

Capitolo II. *Paradossi, incompletezza, infinito, ipotesi del continuo.*

1) I paradossi e il fenomeno dell'incompletezza.

I sistemi **ZF** e **NBG** (ed anche **MKM**) si offrono come una ricostruzione della Matematica che evita alcuni paradossi. Il fatto è che all'interno di questi sistemi si può ricostruire, come prima cosa, l'Aritmetica, provando i postulati di Peano. Per un noto teorema di Gödel (1931, cfr. [G1]) da esso discende che la coerenza è esprimibile ma *non* è dimostrabile, se si vuole che la teoria stessa sia coerente. Dunque l'esistenza di paradossi è sempre possibile; il fatto di averne evitato alcuni, non garantisce in alcun modo che nella teoria degli insiemi non ve ne possano essere degli altri.

Questi risultati forniscono una visione molto dubitativa della Matematica, ben diversa dalle visioni dogmatiche che spesso vengono proposte agli studenti.

Il sistema intuizionista è garantito dai paradossi, ma in esso non si ammettono insiemi infiniti, né in generale insiemi, ma solo i numeri naturali e ciò che si può ottenere con procedimenti molto limitati e costruttivi, a partire da essi.

Per quanto riguarda i paradossi la situazione è più complessa di quanto finora illustrato. L'analisi delle antinomie, dovuta a Ramsey, ha come primo atto quello di "scartare" alcuni paradossi, ritenendoli non pertinenti alla Matematica, ma piuttosto collegati a problemi linguistici. Vediamo ora alcuni paradossi che restano esclusi da **ZF** e **NBG**.

(i) *Il paradosso dell'uomo calvo* Se ad un uomo con molti capelli non si toglie nessun capello, con questa operazione, l'uomo non diventa calvo. L'asportazione di un capello in un uomo che non sia calvo, non lo trasforma in calvo. Dunque per il principio d'induzione posso togliere tutti i capelli ad un uomo senza che lui divenga mai calvo!

(ii) *Il paradosso di Berry*. Si considerino i numeri naturali e le frasi della lingua italiana che definiscono numeri naturali. Fissato un numero finito k , l'insieme delle frasi della lingua italiana che sono formate con h parole, con $h \leq k$, è un insieme finito, visto che posso considerare tutte le

possibili disposizioni con ripetizione a h a h delle 40.000 e più parole riportate su un dizionario. Tra queste disposizioni solo un numero finito definiscono numeri naturali. Sia $A = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è definibile con frasi della lingua italiana contenenti al più 100 parole} \}$. Come detto, A è un insieme finito, dunque $\mathbb{N} - A \neq \emptyset$. Ma un insieme di numeri naturali non vuoto ammette minimo. D'altra parte "**il minimo numero naturale non definibile con frasi della lingua italiana contenenti al più cento parole**" è una frase della lingua italiana contenente 16 parole (ad essere pignoli ci sono altre 14 parole date dalla ripetizione dello spazio tra una parola e l'altra) ed essa definisce esattamente un numero naturale, quello non definibile, appunto!

Il rifiuto di questi paradossi nelle considerazioni che hanno portato alla costruzione della Teoria degli Insiemi, è dovuto sostanzialmente ad un'osservazione di Peano, riferita al paradosso di Richard, dello stesso tipo di quello di Berry, in cui si utilizzano le definizioni dei numeri naturali date con frasi della lingua italiana. Per Peano tale paradosso non è pertinente alla Matematica in quanto in esso si coglie una notazione linguistica predominante che ne fa una contraddizione linguistica, non matematica. Per inciso, il teorema d'incompletezza di Gödel si presenta come una riformulazione matematica dell'antinomia di Richard.

Queste analisi sono corrette nel senso che il paradosso dell'uomo calvo si basa sul concetto non precisato di "essere calvo", mentre quello di Berry sul concetto di definizione non altrettanto chiarito.

2) Infinito ed Ipotesi del Continuo.

Vediamo ora quali sono i concetti di *infinito* presenti nella Matematica. A partire dalla scuola atomistica, si è fatta strada l'idea dell'infinito *in atto*, cioè di una totalità data simultaneamente assieme a tutti i suoi elementi. Contro questa interpretazione dell'infinito stanno la scoperta dell'incommensurabilità della diagonale rispetto al lato del quadrato ed i famosi paradossi di Zenone.

Da Aristotele in poi è prevalsa l'idea dell'infinito *potenziale*, cioè quella di una totalità cui si può aggiungere sempre un elemento non con-

siderato precedentemente tra gli elementi dati (in numero finito). Queste concezioni dell'infinito sono presenti tuttora nella Matematica: da una parte la Matematica idealistica classica accetta l'esistenza di insiemi infiniti in atto, ad esempio l'insieme dei numeri naturali o l'insieme dei numeri reali. Dall'altra parte l'Intuizionismo si limita a concezioni di infinito potenziale che sono presenti anche nella Matematica elementare, ma che solo con l'Intuizionismo vengono portate avanti con coerenza.

L'accettazione dell'esistenza di insiemi infiniti in atto nella Teoria degli Insiemi porta poi alla costruzione di varie specie di infiniti. Cantor prova che gli insiemi a e $\mathcal{P}(a)$ non sono in corrispondenza biunivoca e, passando alla cardinalità² (previo assioma di scelta) che $|a| < |\mathcal{P}(a)|$. Se dunque si assume che a sia un insieme infinito, si può generare una gerarchia di insiemi infiniti con cardinalità crescenti applicando ripetutamente l'operazione di passaggio all'insieme delle parti:

$$a, \mathcal{P}(a), \mathcal{P}(\mathcal{P}(a)), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(a))), \dots$$

Il problema del continuo si inserisce a questo punto: dato l'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} e noto che l'insieme dei numeri reali \mathbb{R} è equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, Cantor affermò di avere la dimostrazione (che non presentò mai) della non esistenza di un sottinsieme infinito di \mathbb{R} , la cui cardinalità sia intermedia tra quella di \mathbb{N} e quella di \mathbb{R} . In altre parole, se A è un insieme infinito e A è contenuto in \mathbb{R} , allora esiste una biezionatura tra A e \mathbb{N} , oppure una biezionatura tra A e \mathbb{R} . Così formulata l'ipotesi del continuo richiede l'esistenza di un insieme (una biezionatura).

L'ipotesi del continuo è stata utilizzata in Matematica fornendo risultati importanti, ma sono apparsi anche altri principi come l'*ipotesi di Souslin*: se X è un ordine lineare denso senza massimo e minimo, chiuso per la formazione di sup ed inf ed inoltre tale che ogni collezione di intervalli aperti a due a due disgiunti sia numerabile, allora X è isomorfo all'ordine di \mathbb{R} . Questa ipotesi è incompatibile con quella del continuo.

Le opere di Godel (1940 [G2]) e di Cohen (1966 [C]) hanno dimostrato che non c'è alcuna ragione, nella Teoria degli Insiemi, per accettare o rifiutare una qualsiasi delle posizioni delineate, a proposito del problema del continuo.

² Con il segno di valore assoluto intendo indicare la cardinalità dell'insieme.