

isometriche, si ha:

$$(\partial/\partial t + \Delta_x) f^*(t, x, x') = \sum_p (\partial/\partial t + \bar{\Delta}_{\bar{y}}) \bar{k}^*(t, \bar{y}, s_p(x')) = 0;$$

infine risulta $\forall \phi \in C^\infty_*(M)$, per il teorema di Fubini:

$$\int_M f^*(t, x, x') \phi(x') dv_g(x') = \int_{\bar{M}} \bar{k}^*(t, \bar{y}, y') (\phi \circ \pi)(y') dv_{\bar{g}}(y')$$

che tende a $(\phi \circ \pi)(\bar{y}) = \phi(x)$ per $t \rightarrow 0^+$.

Per l'unicità del nucleo del calore si ha quindi:

$$f^*(t, x, x') = k^*(t, x, x').$$

Ma allora per $x' = x$ si ha, considerata la positività di \bar{k}^* :

$$\bar{k}^*(t, \bar{y}, \bar{y}) \leq \sum_{y' \in \pi^{-1}(x)} \bar{k}^*(t, \bar{y}, y') = k^*(t, x, x)$$

e quindi (cf. [2], p.100):

$$\begin{aligned} \sum_0^\infty e^{-\lambda_i^* t} &= \int_{\bar{M}} \bar{k}^*(t, \bar{y}, \bar{y}) dv_{\bar{g}}(\bar{y}) = \int_M \sum_{y' \in \pi^{-1}(x)} \bar{k}^*(t, \bar{y}, y') dv_g(x) \leq \\ &\leq h \int_M k^*(t, x, x) dv_g(x) = \sum_0^\infty e^{-\lambda_i^* t} \cdot \dots \end{aligned}$$

6.3. In base alle osservazioni del n. 4.3 possiamo concludere che i risultati ottenuti, in particolare (6.1.2) e (6.2.1), valgono anche per rivestimenti riemanniani ramificati ad h fogli il cui insieme di ramificazione abbia capacità nulla (si noti che in base all'osservazione al teorema (3.3.1) quest'ipotesi è meno restrittiva di quella usata in [19] di codimensione ≥ 2 per dimostrare (6.2.1)).

7. UN'APPLICAZIONE ALLE SUPERFICIE MINIMALI DI \mathbb{R}^3 .

7.1. Sia M una superficie in \mathbb{R}^3 ed indichiamone con A la II forma quadratica fondamentale e con k la curvatura gaussiana. Se K è un compatto in M , l'indice di K è il numero degli autovalori negativi relativi al problema di Dirichlet:

$$(7.1.1) \quad (\Delta_M - |A|^2)f = \mu_j f \quad \text{su } K, \quad f|_{\partial K} = 0,$$

cioè se $\Delta_M f = \lambda^{D_i} f$, $|A|^2 f = \beta^{D_i} f$, $f|_{\partial K} = 0$, è il numero degli autovalori λ^{D_i} minori di β^{D_i} . Se $\{K_r\}_{r \in \mathbf{N}}$ è una successione di compatti che invade M , l'indice di M è per definizione il limite per $r \rightarrow +\infty$ degli indici dei K_r :

$$(7.1.2) \quad \text{ind } M = \lim_r \text{ind } K_r.$$

7.2. Restrungendo le considerazioni alle superficie minimali, poiché non esistono superficie minimali compatte senza bordo in \mathbf{R}^n (cf. [16], p. 101), prenderemo in esame superficie minimali non compatte, complete nella metrica indotta. Si ha allora (v. [16], p. 135):

(7.2.1) **TEOREMA.** *Se M è una superficie minimale completa in \mathbf{R}^n , la sua curvatura totale c , se non è infinita, è un multiplo intero di 2π (si noti che per M è $k < 0$, cf. [16] p. 127):*

$$c = \int_M k \, ds = -2\pi q, \quad q \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\};$$

in particolare risulta per $n=3$:

$$(7.2.2) \quad c = -4\pi h, \quad h \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}.$$

D'altra parte FISHER COLBRIE in [11] ha dimostrato che:

(7.2.3) **TEOREMA.** *Una superficie minimale completa M di \mathbf{R}^3 ha indice finito se e solo se ha curvatura totale finita.*

Ha quindi senso chiedersi come l'indice di M vari rispetto alla curvatura totale, in particolare rispetto all'intero h di (7.2.2). Si ha (cf. [19]):

(7.2.4) **TEOREMA.** *Per una superficie minimale completa M di \mathbf{R}^3 risulta:*

$$\text{ind } M \leq Ch$$

ove C è una costante che non dipende da M .

Dim. Sia h finito. Per un teorema di OSSERMAN (cf. [16] p. 153), M è conforme ad una superficie di Riemann compatta \bar{M} privata di un numero

finito di punti. L'applicazione di Gauss si estende ad un'applicazione conforme $G : \bar{M} \longrightarrow S^2$ olomorfa sicché \bar{M} è un rivestimento ramificato ad h fogli di S^2 il cui insieme di ramificazione è costituito dai punti isolati in cui $k = 0$. Assumendo su \bar{M} la metrica indottavi da (S^2, can) tramite G ed indicando con $\{\mu_i\}, \{\lambda_i\}, i \in \mathbf{N}^*$, gli autovalori di \bar{M} ed S^2 rispettivamente, si ha per (6.2.1):

$$\sum_{0i}^{\infty} e^{-\mu_i t} \leq h \sum_{0i}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \quad \forall t > 0.$$

Per una superficie minimale M è, per la formula di Gauss-Codazzi:

$$|A|^2 = -2k$$

quindi l'indice di un dominio compatto $K \subset M$, cioè il numero degli autovalori negativi dell'operatore

$$\Delta_M - |A|^2 = \Delta_M + 2k,$$

è lo stesso che l'indice del dominio corrispondente in \bar{M} per l'operatore

$$\Delta_{\bar{M}} - 2$$

(in quanto $G^*(ds^2_{S^2}) = -k(ds^2_{\bar{M}})$ e $\Delta_M = -k\Delta_{\bar{M}}$) ed è pertanto il numero degli autovalori di \bar{M} che sono < 2 .

Per passaggio al limite su una successione di compatti invadente M , si ha che lo stesso accade per l'indice di M .

Pertanto $\forall t > 0$ si ha:

$$(\text{ind } M) e^{-2t} \leq \sum_{\mu_i < 2} e^{-\mu_i t} \leq \sum_{0i}^{\infty} e^{-\mu_i t} \leq h \sum_{0i}^{\infty} e^{-\lambda_i t}$$

e cioè

$$\text{ind } M \leq Ch$$

dove si è posto $C = \inf_{t>0} e^{2t} \sum_{0i}^{\infty} e^{-\lambda_i t}$. \square

In [19] TYSK dà una stima esplicita di C : tenendo conto del fatto che l' i -mo autovalore distinto di S^2 vale $i(i+1)$ ed ha molteplicità $2i+1$ (cf. [4], p. 160-162), si trova $C = 7,68183... .$