X. Piani di traslazione di ordine n con gruppi abeliani di collineazioni di ordine n.

Abbiamo visto alcuni argomenti interassanti per studiare piani di translazione di ordine q^2 con nucleo $GF(q)$ che ammettono gruppi $\mathcal{G}$ nel complemento lineare di traslazione di ordine q^2.

In questa sezione, non facciamo ipotesi sul nucleo mentre supponiamo che $\mathcal{G}$ sia abeliano.

(10.1) Teorema (Jha, Johnson [27]).

Sia π un piano di traslazione di ordine $n = p^r$. Sia ℓ_∞ la retta all'infinito. Sia $\mathcal{G}$ un p-gruppo di collineazioni nel complemento di traslazione di ordine $\geq n$ che fissa (∞) su ℓ_∞. Se $\mathcal{G}$ è abeliano, allora $|\mathcal{G}| = n$ e $\mathcal{G}$ è transitivo su $\ell_\infty - (\infty)$.

Per la dimostrazione, abbiamo bisogno del seguente teorema di Jha.

(10.2) Teorema (Jha [21]).

Sia π un piano di traslazione di ordine $n = p^r$ che ammetta un gruppo planare M ove Fix M ha ordine $q = p^k$. Si scriva $n = q^t$. Allora

(i) t *è un intero e*

(ii) *Se* $q^{t-1} \mid |M|$ *allora* $n = q^t = 16$ *o* $n = q^2$, $t = 2$.

<u>Dimostrazione</u>. Supponiamo $n > 16$. Consideriamo i sottogruppi $\mathcal{G}_P$ per $P \in \ell_\infty - \{(\infty)\}$ e supponiamo che ognuno non sia banale.

Allora, $\mathcal{G}_P$ è un gruppo planare perché $\mathcal{G}_P$ fissa punti su $O(\infty)$ e su OP.

Sia $\pi_P = \mathrm{Fix}\, \mathcal{G}_P$ e sia l'ordine di π_P $q = p^m$. $\mathcal{G}$ è abeliano. Pertanto $\mathcal{G}$ fissa π_P e permuta $\pi_P \cap \{\ell_\infty - \{(\infty)\}\}$. Allora $\mathcal{G}$ agisce su q punti cosicché $|\mathcal{G}|/|\mathcal{G}_P| \leq q$. Allora, $q^t/q \leq |\mathcal{G}_P|$. Per (10.2), $t = 2$ e $\mathcal{G}_P$ è un p-gruppo di Baer. Per Foulser [12], $|\mathcal{G}_P| = q$ e $\mathcal{G}_P$ è abeliano elementare. Inoltre, per (8.1)(3), possiamo assumere che $p = 2$.

Allora, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_P \mathcal{G}_Q$, $Q \in \ell_\infty - \pi_P \cap \ell_\infty$ è abeliano elementare di ordine 2^r.

Sia $g \in \mathcal{G}_P$ allora $g|\pi_Q$ è un'elazione o un 2-elemento di Baer (di π_Q). Se $g|\pi_Q$ è di Baer, allora $\pi_Q \cap \pi_P$ è un sottopiano di ordine $2^{r/4}$ che è fissato da $\mathcal{G}$ e inoltre $\mathcal{G}$ deve fissare ogni punto di $\pi_Q \cap \pi_P$. Questo è impossibile per (10.2). Quindi, $g|\pi_Q$ è un'elazione e $\mathrm{Fix}\, \mathcal{G} = \pi_P \cap \pi_Q = \pi_P \cap \mathcal{L} = \pi_Q \cap \mathcal{L}$ dove $\mathcal{L}$ è una retta tale che $\mathcal{L} \cap \ell_\infty = (\infty)$.

$\mathcal{G}|(\mathcal{L}/\mathrm{Fix}\, \mathcal{G})$ fissa ogni punto di un sottospazio di $\mathcal{L}/\mathrm{Fix}\, \mathcal{G}$ di dimensione uno. Allora, c'è un sopraspazio $V_1 \supseteq \mathrm{Fix}\, \mathcal{G}$ tale che $\mathcal{G}$ fissa V_1 e $|V_1| = 2 \cdot q$. Allora, $\mathcal{G}$ permuta $V_1 - \mathrm{Fix}\, \mathcal{G}$ cosicché c'è un sottogruppo $\hat{\mathcal{G}}$ di $\mathcal{G}$ di ordine q che fissa ogni punto di V_1. Ma $\mathcal{G}$ è abeliano elementare cosicché $\hat{\mathcal{G}} = E$. Ma ora abbiamo un gruppo $\mathcal{G}_P$ di Baer di ordine q e un gruppo di elazioni di ordine q che si centralizzano, il che è una contraddizione per (4.3).

Per lo studio della dimensione 2:

(10.3) Teorema.

Sia π *un piano di traslazione di ordine* n *che abbia un gruppo abeliano* H *nel complemento di traslazione. Se* $n\cdot[\sqrt{n}-1] \mid |H|$ *allora, abbiamo l'uno o l'altro:*

(1) n *è un quadrato* q^2 *e il nucleo è isomorfo a* GF(q) *o* π *è un piano di Desargues.*

(2) *Se* n *è un quadrato e* π *non è un piano su un semicorpo allora* π *è un piano di Betten o* π *è un piano "desirable" (si veda la sezione II).*

Dimostrazione. Sia $n = p^r$. Per (10.1), un p-sottogruppo di Sylow $\mathcal{G}$ ha ordine n e $\mathcal{G}$ è transitivo su $\ell_\infty-(\infty)$. Inoltre, $[\sqrt{n}-1] \mid |H_P|$ per $P \in \ell_\infty-(\infty)$ e H permuta i punti che sono fissati da H_P. Allora, H_P fissa ogni punto di ℓ_∞ cosicché il nucleo di π ha ordine almeno $[\sqrt{n}-1]+1$ Supponiamo $n = p^{2s+1}$ per $r = 2s+1$, $s \geq 1$.

$$[\sqrt{n}-1] = [p^{s+\frac{1}{2}}-1] \geq [p^s-1] = p^s-1.$$

Sia il nucleo $\cong GF(p^t)$ per $t \mid r = 2s+1$. Allora, $t \geq s$ e $tk = 2s+1$ per un qualche intero k.

Dunque, $2s+1 = tk \geq ks$ cosicché

$$(s,k) \in \{(s,1),(s,2),(1,3)\}.$$

Per $k = 1$ o 2, il nucleo contiene $GF(p^s)$ o $GF(p^{2s})$, il che implica che π sia Desarguesiano.

Se $k = 3$, $s = 1$, il nucleo è $GF(p)$ e l'ordine del piano è p^3. In questo caso, $[\sqrt{p^3} -1] = [\sqrt{p} \cdot p-1] > [p-1]$ quando $\sqrt{p} \cdot p \geq p+1$. $\sqrt{p} \cdot p \geq p+1 \Leftrightarrow (\sqrt{p} -1)p \geq 1$ e $(\sqrt{p} -1)p < 1 \Leftrightarrow p = 2$. Tutti piani di ordine 8 sono Desarguesiani. Allora, possiamo assumere che n sia un quadrato.

Ora, $[\sqrt{n} -1] = \sqrt{n} -1$ cosicché π è Desarguesiano o il nucleo $\cong GF(q)$. (2) è vero adesso per Ganley [17] e la sezione II.

In modo simile, possiamo provare

<u>(10.4) Teorema</u> (Jha, Johnson [27]).

Sia π *un piano di traslazione di ordine* n *con un gruppo* $\mathfrak{H}$ *di collineazioni nel complemento di traslazione. Se c'è un sottogruppo abeliano di ordine* n *e* $\mathfrak{H}$ *ammette un' omologia affine allora* π *è un piano su un semicorpo.*