, posto, per ogni ultrafiltro β in \mathcal{A}

$$a_\beta = \inf \{ \mu(B) : B \in \beta \},$$

l'insieme degli ultrafiltri β per i quali è $a_\beta > 0$ è al più numerabile, per la limitatezza di μ . Posto quindi $a_n = a_{\beta_n}$ ed identificato l'ultrafiltro β_n con la massa su \mathcal{A} a valori $\{0,1\}$, il cui supporto ⁽¹⁾ coincide con β_n , si verifica che la massa

$$\gamma = \mu - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta_n$$

è continua.

In altre parole vale il seguente fondamentale

TEOREMA (1.2) DI DECOMPOSIZIONE

Ogni massa $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ sull'algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ può sempre decomporci, in modo unico, come:

$$(1.1) \quad \mu = \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta_n$$

con γ continua, $a_n \geq 0$, $a_n \downarrow 0$ ⁽²⁾ e β_n masse ultrafiltro (a valori $\{0,1\}$) distinte (e quindi finitamente disgiunte, cioè $\forall n \geq 1$] una partizione $\{B_1, \dots, B_n\} \subset \mathcal{A}$ di X tale che $\beta_i(B_i) = 1 \quad \forall i=1,2,\dots,n$).

(1) Se μ è una massa sull'algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, si chiama supporto di μ :

$$\text{supp } \mu = \{A \in \mathcal{A} : |\mu|(A) = |\mu|(X)\}$$

(2) $a_n \downarrow 0$ è una successione decrescente ed infinitesima.

Questa decomposizione vale anche se non è $\mu \geq 0$ (in quanto vale per μ^+ e μ^-) (cfr. [9] pag. 148).

Il teorema precedente è dovuto ad A.Sobczyk - P.C.Hammer (cfr. [4]) ed a B.De Finetti (cfr. [8]) (cfr. anche [9] pag.144).

Come abbiamo visto le a_n della (1.1) sono date da

$$(1.2) \quad a_n = \inf \{ \mu(A); A \in \beta_n \} ,$$

ma non è affatto detto che esista A_n e β_n tale che $\mu(A_n) = a_n$. Quando questo accade, β_n dà origine al μ -atomo A_n ⁽¹⁾ (ovviamente se $a_n > 0$) e risulta

$$(1.3) \quad \beta_n = \{ A \in \mathcal{A} : \mu(A \cap A_n) = a_n \} .$$

Ciò accade, ad esempio, nel caso in cui μ è una misura sulla σ -algebra \mathcal{A} . In tal caso si ha il seguente risultato

TEOREMA (1.3). Se \mathcal{A} è una σ -algebra di parti di X e μ è una misura limitata su \mathcal{A} , allora, con le notazioni della decomposizione (1.1), si può trovare una partizione $\{A_n; n=0,1,2,\dots\}$ di X in \mathcal{A} , tale che $\gamma(A) = \mu(A \cap A_0)$ per ogni $A \in \mathcal{A}$ e per ogni $n=1,2,3,\dots$ A_n è un μ -atomo tale che $\beta_n(A_n) = 1$ (e quindi $\gamma(A_n) = 0$ e $\beta_m(A_n) = 0$ per $m \neq n$).

DIM. Infatti in questo caso sia γ che le β_n sono delle misure e dalla continuità di γ segue che

(1) $A \in \mathcal{A}$ è detto μ -atomo se $\mu(A) \neq 0$ e $\forall B \in \mathcal{A}_A : (\mu(B) = 0) \vee (\mu(A-B) = 0)$. In tal caso la restrizione di μ ad \mathcal{A}_A è una mssa a due valori $\{0, \mu(A)\}$.

$\forall k \in \mathbb{N}$] una partizione $\{A_{k1}, A_{k2}, \dots, A_{kp_k}\}$ di X in \mathcal{A}

tale che $\gamma(A_{ki}) < \frac{1}{k}$ per ogni i . Per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato, uno solo di questi insiemi, diciamolo B_k , è tale che $\beta_n(B_k) = 1$.

Posto $C_n = \bigcap_{k \geq 1} B_k$, risulta $\gamma(C_n) = 0$ e $\beta_n(C_n) = 1$.

Se ora definiamo $C = \bigcup_{n \geq 1} C_n$, risulta $\gamma(C) = 0$ e posto $A_0 = C^c$,

si ha $\beta_n(A_0) = 0$ per ogni n . Conseguentemente $\gamma(A) =$

$\mu(A \cap A_0)$ per ogni $A \in \mathcal{A}$. Inoltre possiamo trovare una partizione $\{A_1, A_2, \dots\}$ di C in \mathcal{A} tale che $\beta_n(A_n) = 1$ e ovviamente A_n è un μ -atomo per ogni $n \in \mathbb{N}$.

c.v.d.

2. IL CODOMINIO DI UNA MISURA.

Sia \mathcal{A} una σ -algebra di parti di X , μ una misura limitata su \mathcal{A} e sia (1.1) la sua decomposizione nella misura continua γ e nelle misure ultrafiltro β_n .

Proviamo innanzitutto la

PROPOSIZIONE (2.1)

$$\mu(\mathcal{A}) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} [\lambda, \lambda + \gamma(X)] \text{ con}$$

$$\Lambda = \left\{ \sum_{m \in M} a_m, M \subset \mathbb{N} \right\}$$

DIM. Se $A \in \mathcal{A}$, si ha $\mu(A) = \gamma(A) + \sum_{n \geq 1} a_n \beta_n(A)$ e detto

$M_A = \{n \in \mathbb{N}; \beta_n(A) = 1\}$, risulta $\mu(A) = \gamma(A) + \sum_{m \in M_A} a_m$, cioè

$\mu(A) = \lambda + \gamma(A) \in [\lambda, \lambda + \gamma(X)]$ con $\lambda = \sum_{m \in M} a_m$

Viceversa se $x \in [\lambda, \lambda + \gamma(X)]$, posto $a = x - \lambda$, essendo $a \in [0, \gamma(X)]$, esiste, per il teorema (1.3), $A \in \mathcal{A}_0$ tale che $\gamma(A) = \mu(A) = a$

e se $\lambda = \sum_{m \in M} a_m$ ($M \subset \mathbb{N}$), posto $B = \bigcup_{m \in M} A_m$, risulta $\mu(B) = \lambda$ e $B \cap A = \emptyset$. Infine $\mu(A \cup B) = a + \lambda = x$.

c.v.d.

Si ha quindi l'importante

TEOREMA (2.2) Se \mathcal{A} è una σ -algebra di parti di X e μ è una misura limitata su \mathcal{A} , allora $\mu(\mathcal{A})$ è chiuso.

DIM. Per quanto visto nella proposizione precedente, se $\gamma(X) > 0$ (cioè se non è nulla la componente continua della μ), $\mu(\mathcal{A})$ altro non è che un'unione finita d'intervalli chiusi e quindi un chiuso.

Se invece $\gamma \equiv 0$, risulta, con le notazioni introdotte, $\mu(\mathcal{A}) = \Lambda$.

Per provare che Λ è un chiuso, basterà limitarsi al caso $\sum_{n \geq 1} a_n = 1$.

Sia C l'insieme di Cantor ed $I = [0, 1]$. Il generico elemento $c \in C$, può essere rappresentato come $c = \sum_{n \geq 1} \frac{c_n}{3^n}$, essendo $c_n \in \{0, 2\}$. Definiamo ora $f : C \rightarrow I$, mediante:

$f(c) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} c_n a_n$. Si vede facilmente che $\Lambda = f(C)$ e che f è continua. Pertanto essendo C compatto, anche Λ è compatto.

c.v.d.

Dalle dimostrazioni precedenti segue immediatamente:

COROLLARIO (2.3) Se \mathcal{A} è una σ -algebra di parti di X e μ è una misura limitata su \mathcal{A} , allora $\mu(\mathcal{A})$ è finito o perfetto.

Uno studio dettagliato del codominio della misura

$$m(M) = \sum_{n \in M} a_n \quad \text{con } M \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

porta che $m(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ è finito oppure un intervallo chiuso, oppure un plurintervallo chiuso o infine un insieme tipo Cantor. Precisamente, detto $r_n = \sum_{k > n} a_k$, se si verifica la condizione $a_n \leq r_n$ per ogni n , allora $m(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = [0, m(\mathbb{N})]$; se si verifica la condizione $a_n > r_n$ per un numero finito d'indici, allora $m(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ è un plurintervallo chiuso; se infine, si ha $a_n > r_n$ per infiniti indici, $m(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ è un insieme tipo Cantor (l'insieme di Cantor, di misura nulla o di misura positiva, si ottiene quando $a_n > r_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$). Per tali risultati cfr. [10].

Conseguentemente:

COROLLARIO (2.4). Per una generica misura limitata sulla σ -algebra \mathcal{A} di parti di X , $\mu(\mathcal{A})$ sarà finito oppure coincide con $[0, \mu(X)]$, o è un'unione finita d'intervalli chiusi, ed è un insieme tipo Cantor solo nel caso in cui $\gamma = 0$.

3. IL CODOMINIO DI UNA MASSA

Un primo risultato sul codominio di una massa è il seguente:

TEOREMA (3.1) Se μ è una massa sull'algebra \mathcal{A} , allora la chiusura del suo codominio $\overline{\mu(\mathcal{A})}$ coincide col codominio di una misura su una σ -algebra e quindi è del tipo descritto dal corollario (2.4).

DIM. Sia \tilde{X} lo spazio di Stone associato ad \mathcal{A} (cioè \tilde{X} è l'insieme degli ultrafiltri su \mathcal{A}), $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{A} \text{ e } \tilde{X} : A \in \mathcal{A}\}$,

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{A} : A \in \mathcal{A}\}, \quad \mu(\tilde{A}) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

$\tilde{\mathcal{A}}$ è base di una topologia su \tilde{X} , che rende \tilde{X} spazio topologico compatto e totalmente sconnesso (tipo l'insieme di Cantor), inoltre $\tilde{\mathcal{A}}$ è l'algebra dei clopen di \tilde{X} .

Questo porta che $\tilde{\mu}$ è una misura sull'algebra $\tilde{\mathcal{A}}$. Infatti la proprietà (di σ -additività):

$$\{\tilde{A}_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \tilde{\mathcal{A}}, \quad \tilde{A}_n \cap \tilde{A}_m = \emptyset \text{ per } n \neq m, \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{A}} \implies \tilde{\mu}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n\right) = \sum_{n \geq 1} \tilde{\mu}(\tilde{A}_n)$$

è vera, in quanto la premessa è sempre falsa. Se per assurdo esistesse una successione di insiemi non vuoti disgiunti di $\tilde{\mathcal{A}}$, tale che $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n = \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$, sarebbe \tilde{A} chiuso e quindi compatto ed esisterebbe allora un $I \subset \mathbb{N}$ finito tale che $\tilde{A} = \bigcup_{n \in I} \tilde{A}_n$, contro le ipotesi fatte. ⁽¹⁾

(1) Un'altra dimostrazione della σ -additività di μ , si ottiene dal

Teorema di Alexandroff:

Siano $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ massa sull'algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ed X spazio topologico compatto. Se μ è regolare (cioè $\forall A \in \mathcal{A}$ e $\forall \epsilon > 0 \exists F, G \in \mathcal{A} \ni F \subset A \subset G$ e $|\mu|(G-F) < \epsilon$), allora μ è σ -additiva.

Basta infatti osservare che nel caso in esame μ è regolare, in quanto $\forall A \in \mathcal{A}$ basta scegliere $F=G=A$.



Consideriamo ora la σ -algebra generata da \mathcal{A} e denotiamola con \mathcal{A}_σ (si può provare che \mathcal{A}_σ è la σ -algebra di Baire in \tilde{X} , cioè la più piccola σ -algebra su \tilde{X} , rispetto alla quale ogni funzione reale e continua su \tilde{X} è misurabile).

Prolunghiamo ora $\check{\mu}$ su \mathcal{A}_σ ponendo $\forall A \in \mathcal{A}_\sigma$:

$$\check{\mu}(A) = \inf \left\{ \sum_{i \geq 1} \mu(A_i); A_i \in \mathcal{A} \text{ e } A \subset \bigcup_{i \geq 1} A_i \right\}.$$

Orbene tale prolungamento è una misura su una σ -algebra, con la proprietà:

$$\check{\mu}(\mathcal{A}_\sigma) = \overline{\check{\mu}(\mathcal{A})} = \overline{\mu(\mathcal{A})}.$$

c.v.d.

OSSERVAZIONE (3.1) Il teorema precedente è una conseguenza del teorema di rappresentazione di Stone (cfr. [9] pag. 20) e ci dice che una massa definita su un'algebra \mathcal{A} , può sempre essere riguardata come una misura definita su un'algebra $\tilde{\mathcal{A}}$ isomorfa ad \mathcal{A} .

OSSERVAZIONE (3.2) Dalla decomposizione (1.1) e da quanto stabilito per le misure, si può congetturare che le masse più vicine alle misure, almeno per le proprietà del codominio, siano quelle dove gli ultrafiltri β_n generano μ -atomi.

In [5] si prova che se μ è una massa sull'algebra \mathcal{A} e se $\mu(\mathcal{A}_A)$ è chiuso per ogni $A \in \mathcal{A}$, allora per ogni β ultrafiltro di \mathcal{A} , detto $a_\beta = \inf \{ \mu(A); A \in \beta \}$, se è $a_\beta > 0$, allora esiste $A_\beta \in \beta$, μ -atomo, tale che $\mu(A_\beta) = a_\beta$.

Chiamiamo proprietà di chiusura forte (p.c.f.) la proprietà: $\mu(\mathcal{A}_A)$ è chiuso per ogni $A \in \mathcal{A}$, e chiamiamo masse fortemente atomiche (cfr. [5]) le masse atomiche $\mu \geq 0$ per le quali:

$\forall \beta$ massa a due valori con $0 \leq \beta \leq \mu$, $\exists A_\beta$ μ -atomo tale che $\beta(A_\beta) > 0$. Con tali definizioni, la proprietà provata in [5] si può così enunciare:

TEOREMA (3.2) Se μ è una massa non continua sull'algebra \mathcal{A} , allora:

$(\mu \text{ ha la p.c.f.}) \Rightarrow (\mu \text{ è fortemente atomica}).$

Si provano facilmente le seguenti caratterizzazioni (cfr. [11]).

PROPOSIZIONE (3.3). Se $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ è una massa sull'algebra \mathcal{A} , con decomposizione (1.1) $\mu = \gamma + \alpha$ con $\alpha = \sum_{n \geq 1} a_n \beta_n$, allora:

$(\mu \text{ fortemente atomica}) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} \exists A_n \in \mathcal{A} \text{ tale che } \gamma(A_n) = 0,$
 $\beta_n(A_n) = 1 \text{ e } \beta_m(A_n) = 0 \text{ per } m \neq n) \Leftrightarrow (\alpha \text{ è fortemente atomica}$
 $\text{e } \gamma \text{ si annulla sugli atomi di } \alpha) \Leftrightarrow (\text{gli ultrafiltri } \{\beta_n; n \in \mathbb{N} \text{ considerati}$
 $\text{come punti dello spazio di Stone } \tilde{X}, \text{ formano un insieme discreto e } \gamma \text{ si annulla su-}$
 $\text{gli atomi di } \alpha).$

Inoltre se \mathcal{A} è una σ -algebra:

$(\mu \text{ fortemente atomica}) \Leftrightarrow (\exists \{A_n; n=0,1,2,\dots\}$ partizione
 $\text{di } X \text{ in } \mathcal{A} \text{ tale che } \gamma(A_n) = 0, \beta_n(A_n) = 1, \beta_m(A_n) = 0 \text{ per } m \neq n$
 $\text{ed } n > 0 \text{ ed } \alpha \text{ è } \sigma\text{-additiva su } \{A_n, n=0,1,2,\dots\}).$

Un classico esempio di massa fortemente atomica è dato da $\mu = \gamma + \sum_{n \geq 1} a_n \beta_n$ definita su $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ con γ continua e limitata,

$$\beta_n = \{A \subseteq \mathbb{N}; n \in A\} \text{ e } \sum_{n \geq 1} a_n = a \in \mathbb{R}.$$

Mentre se a γ si sostituisce $\beta_0 = \{A \subseteq \mathbb{N}; A^c \text{ finito}\}$, allora μ è atomica (ogni $\{n\}$ è un μ -atomo), ma non fortemente atomica (non esiste un μ -atomo A per il quale $\beta_0(A) = 1$).

E' naturale chiedersi se vale l'implicazione opposta del teorema (3.2), almeno nel caso in cui \mathcal{A} sia una σ -algebra. La risposta è positiva e precisamente si prova (cfr. [11]):

TEOREMA (3.4). Se μ è una massa sulla σ -algebra \mathcal{A} , allora ($|\mu|$ verifica la p.c.f.) \Leftrightarrow (μ è continua oppure è fortemente atomica)

4. OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

Dai risultati del paragrafo precedente si possono dedurre le seguenti osservazioni:

OSSERVAZIONE (4.1). Per le masse che non sono continue oppure non sono fortemente atomiche, sicuramente esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(\mathcal{A}_A)$ non è chiuso.

OSSERVAZIONE (4.2). $\mu(\mathcal{A}_A)$ quando è chiuso, è necessariamente di un certo tipo, cioè è finito o è un'intervallo chiuso o è un plurintervallo chiuso oppure un insieme tipo Cantor, esattamente come nel caso delle misure definite su σ -algebre, che tra l'altro, quando non sono continue, sono fortemente atomiche.

OSSERVAZIONE (4.3). Nel caso di masse a valori reali, il concetto di atomo secondo Constantinescu (cfr. [12])⁽¹⁾, coincide con l'ultrafiltro legato alla massa β_n , nella decomposizione (1.1).

In generale, come abbiamo visto, tale ultrafiltro non dà origine ad un atomo per μ , ma questo accade se μ è fortemente atomica. Pertanto per le masse fortemente atomiche, il concetto usuale di atomo coincide con quello introdotto da Constantinescu.

OSSERVAZIONE (4.4). G.H.Greco in [13] ha provato che una condizione necessaria per la completezza dello spazio $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ($1 \leq p < +\infty$), è che per la massa μ sia verificata la p.c.f. Quindi le masse candidate per la completezza di L^p , sembrerebbero essere le masse continue o quelle fortemente atomiche, almeno se \mathcal{A} è una σ -algebra.

Da alcuni risultati di G.H.Greco, K.S.P.Bhaskara Rao e di G.Letta si deduce che se $\mu = \sum_{n \geq 1} a_n \beta_n$ con β_n a valori $\{0, 1\}$:

$$L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \text{ completo} \Rightarrow \text{fortemente atomica}$$

e se \mathcal{A} è una σ -algebra, allora vale l'equivalenza.

(1) (nota di pag. 11)

Sia \mathcal{A} un'algebra ed \mathcal{I} un suo ideale (ideale di sottoinsiemi nulli). Denotiamo con

$$\Lambda(\mathcal{I}) = \{B \subset \mathcal{A} - \mathcal{I} : B \neq \emptyset \text{ e } B \text{ chiuso per l'intersezione finita}\}$$

(quindi \mathcal{B} è una base di filtro in $\mathcal{A} - \mathcal{I}$).

Constantinescu chiama atomi in \mathcal{A} rispetto ad \mathcal{I} gli elementi massimali di $\Lambda(\mathcal{I})$, mentre chiama insiemi atomici, gli insiemi $A \in \mathcal{A} - \mathcal{I}$ tali che

$$\forall B \in \mathcal{A}_A : B \in \mathcal{I} \vee A - B \in \mathcal{I}$$

Se μ è una massa sull'algebra \mathcal{A} a valori in un gruppo commutativo topologico e di Hausdorff, l'insieme

$$\mathcal{M}(\mu) = \{A \in \mathcal{A} : \forall B \in \mathcal{A}_A : \mu(B) = 0\}$$

è un ideale di \mathcal{A} e chiameremo atomo di μ , ogni atomo rispetto a $\mathcal{M}(\mu)$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] KAI RANPER BUCH: Some investigations of the set of values of measures in abstract space; *Mat.Fys.Medd.*21(1945).
- [2] P.R.HALMOS: On the set of values of a finite measure, *Bull.Amer.Math.Soc.*53(1947) 138-141.
- [3] A.SOBCZYK-P.C.HAMMER: The ranges of additive set functions, *Duke Math.J.*11(1944) 847-851.
- [4] A.SOBCZYK-P.C.HAMMER: A decomposition of additive set functions. *Duke Math.J.*11(1944),839-846.
- [5] G.H.GRECO-M.P.MOSCHEN: Algebre d'insiemi e misure finitamente additive. *Boll.U.M.I.*(5)18-B(1982).
- [6] W.SIERPINSKI: Sur les fonctions d'ensemble additives et continues. *Fund.Math.* 3(1922) 240-246.
- [7] G.PROPOUGÉNKO: Sur la propriété de Darboux des fonctions continues d'ensembles. *Fund.Math.*12(1928) 254-263.
- [8] B.DE FINETTI: Probability, Induction and Statistic.J.Wiley(1972).
- [9] K.P.S.BHASKARA RAO-M.BHASKARA RAO: Theory of Charges. A study of finitely additive measures. Academic Press 1983.
- [10] E.BARONE: Sul codominio di misure e di masse finite. *Rendiconti di Mat.*(2) 3(1983) 229-238.
- [11] E.BARONE-D.LENZI: Bounded charges and their ranges. In corso di stampa sugli *Annali di Mat.pura ed applicata*.
- [12] C.CONSTANTINESCU: Atoms of group valued measures. *Comment. Math. Helvetici* 51(1976) 191-205.
- [13] G.H.GRECO: Completezza degli spazi L^P per misure finitamente additive. *Ann. di Mat. pura ed applicata* (4) 32(1982) 243-255.

- [14] D.CANDELORO-A.MARTELLONI SACCHETTI: Su alcuni problemi relativi a misure scalari sub-additive... . Atti Sem.Mat.Fis. Univ. Modena 27(1978) 284-296.

- [15] M.BHASKARA RAO - K.P.S. BHASKARA RAO: Topological properties of charges algebras. Revue Roumaine de Math. Pures et appl. 22(3)(1977) 363-375.