rando una classe numerabile B e prendendo come A tutti i possibili ordini su B che rendono B di tipo ω. Ovviamente con costruzioni di questo tipo si esce dall'universo degli insiemi ed anche dall'universo esteso. Grazie all'assioma della codifica estensionale, che può essere interpretato come una forma della scelta, è possibile riportarsi all'universo degli insiemi ed all'universo esteso, anche con queste costruzioni.

Da ultimo si assume l'Assioma dei due cardinali che "sistema" definitivamente anche l'ipotesi del continuo e la generazione dei cardinali trasfiniti:

V10 Per ogni classe A, A è finita o numerabile, oppure esiste una relazione R tale $\langle A,R \rangle$ è di tipo Ω.

Dunque i tipi ω e Ω sono visti come i due (unici) cardinali trasfiniti ammessi. Ogni classe insiemisticamente definibile è di tipo Ω, ad esempio la classe V, universo degli insiemi.

Capitolo VI. *La Matematica nella Teoria alternativa degli insiemi*

1) I numeri naturali.

Nella teoria classica degli insiemi si può ricostruire la Matematica in quanto sono dati i procedimenti insiemistici e si costruiscono i numeri naturali e le relazioni ed operazioni su essi, prendendo spunto dalla costruzione dei numeri naturali. Si può dare in **ZF** la definizione di numero naturale, prima però alcune definizioni preliminari

(1) Tr(a), cioè $(\forall x)(x \in a \rightarrow x \subseteq a)$ (da leggersi "a *è transitivo*");

(2) Conn(a) cioè $(\forall x)(\forall y)(x \in a \wedge y \in a \rightarrow (x \in y \vee x = y \vee y \in x))$ (da leggersi "a *è connesso*");

(3) Sc(a) per $(\exists y)(a = y \cup \{y\})$ ((da leggersi "a *è un successivo*").

Con ciò, N(a), da leggersi *a è un naturale* può essere scritta come

$$Tr(a) \wedge Conn(a) \wedge (a = \emptyset \vee (Sc(a) \wedge (\forall x)(x \in a \rightarrow (x = \emptyset \vee Sc(x))).$$

Si mostra che ogni elemento di un numero naturale è ancora un naturale, che Ø è un naturale, che

$$N(a) \rightarrow N(a \cup \{a\}),$$

e che valgono i postulati di Peano.

La definizione di numero naturale si può porre, in tutta generalità, anche nella teoria alternativa, dato che le condizioni che stabiliscono il fatto di essere un numero naturale sono formule insiemistiche, però la terza condizione, indispensabile in **ZF** per distinguere i numeri naturali come ordinali finiti, dagli altri ordinali, cioè quelli soddisfacenti solo le condizioni di transitività e di connessione, non è necessaria in contesto alternativo, perché, lo ricordiamo, ogni insieme è finito. Dunque i naturali alternativi sono insiemi transitivi e connessi.

2) Altri sistemi numerici.

Se con $\mathbb{N}$ si indica la *classe* dei naturali, si tratta di una classe definibile e dunque ordinabile solo con un ordine di tipo Ω. Anzi questo risultato è frutto del paradosso di Burali-Forti, sull'inesistenza di un insieme che sia la collezione totale degli ordinali (qui i naturali), dato che esso stesso avrebbe natura di ordinale (transitivo e connesso), dunque apparterrebbe a se stesso. Noto però che la relazione d'ordine naturale non è un buon ordine perché tramite essa si può trovare il minimo di ogni sottinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$, non di ogni sottoclasse non vuota. Questo spiega il paradosso di Berry: la classe dei numeri naturali non definibili con meno di 100 parole è una classe propria, quindi non è detto che abbia minimo. Lo stesso ragionamento giustifica i paradossi del mucchio, dell'uomo calvo, ecc.

Non valendo il buon ordinamento, vengono a cadere le conseguenze dell'induzione. O meglio l'induzione sulle formule insiemistiche vale in $\mathbb{N}$, ma non quella sulle generiche proprietà, come ad esempio, rendere dolce il caffé.

Tuttavia i numeri naturali sono "veramente" i numeri naturali, nel senso che valgono i postulati di Peano (relativi alle proprietà interpretate come f.i.) e, importante, ogni insieme è in corrispondenza biunivoca con un solo numero naturale. Ma ci sono gli insiemi infiniti (in senso alternativo) e quindi anche i numeri naturali infiniti.

Una sottoclasse propria di $\mathbb{N}$ è $F\mathbb{N}$, la classe dei numeri naturali finiti. Non esiste il più grande numero naturale finito, sempre per il paradosso di Burali-Forti, e neppure il più piccolo numero naturale infinito, perché $F\mathbb{N}$ è una classe propria. Anche $F\mathbb{N}$ rende veri i postulati di Peano con l'induzione relativa a tutte le proprietà, interpretate come classi dell'universo esteso; $F\mathbb{N}$ è ben ordinato. Per Vopěnka l'identificazione di $\mathbb{N}$ con $F\mathbb{N}$ è la causa di diversi paradossi.

Si introducono poi le operazioni sui naturali nel modo "solito" delle operazioni sugli ordinali.

La costruzione degli insiemi numerici si sdoppia, considerando i naturali nella versione $\mathbb{N}$ o in quella $F\mathbb{N}$. Si ha allora, indicando con l'asterisco gli insiemi numerici senza considerare lo zero:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{\langle 0,\alpha\rangle \mid \alpha \in \mathbb{N}^*\};$$

$$F\mathbb{Z} = F\mathbb{N} \cup \{\langle 0,n\rangle \mid n \in F\mathbb{N}^*\};$$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*/\approx;$$

$$F\mathbb{Q} = F\mathbb{Z} \times F\mathbb{N}^*/\approx.$$

In queste scritture, con la relazione $\approx$ si intende denotare la solita relazione di equivalenza: $\langle a,b\rangle \approx \langle c,d\rangle$ se $a \times c = b \times d$; i numeri del tipo $\langle 0,\alpha\rangle$ nelle prime due scritture, si indicano, più semplicemente con il segno negativo, cioè scrivendo $-\alpha$.

Ma qui si introduce una nuova classe numerica, quella dei *razionali limitati*:

$$B\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} \mid (\exists n \in F\mathbb{N})(|x| < n)\};$$

si ha $F\mathbb{Q} \subseteq B\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$, e per ogni $x \in B\mathbb{Q}$, $y \neq \emptyset$, con $y \in F\mathbb{Q}$, esiste un numero naturale finito $n \in F\mathbb{N}$, tale che

$$|x| < n|y|.$$

Inoltre ogni classe che sia un segmento iniziale non vuoto e propriamente contenuto in $F\mathbb{Q}$, ha un maggiorante in $B\mathbb{Q}$.

DEFINIZIONE. Due numeri naturali di $x,y \in B\mathbb{Q}$ si dicono *infinitamente vicini* se la loro differenza in valore assoluto è minore di qualsiasi numero razionale del tipo $\frac{1}{n}$, con $n \in F\mathbb{N}^*$. In simboli si scrive $x \doteq y$.

Si prova che i razionali finiti sono densi nei razionali limitati. Inoltre per ogni $\alpha \in \mathbb{N}-F\mathbb{N}$, e per ogni $x \in \mathbb{Q}$, esiste $p \in \mathbb{Z}$ tale che $x \doteq \frac{p}{\alpha}$.

I numeri razionali limitati svolgono il "ruolo" dei numeri reali in contesto alternativo, in quanto si possono "pensare" come i "limiti" delle "successioni" di numeri razionali finiti. Ma nella trattazione dell'Analisi vi sono ancora alcuni problemi non ancora ben chiariti.

Non tratto qui altri problemi di Matematica classica, che trovano una versione adeguata nel contesto alternativo. Cito solo lo studio dei filtri e la presenza di ultrafiltri non principali, fatto sorpendente questo, se si pensa alla asserita finitezza di ogni insieme.