XII. Fibrazioni di caratteristica p che ammettono gruppi non risolubili i cui p-sottogruppi di Sylow sono gruppi planari.

Sia π un piano di traslazione di ordine p^{2r} che ammetta un gruppo di collineazioni $\mathcal{G} \cong SL(2,p^t)$ dove i p-gruppi di Sylow sono gruppi planari. Generalmente, nei casi che sono conosciuti, il gruppo fissa p^r+1 componenti. Inoltre, se si sa che un gruppo arbitrario fissa alcune componenti purtroppo non si sa quasi nulla. Eppure, per i piani di ordine q^4, possiamo dire qualcosa. Per esempio:

<u>(12.1) Teorema</u> (Jha, Johnson [32]).

Sia π *un piano di traslazione di ordine* q^4 *che ammetta un gruppo non risolubile* $\mathcal{G}$ *di collineazioni nel complemento di traslazione. Supponiamo che* $\mathcal{G}$ *fissi più di* $q+1$ *componenti.*

(1) *Sia* q *dispari, allora* $8 \,\big|\, |\mathcal{G}|$ *e il 2-rango di* $\mathcal{G} \leq 2$. *Inoltre, l'involuzione del nucleo è sempre in* $\mathcal{G}$.

(2) *Sia* q *pari, allora* $\mathcal{G}$ *contiene un sottogruppo normale* N *tale che* $N \cong SL(2,2^s)$ *per un qualche* s, *e* $|\mathcal{G}/N|$ *è dispari.*

In questo caso, ogni 2-sottogruppo di Sylow fissa ogni punto di un sottopiano di Baer. Inoltre, questi sottopiani hanno gli stessi punti all'infinito e quindi N *fissa esattamente* q^2+1 *componenti.*

Dimostrazione. (1) q dispari.

(Una traccia)

(12.2) Lemma.

Ogni 2-sottogruppo di Klein deve contenere l'involuzione del nucleo. Sia $\hat{i}$ *questo elemento.*

Dimostrazione. Si veda Ostrom [56] per mostrare che se $H = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$ è un 2-gruppo di Klein e $\hat{i} \notin H$ allora $\pi_\alpha \cap \pi_\beta$ è un sottopiano di ordine q. Eppure, $\mathcal{G}$ deve fissare più *di* 1+q componenti.

(12.3) Lemma.

Per g dispari, $8 \,\big|\, |\mathcal{G}|$.

Dimostrazione.

Se $2 \,\big\|\, |\mathcal{G}|$, si usa il teorema di Burnside per mostrare che $\mathcal{G}$ ha un 2-complemento normale. In modo simile, se $4 \,\big\|\, |\mathcal{G}|$ allora i 2-gruppi di Sylow sono di Klein. Quindi, $\hat{i} \in \mathcal{G}$ e $\mathcal{G}/\langle \hat{i} \rangle$ è risolubile—una contraddizione.

(12.4) Lemma.

Il 2-rango di $\mathcal{G}$ *è* ≤ 2.

Dimostrazione.

Sia $S = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma, \alpha\gamma, \beta\gamma, \alpha\beta\gamma\}$ un gruppo abeliano elementare in $\mathcal{G}$. Allora, $L = \{1,\alpha,\beta,\alpha\beta\}$ ed anche $T = \{1,\alpha,\gamma,\alpha\gamma\}$ sono gruppi di ordine 4 e per (12.1), $L \cap T \supseteq \{\hat{i}\}$, allora $\hat{i} = \alpha$. Ma, anche $M = \{1,\beta,\gamma,\beta\gamma\} \supseteq \{\hat{i}\}$ cosicché $\hat{i} = \beta$.

(12.5) Lemma.

$\hat{i} \in \mathcal{G}$.

Dimostrazione.

Sia $\mathcal{S}$ un 2-gruppo di Sylow di $\mathcal{G}$. Allora per ((2.2), (3), (4), (5)), $\mathcal{S}$ contiene un gruppo dei quaternioni Q di ordine 8. Sia $\alpha \in Q$ l'unico elemento di ordine 2 e supponiamo che α sia di Baer e sia $\pi_\alpha = \mathrm{Fix}\ \alpha$. Q fissa π_α ma Q non fissa ogni punto di π_α per Foulser [13]. $Q|\pi_\alpha$ deve essere l'involuzione del nucleo di π_α. Cioè, Q fissa $> 1+q$ componenti di π_α.

Allora, il sottogruppo di Q che agisce come l'identità su π_α è un 2-gruppo di Klein, il che non è possibile.

Quindi, abbiamo la dimostrazione per (12.1)(1). La dimostrazione di (2) usa idee simili a quelle in [44].

(12.1) non rimane vero se cambiamo ipotesi e $\mathcal{G}$ fissa esattamente $1+q$ componenti perché i piani di Lorimer-Rahilly e di Johnson-Walker di ordine 16 ammettono PSL(2,7) dove tale gruppo fissa esattamente $1+2$ componenti.

Eppure, possiamo provare:

<u>(12.6) Teorema</u> (Jha, Johnson [36]).

Sia π *un piano di traslazione di ordine* $n = p^{2r}$ *che ammetta un gruppo* $\mathcal{G}$ *nel complemento di traslazione tale che* $\sqrt{n} \,\big|\, |\mathcal{G}|$ *e supponiamo che i* p-*gruppi di Sylow* $\mathcal{S}$ *siano planari con* $\pi_{\mathcal{S}} = \text{Fix } \mathcal{S}$.

Supponiamo che *l'ordine di* $\pi_{\mathcal{S}} \geq n^{1/4}$.

(a) *Se* $\mathcal{S} \not\triangleleft \mathcal{G}$, *allora* π *è un piano di Hall o* $n = 5^4$ *e* π *contiene un sottopiano* π_0 *di Hall di ordine* 25 *tale che* $\mathcal{G}$ *fisse* π_0, $\mathcal{G} \supseteq SL(2,5)$ *e* $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}|\pi_0$.

(b) *Se* $\mathcal{G}$ *è non risolubile, allora vale l'uno o l'altro:* $\mathcal{S} \triangleleft \mathcal{G}$ *cosicché si può applicare* (a) *o c'è un insieme*

$$\pi_{\mathcal{S}} \subseteq \pi_{\overline{\mathcal{S}}} \subseteq \pi$$

dove $\pi_{\mathcal{S}}, \pi_{\overline{\mathcal{S}}}$ *sono fissati da* $\mathcal{G}$ *e* $\pi_{\mathcal{S}}$ *è Desarguesiano. Inoltre,* $\mathcal{G}|\pi_{\mathcal{S}} \cong$ *a una estensione ciclica (meta) di* $SL(2,5)$ *e il nucleo di questo omomorfismo è risolubile.*

Con riferimento ai piani di Lorimer-Rahilly et al. abbiamo:

<u>(12.7) Teorema</u> (Jha, Johnson [36]).

Sia π *un piano di traslazione di ordine* $n = p^{2r}$ *che ammetta un gruppo* $\mathcal{G}$ *nel complemento di traslazione tale che* $p\sqrt{n} \,\big|\, |\mathcal{G}|$ *e supponiamo che i* p-*gruppi di Sylow* $\mathcal{S}$ *siano planari con* $\pi_{\mathcal{S}} = \text{Fix } \mathcal{S}$, *e l'ordine di* $\pi_{\mathcal{S}}$ *sia* $\geq n^{1/4}$.

Allora,

(a) π *ha ordine pari*, $|\mathcal{S}| = 2\sqrt{n}$ *e* $\pi_{\mathcal{S}}$ *ha ordine* $n^{1/4}$. $\mathcal{S}$ *contiene un sottogruppo abeliano elementare* E *tale che* $[\mathcal{S}:E] = 2$ *e* π_E *è un sottopiano Desarguesiano di Baer*.

(b) *Se* $\mathcal{G}$ *è non risolubile, allora* π *è un piano di ordine* 16 *di Dempwolff, Lorimer-Rahilly o Johnson-Walker*.

(c) *Se* $\mathcal{G}$ *non contiene un sottogruppo abeliano elementare di ordine* $\sqrt{n}$, *allora* $\mathcal{G}$ *è non risolubile cosicché si può applicare il caso* (b).

<u>Dimostrazione</u>.

(12.7)—Traccia.

<u>(12.8) Lemma</u>.

$p = 2$.

<u>Dimostrazione</u>.

Si usa Foulser [13] per mostrare che π_E (in (a)) è Desarguesiano da cui è chiaro che $p = 2$ perché $\pi_{\mathcal{S}} \subseteq \pi_E$ cosicché $\mathcal{S}|\pi_E \cong\ \leq$ Aut $GF(q^2)$.

<u>(12.9) Lemma</u>.

Se $\mathcal{G}$ *è non risolubile allora* $\mathcal{G} \supseteq SL(2,q^2)$ *o* $\mathcal{G} \supseteq PSL(2,7)$ *e* $n = 16$.

<u>Dimostrazione</u>.

Si può usare il teorema di Dempwolff (8.3).

Ora, per finire la dimostrazione, si può usare Foulser-Johnson (7.7) e lo studio di Johnson [43] sui piani di traslazione di ordine 16.

La dimostrazione di (12.6) è più difficile di (12.7) e usa la teoria della rappresentazione di $SL(2,q)$ negli spazi vettoriali di dimensione $4r$ su $GF(p)$.

Infatti, quando π non è un piano di Hall nell'ipotesi di (12.6) c'è un $GF(p)SL(2,q)$ modulo V con $|V| = q^4$. (V è una componente di π.)