**Prefazione**

*Ho pregato gli amici del Dipartimento di Matematica di Lecce di incaricarsi della diffusione di questi brevi appunti nella speranza che qualcuno li voglia rileggere criticamente separando ciò che è nuovo da ciò che è già noto, ciò che è piú interessante da ciò che è meno interessante, osservazioni ovvie ed osservazioni meno banali, problemi facili e problemi difficili.*

*Penso che anche quando godevo di una buona salute mi sarebbe stato difficile compiere questa separazione che è diventata quasi impossibile ora che i medici mi sconsigliano ogni lavoro faticoso.*

*In particolare io trovo faticosi tutti i lavori che si riferiscono alla "matematica scritta", per esempio scrivere lavori scientifici, leggere i lavori di altri autori, consultare libri e riviste matematiche. Trovo invece gradevoli e poco faticose le conversazioni in cui posso esporre tutte le idee e i programmi che non sono in grado di realizzare, i problemi che non riesco a risolvere ma che desidero molto veder presi in considerazione da altri matematici capaci di valutarne meglio di me l'interesse e la difficoltà, di indicare eventuali precedenti, riconoscere problemi analoghi già trattati nella letteratura matematica.*

*Penso che anche in futuro questo sarà l'unico tipo di lavoro matematico adatto a me. D'altra parte mi conforta il fatto che l'allontanamento dalla "matematica scritta" non diminuisce ma forse aumenta il mio interesse per la conversazione con gli amici matematici.*

*Il termine conversazioni va preso alla lettera: si tratta di conversazioni reali il cui sunto è stato scritto da interlocutori differenti e quindi il lettore non deve attendersi né uniformità di notazioni né assenza di ripetizioni. Meno ancora il lettore dovrà leggere queste conversazioni come svolgimento di un programma organico rivolto ad una determinata categoria di matematici in possesso di ben determinati prerequisiti oltre al semplice desiderio di parlare con altri matematici. Le varie conversazioni potranno essere lette indipendentemente l'una dall'altra salvo il caso di esplicita avvertenza contraria.*

*Agli amici che ho meno occasione di incontrare raccomando di scrivere a*

*Antonio Leaci*
*Dipartimento di Matematica*
*Università di Lecce*
*73100 Lecce*

*comunicandogli le loro osservazioni, commenti, e soprattutto eventuali informazioni bibliografiche, segnalando in particolare le congetture che appaiono piú facilmente dimostrabili o piú facilmente confutabili.*

*Ennio De Giorgi*

# 0. Richiami sulle misure di Hausdorff

Per comodità del lettore richiamiamo brevemente la definizione delle misure di Hausdorff e il concetto di insieme rettificabile, rinviando per esempio a: H.Federer, Geometric Measure Theory, Springer per una ampia trattazione di questi argomenti e per le dimostrazioni.

**Definizione 1.** *Sia $(X,\tau)$ uno spazio topologico e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di $X$. Si definisce misura di Borel regolare una applicazione $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ tale che 1) $\mu$ è numerabilmente subadditiva, cioè per ogni successione $(E_i)_i$ di sottoinsiemi di $X$ risulta*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \ ;$$

*2) i boreliani di $X$ sono misurabili secondo Carathéodory, cioè per ogni boreliano $B \subset X$ risulta*

$$\mu(E) = \mu(E \cap B) + \mu(E \setminus B) \quad \text{per ogni } E \subset X \ ;$$

*3) per ogni $E \subset X$ risulta*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(B); \quad E \subset B, B \text{ boreliano}\} \ .$$

**Definizione 2.** *Sia $(M,\sigma)$ uno spazio metrico, e sia $h > 0$ un numero reale. Si definisce la misura di Hausdorff $h$-dimensionale rispetto alla distanza $\sigma$ ponendo per ogni $E \subset M$*

$$\mathcal{H}^h_\sigma(E) = \frac{2^{1-h}\pi^{h/2}}{h\Gamma(h/2)} \lim_{\epsilon\to 0+} \ \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\text{diam}E_i)^h \ ; \ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \ , \ \text{diam}E_i < \epsilon\right\}$$

*ove* $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{s-1}$ dt *per $s > 0$.*
*Definiamo inoltre $\mathcal{H}^0_\sigma$ come la misura che conta i punti, cioè $\mathcal{H}^0_\sigma(E) = \text{card}(E)$.*

Le misure di Hausdorff in $\mathbf{R}^n$ rispetto alla distanza euclidea saranno, com' è usuale, denotate semplicemente con $\mathcal{H}^h$ .

Valgono i seguenti ben noti risultati.

1. Per $h \geq 0$ la misura $\mathcal{H}^h_\sigma$ è una misura di Borel regolare.

2. Se $(M,\sigma)$ è $\mathbf{R}^n$ munito della distanza euclidea allora $\mathcal{H}^n$ coincide con la misura di Lebesgue $n$-dimensionale. Inoltre, per ogni $h$, la misura $\mathcal{H}^h$ è invariante per traslazioni e, per ogni $r > 0$ si ha $\mathcal{H}^h(rE) = r^h\mathcal{H}^h(E)$ per ogni $E \subset \mathbf{R}^n$.

3. Se $0 < \mathcal{H}^h_\sigma(E) < +\infty$ allora $\mathcal{H}^k_\sigma(E) = 0$ per ogni $k > h$ e $\mathcal{H}^k_\sigma(E) = +\infty$ per ogni $k < h$.

Notiamo anche che la misura $\mathcal{H}^h$ coincide con ogni ragionevole definizione di misura $h$-dimensionale sulle sottovarietà regolari $h$-dimensionali di $\mathbf{R}^n$.

Alla luce del precedente risultato 4 ha senso porre la seguente

**Definizione 3.** *Si dice dimensione di Hausdorff dell'insieme $E$ contenuto nello spazio metrico $(M, \sigma)$ il numero reale*

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) = \inf \left\{ h \geq 0;\ \mathcal{H}^h_\sigma(E) = 0 \right\} .$$

Richiamiamo infine la definizione di insieme rettificabile.

**Definizione 4.** *Sia $(M, \sigma)$ uno spazio metrico, e sia $E \subset M$.*

*Si dice che $E$ è $h$-rettificabile se esiste una funzione lipschitziana che applica un insieme limitato di $\mathbf{R}^h$ su $E$.*

*Si dice che $E$ è numerabilmente $h$-rettificabile se $E$ è unione numerabile di insiemi $h$-rettificabili.*

*Si dice che $E$ è numerabilmente $(\mathcal{H}^h_\sigma, h)$-rettificabile se esiste un insieme numerabilmente $h$-rettificabile $F$ tale che $\mathcal{H}^h_\sigma(E \setminus F) = 0$.*

*Si dice che $E$ è $(\mathcal{H}^h_\sigma, h)$-rettificabile se è numerabilmente $(\mathcal{H}^h_\sigma, h)$-rettificabile e $\mathcal{H}^h_\sigma(E) < +\infty$.*

Vale la seguente caratterizzazione dei sottoinsiemi di $\mathbf{R}^n$ numerabilmente $(\mathcal{H}^h, h)$-rettificabili.

**Teorema 1.** Un sottoinsieme $E \subset \mathbf{R}^n$ è numerabilmente $(\mathcal{H}^h, h)$-rettificabile se e solo se esiste una successione $(S_i)_i$ di varietà $h$-dimensionali di classe $C^1$ tale che

$$\mathcal{H}^h \left( E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \right) = 0 \quad .$$

Ricordiamo infine che vale la seguente *formula dell'area*.

**Teorema 2.** Siano $h, n \in \mathbf{N}$ con $h \leq n$, sia $A \subset \mathbf{R}^h$ un aperto e $f \in (C^1(A))^n$. Detta $J(f)$ la matrice jacobiana di $f$ e $J(f)^*$ la sua trasposta, risulta

$$\int_A \sqrt{\det(J(f)^* J(f))}\ \mathrm{dy} = \int_{\mathbf{R}^n} \mathcal{H}^0(f^{-1}(x))\ d\mathcal{H}^h(x) .$$

## 1. Varietà analitiche e problemi variazionali connessi

### Prima conversazione



In questa conversazione diamo una definizione di varietà analitica con peso intero immersa in $\mathbf{R}^n$ (vedi Definizione 4) che sembra conveniente nello studio dei problemi variazionali (vedi Congettura 7). È ovviamente assai probabile che definizioni analoghe alla Definizione 4 e problemi analoghi a quelli considerati nella Congettura 7 siano già noti nella letteratura matematica.

Indichiamo con $\mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$ la famiglia degli aperti di $\mathbf{R}^n$ e con $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ la famiglia dei compatti di $\mathbf{R}^n$. Per ogni $A \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$ indichiamo con $C^\omega(A)$ lo spazio delle funzioni analitiche reali in $A$. Data una funzione $v$ poniamo

$$\mathrm{dom} C^\omega(v) = \cup\{A \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^n); v \in C^\omega(A)\}.$$

In maniera analoga si definisce $\mathrm{dom} C^k(v)$ per ogni $k \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$.

Per $h \in \mathbf{N}$ con $0 \leq h \leq n$, sia $\mathcal{H}^h$ la misura $h$-dimensionale di Hausdorff. Indichiamo con $B^h_\rho(x)$ la sfera $\{y \in \mathbf{R}^h; |y - x| < \rho\}$ e poniamo $\omega_h = \mathcal{H}^h(B^h_1(x))$.

Nel seguito consideriamo $\Omega$ fissato in $\mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$.

**Definizione 1.** *Definiamo $SL_h(\Omega)$ la classe delle funzioni $v \in L^1_{loc}(\Omega, d\mathcal{H}^h)$ tali che si abbia*

$$\mathrm{dom}\, v \cap \Omega = \{x \in \Omega : \text{esiste finito} \lim_{\rho \to 0} \rho^{-h} \int_{B^n_\rho(x)} v(\xi)\, d\mathcal{H}^h(\xi)\},$$

*ed inoltre risulti, per ogni $x \in \mathrm{dom}\, v \cap \Omega$,*

$$v(x) = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\omega_h \rho^h} \int_{B^n_\rho(x)} v(\xi)\, d\mathcal{H}^h(\xi).$$

**Definizione 2.** *Date $(f_j)_{j \in \mathbf{N}}$ e $f_\infty$, diciamo che $f_j \to f_\infty$ in $SL_h(\Omega)$ se e solo se $f_j, f_\infty \in SL_h(\Omega)$ e*

$$\lim_{j \to +\infty} \int_\Omega g\, f_j\, d\mathcal{H}^h = \int_\Omega g\, f_\infty\, d\mathcal{H}^h$$

*per ogni $g \in C^0_0(\Omega)$.*

Assegnata una funzione $v$ definiamo, per ogni $x \in \mathbf{R}^n$,

$$DSv(x) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp} v)\right]^2,$$

dove con $\operatorname{supp} v$ si è indicato il supporto di $v$.

**Definizione 3.** *Definiamo $V_h C^\omega(\Omega)$ la classe degli insiemi $E \subset \mathbf{R}^n$ tali che $E \cap \Omega = \overline{E} \cap \Omega$ e per ogni $x \in E \cap \Omega$ esistono $A \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$, $B \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^h)$, $\varphi \in (C^\omega(B))^n$, $\psi \in (C^\omega(A))^h$ tali che*

$$x \in A, \quad \psi(\varphi(y)) = y \quad \text{per ogni } y \in B, \quad E \cap A = \varphi(B).$$

Il collegamento tra la nozione di insieme di classe $V_1 C^\omega(\mathbf{R}^n)$ e la nozione di curva semplice analitica chiusa è dato dalla Congettura 1.

**Congettura 1.** Se $E$ è un insieme connesso ed $E \in V_1 C^\omega(\mathbf{R}^n) \cap \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ allora esiste $\phi \in (C^\omega(\mathbf{R}))^n$ tale che per ogni $x, y \in \mathbf{R}$,

$\phi(x) \neq \phi(y)$ se $0 < x - y < 2\pi$,

$\phi(x + 2\pi) = \phi(x)$,

$|\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}| > 0$,

e si ha

$\phi(\mathbf{R}) = E$.

Riguardo agli insiemi di classe $V_h C^\omega(\Omega)$ possiamo porre la seguente congettura.

**Congettura 2.** Dato un sottoinsieme $E \subset \mathbf{R}^n$ si ha $E \in V_h C^\omega(\Omega)$ se e soltanto se

$$E \cap \Omega = \overline{E} \cap \Omega,$$

$$\chi_E \in SL_h(\Omega),$$

$$E \cap \Omega \subset \operatorname{dom} C^\omega(DS\chi_E).$$

**Definizione 4.** *Definiamo $F_h C^\omega(\Omega)$ la classe delle funzioni $w$ tali che, per ogni $x \in \Omega$ esistono $A \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^n), \nu \in \mathbf{N}, E_1, \ldots, E_\nu \in V_h C^\omega(A)$ per cui $x \in A$ e*

$$w(y) = \sum_{i=1}^{\nu} \chi_{E_i}(y) \qquad \text{per ogni } y \in A.$$

**Congettura 3.** Se $w \in F_h C^\omega(\Omega)$, allora

$$\mathcal{H}^h(\text{spt } w \cap \Omega \setminus \text{dom}C^\omega(DSw)) = 0.$$

**Definizione 5.** *Date due funzioni $w$ ed $f$ definiamo il gradiente tangenziale ${}_w\nabla f$ imponendo che*

$$\text{dom } {}_w\nabla f = \text{dom}C^2(DSw) \cap \text{dom}C^1(f),$$

*e, per ogni $x \in \text{dom } {}_w\nabla f$, il vettore ${}_w\nabla f(x)$ abbia le componenti*

$${}_w\nabla_i f(x) = [( {}_w\nabla f)(x)]_i = \partial_{x_i} f(x) - \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{x_i x_j} DSw(x)\ \partial_{x_j} f(x).$$

**Congettura 4.** Date tre funzioni $w$, $f_1$ ed $f_2$ e posto

$$A = \text{dom}C^2(DSw) \cap \text{dom}C^1(f_1) \cap \text{dom}C^1(f_2),$$

se $f_1(x) = f_2(x)$ per ogni $x \in A \cap \text{supp } w$ allora si ha su tutto $A \cap \text{supp } w$,

$${}_w\nabla f_1 = {}_w\nabla f_2 \ .$$

Al problema dello scioglimento delle singolarità di una varietà che sia il supporto di una funzione di classe $F_h C^\omega(\mathbf{R}^n)$ corrisponde la seguente congettura.

**Congettura 5.** Se $w \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n)$ e $\text{supp } w \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$, allora esistono $m = m(h) \in \mathbf{N}$, $E \in V_h C^\omega(\mathbf{R}^m) \cap \mathcal{K}(\mathbf{R}^m)$, $A \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^m)$ e $\phi \in (C^\omega(A))^n$ tali che $E \subset A$, $w(x) = \text{card } \{y \in E; \phi(y) = x\}$ e, posto $b_{ij}(x) = {}_{\chi_E}\nabla_j \phi_i(x)$, si ha che la matrice $b(x)$ ha caratteristica $h$ per ogni $x \in E$.

**Congettura 6.** I funzionali definiti per $w \in F_h C^\omega(\Omega)$ da

$$\mathcal{F}(w, \Omega) = \int_\Omega |\nabla^i(DSw)|^p w \ d\mathcal{H}^h$$

sono semicontinui inferiormente rispetto alla convergenza in $SL_h(\Omega)$ per ogni $p \geq 1$, $i \in \mathbf{N}$, $i \geq 2$.

**Congettura 7.** Siano $f \in C^\omega(\mathbf{R}^n)$ tale che $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$, $i \in \mathbf{N}$, $i \geq 3$. Esiste

$$\min \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla^i(DSw)|^2 w \ d\mathcal{H}^h + \left( \int_{\mathbf{R}^n} w \ d\mathcal{H}^h \right)^2 + \int_{\mathbf{R}^n} fw \ d\mathcal{H}^h \right\}$$

nella classe delle funzioni $w \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n)$.

## Seconda conversazione

Alcuni lettori della prima conversazione hanno trovato scarse informazioni sul significato geometrico delle derivate della funzione $DSw(x) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp} w)\right]^2$. Possiamo perciò enunciare una serie di congetture la cui conferma o confutazione chiarirebbe ampiamente tale significato.

**Congettura 1.** Sia $f \in (C^\omega(\mathbf{R}^h))^{n-h}$, con $1 \le h < n$ tale che $|f(0)| = |\nabla f(0)| = 0$; sia $E = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n; x_{i+h} = f_i(x_1, \ldots, x_h), 1 \le i \le n-h\}$ e sia $w = \chi_E$. Allora

$$DSw(0) = 0, \qquad \nabla DSw(0) = 0,$$

$$\partial_{x_i}\partial_{x_k} DSw(0) = 0 \qquad \text{per} \quad i \ne k,$$

$$\partial_{x_i}\partial_{x_i} DSw(0) = 0 \qquad \text{per} \quad i \le h,$$

$$\partial_{x_i}\partial_{x_i} DSw(0) = 1 \qquad \text{per} \quad h < i \le n,$$

$$\partial_{x_{i+h}}\partial_{x_j}\partial_{x_k} DSw(0) = -\partial_{x_j}\partial_{x_k} f_i(0) \qquad \text{per} \quad 1 \le i \le n-h, \quad 1 \le j, k \le h.$$

**Definizione 1.** *Per ogni* $w \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n)$ *definiamo*

$$[MCw(x)]_i = MC_i w(x) = -\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}\partial_{x_j}\partial_{x_i} DSw(x).$$

Possiamo enunciare alcune congetture riguardanti la funzione vettoriale $MCw(x)$ precedentemente definita, dopo aver introdotto le seguenti notazioni: data $w \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n)$ e data $\psi \in (C^2(\mathbf{R}^n))^n$ poniamo $\;{}_w\mathrm{div}\,\psi = \sum_{i=1}^{n} {}_w\nabla_i \psi_i\;$ e $\;{}_w\Delta\psi = \sum_{i=1}^{n} {}_w\nabla_i({}_w\nabla_i \psi)$.

**Congettura 2.** Detta $Id_n$ l'identità su $\mathbf{R}^n$, per ogni $w \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n)$ e per ogni $\psi \in (C_0^1(\mathbf{R}^n))^n$ risulta

$$\int_{\mathbf{R}^n} \langle MCw, \psi\rangle \, d\mathcal{H}^h = -\int_{\mathbf{R}^n} ({}_w\mathrm{div}\,\psi)\, w \; d\mathcal{H}^h =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\int_{\mathbf{R}^n} w(Id_n + t\psi)\; d\mathcal{H}^h\right]_{t=0},$$

inoltre per ogni $x \in \operatorname{supp} w$ risulta

$$MCw(x) = {}_w\Delta(Id_n)(x).$$

Per ogni $w \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n)$ poniamo

$$\nu(w)(x) = \nabla^2 DSw(x).$$

Inoltre, dati due vettori $a, b \in \mathbf{R}^n$, poniamo $(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j$.

**Congettura 3.** Sia $f \in C^\omega(\mathbf{R}^n)$ e, per ogni $t \in \mathbf{R}$, sia $E_t = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) = t\}$. Per quasi ogni $t \in \mathbf{R}$ risulta

$$E_t \in V_{n-1} C^\omega(\mathbf{R}^n)\ , \quad \chi_{E_t} \in F_{n-1} C^\omega(\mathbf{R}^n),$$

e

$$\nu(\chi_{E_t}) = \frac{\nabla f \otimes \nabla f}{|\nabla f|^2}\ .$$

Se poi $w \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n)$ con $h > 0$, per quasi ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha

$$w\chi_{E_t} \in F_{h-1} C^\omega(\mathbf{R}^n)\ ,$$

e per $\mathcal{H}^{h-1}$–quasi ogni $x \in \operatorname{supp} w \cap E_t$ risulta

$$\nu(w\chi_{E_t})(x) = \nu(w)(x) + \frac{{}_w\nabla f(x) \otimes {}_w\nabla f(x)}{|{}_w\nabla f(x)|^2}\ .$$

Con le notazioni della Congettura 3 sarebbe interessante esprimere $MC(w\chi_{E_t})$ in funzione di ${}_w\nabla f,\ {}_w\nabla^2 f,\ \nabla^2 DSw,\ \nabla^3 DSw$ .

Con l'introduzione di $MCw$, si possono prendere in considerazione altri problemi variazionali del tipo di quelli esposti nella prima conversazione .

**Congettura 4.** Siano $f \in C^\omega(\mathbf{R}^n)$, $\epsilon > 0$ e $p > 0$. Esiste

$$\min \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} \epsilon\, |MCw|^2\, w\, d\mathcal{H}^h + \int_{\mathbf{R}^n} f\, w\, d\mathcal{H}^h \right\}$$

nella classe delle funzioni $w \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n)$ tali che $\int_{\mathbf{R}^n} w\, d\mathcal{H}^h \le p$ .

Si possono anche considerare problemi variazionali con discontinuità libere.

**Congettura 5.** Siano $f \in C^\omega(\mathbf{R}^n)$, $\epsilon > 0$, $p > 0$ e $\lambda > 0$. Esiste

$$\min \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} \epsilon\, |MCw|^2\, w\, d\mathcal{H}^h + \int_{\mathbf{R}^n} f\, w\, d\mathcal{H}^h + \lambda\, \mathcal{H}^{h-1}(K) \right\}$$

nella classe delle coppie $(K, w)$, dove $K \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ e $w \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n \setminus K)$ verifica la condizione $\int_{\mathbf{R}^n} w\, d\mathcal{H}^h \le p$ .

## Terza conversazione

Varie situazioni naturali suggeriscono l'idea di *varietà analitiche a tratti* (basta pensare per esempio ad una lastra di vetro colpita da un sasso) e questo fa ritenere che vi sia un qualche interesse nello studio di problemi matematici le cui soluzioni sono analitiche a tratti.

In questa conversazione si utilizzano le notazioni introdotte nella prima conversazione.

Accanto alla definizione di varietà analitica su $\Omega$ (cfr. definizione 3 della prima conversazione ), può essere interessante introdurre la nozione di *varietà analitica con bordo analitico su* $\Omega$.

**Definizione 1.** *Definiamo $V_h BC^\omega(\Omega)$ la classe degli insiemi $E \subset \mathbf{R}^n$ tali che $E \cap \Omega = \overline{E} \cap \Omega$ e per ogni $x \in E \cap \Omega$ esistono $A \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$, $B \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^h)$, $\varphi \in (C^\omega(B))^n$, $\psi \in (C^\omega(A))^h$ e $z \in \mathbf{R}^h$ tali che*

$$x \in A, \quad \psi(\varphi(y)) = y \quad \text{per ogni } y \in B, \quad E \cap A = \{\varphi(y); y \in B, \langle y, z \rangle \geq 0\}.$$

**Definizione 2.** *Sia $E \subset \mathbf{R}^n$ un insieme $\mathcal{H}^h$-misurabile. Poniamo*

$$\partial(E, \mathcal{H}^h) = \left\{ x \in \mathbf{R}^n; \quad \text{esiste} \quad \lim_{\rho \to 0+} \cos\left( \frac{2\pi}{\omega_h \rho^h} \mathcal{H}^h(E \cap B_\rho(x)) \right) = -1 \right\}.$$

**Osservazione 1.** Se $E \in V_h BC^\omega(\Omega)$ allora $\partial(E, \mathcal{H}^h) \in V_{h-1} C^\omega(\Omega)$.

Accanto alle definizioni precedenti, introduciamo anche alcune classi di varietà analitiche fuori di un insieme singolare (risp. varietà analitiche con bordo analitico fuori di un insieme singolare ).

**Definizione 3.** *Siano $\Omega \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$, $h \in \mathbf{N}$ con $0 < h \leq n$ e $s \in \mathbf{N}$, $0 \leq s \leq h$.*

*Definiamo $V_h Q_s C^\omega(\Omega)$ (risp. $V_h Q_s BC^\omega(\Omega)$ ) la classe degli insiemi $E \subset \Omega$ tali che esiste un insieme $C$ relativamente chiuso in $\Omega$ con $\mathcal{H}^s(C \cap \Omega) = 0$ e $E \in V_h C^\omega(\Omega \setminus C)$ (risp. $E \in V_h BC^\omega(\Omega \setminus C)$).*

*Definiamo inoltre $V_h \overline{Q}_s C^\omega(\Omega)$ (risp. $V_h \overline{Q}_s BC^\omega(\Omega)$ ) la classe degli insiemi $E \subset \Omega$ tali che esiste un insieme $C$ relativamente chiuso in $\Omega$ con $\dim_{\mathcal{H}}(C \cap \Omega) \leq s$ e $E \in V_h C^\omega(\Omega \setminus C)$ (risp. $E \in V_h BC^\omega(\Omega \setminus C)$).*

Con le notazioni precedentemente introdotte possiamo formulare alcune congetture riguardanti la regolarità parziale delle soluzioni di un problema di minimo con discontinuità libere studiato in E.De Giorgi–M.Carriero–A.Leaci: Existence Theorem for a Minimum

Problem with Free Discontinuity Set, Arch. Rational Mech. and Analysis, 108(1989), 195-218 (cfr. anche E. De Giorgi: Free Discontinuity Problems in Calculus of Variations, Atti del convegno in onore di J.L.Lions, Parigi 1988, cong.3, 5, 6 ).

**Congettura 1.** Assegnati $\lambda > 0$ e $g \in C^\omega(\mathbf{R}^n) \cap L^2(\mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$, sia $(\overline{C}, \overline{u})$ una soluzione del problema

$$\min_{C,u} \left\{ \int_{\mathbf{R}^n \setminus C} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbf{R}^n \setminus C} |u - g|^2 dx + \lambda \mathcal{H}^{n-1}(C) \right\},$$

al variare di $C$ tra i sottoinsiemi chiusi di $\mathbf{R}^n$ e al variare di $u$ tra le funzioni di $C^\omega(\mathbf{R}^n \setminus C)$.

Allora risulta $\overline{C} \in V_{n-1} Q_{n-1} C^\omega(\mathbf{R}^n)$.

Una congettura ancora piú fine è la seguente.

**Congettura 2.** Esiste una soluzione $(\overline{C}, \overline{u})$ del problema di minimo formulato nella congettura 1 tale che $\overline{C} \in V_{n-1} \overline{Q}_{n-2} C^\omega(\mathbf{R}^n)$.

La congettura seguente riguarda un problema "tipo Plateau" con discontinuità libere.

**Congettura 3.** Assegnati $\lambda > 0$ e un insieme chiuso $C \subset \mathbf{R}^n$ con $\mathcal{H}^h(C) < +\infty$, esiste

$$\min_{L,E} \left\{ \mathcal{H}^{h+1}(E) + \lambda \mathcal{H}^h(L) \right\},$$

al variare di $L$ tra i sottoinsiemi chiusi di $\mathbf{R}^n$ e al variare di $E$ nella classe $V_{h+1} B C^\omega(\mathbf{R}^n \setminus L)$ con la condizione $\partial(E, \mathcal{H}^{h+1}) \setminus L = C \setminus L$.

**Congettura 4.** Assegnati $\lambda > 0$, un insieme chiuso $C \subset \mathbf{R}^n$ con $\mathcal{H}^h(C) < +\infty$ e un insieme $S \in V_{h+r} C^\omega(\mathbf{R}^n)$ con $r \geq 1$, esiste

$$\min_{L,E} \left\{ \mathcal{H}^{h+1}(E) + \lambda \mathcal{H}^h(L) \right\},$$

al variare di $L$ tra i sottoinsiemi chiusi di $\mathbf{R}^n$ e al variare di $E$ nella classe $V_{h+1} B C^\omega(\mathbf{R}^n \setminus L)$ con le condizioni $E \subset S$ e $\partial(E, \mathcal{H}^{h+1}) \setminus L = C \setminus L$ .

Per il problema considerato nella congettura 3 (oppure nella congettura 4) sarebbe interessante trovare condizioni affinché

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \min_{L,E} \left\{ \mathcal{H}^{h+1}(E) + \lambda \mathcal{H}^h(L) \right\} < +\infty.$$

**Congettura 5.** Supposta vera la congettura 3 se

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \min_{L,E} \left\{ \mathcal{H}^{h+1}(E) + \lambda \mathcal{H}^h(L) \right\} = \alpha < +\infty$$

allora esiste

$$\min_{L,E} \{\mathcal{H}^{h+1}(E)\},$$

al variare di $L$ tra i sottoinsiemi chiusi di $\mathbf{R}^n$ con $\mathcal{H}^h(L) = 0$ e al variare di $E$ nella classe $V_{h+1}BC^\omega(\mathbf{R}^n \setminus L)$ con la condizione $\partial(E, \mathcal{H}^{h+1}) \setminus L = C \setminus L$ e tale minimo coincide con $\alpha$.

Si può formulare una congettura analoga alla precedente anche per il problema considerato nella congettura 4.

## Quarta conversazione

Per dimostrare l'esistenza di soluzioni del problema di minimo

$$\int_{\Omega\setminus K} |\nabla u|^2 \, d\mathcal{H}^n + \mathcal{H}^{n-1}(\Omega \cap K) + \int_{\Omega\setminus K} |u-g|^2 \, d\mathcal{H}^n$$

al variare di $K$ nei chiusi di $\mathbf{R}^n$, $u$ in $C^\omega(\Omega\setminus K)$ e $g \in C^\omega(\Omega)\cap L^2(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ assegnata, è stato utile introdurre la classe di funzioni $SBV_n^2(\Omega)$ approssimabili in $L^1_{loc}(\Omega)$ da funzioni $u_i \in C^\omega(\Omega \setminus K_i)$ tali che la somma

$$\int_{\Omega\setminus K_i} |\nabla u_i|^2 \, d\mathcal{H}^n + \mathcal{H}^{n-1}(K_i) + \int_{\Omega\setminus K_i} |u_i| \, d\mathcal{H}^n$$

è limitata al variare di $i$. Per la definizione e le proprietà degli spazi $SBV$ si vedano i lavori citati nella terza conversazione, ed i seguenti:

E.De Giorgi–L.Ambrosio: Un nuovo tipo di funzionale del calcolo delle variazioni, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., serie 8, 82 (1988), 199–210;

L.Ambrosio: A compactness theorem for a special class of functions of bounded variation, Boll. UMI 3-B(1989), 857-881;

L.Ambrosio: Existence theory for a new class of variational problems, Arch. Rational Mech. Anal., in corso di stampa.

Volendo introdurre un concetto analogo nella teoria delle varietà $h$ dimensionali, diamo la seguente definizione.

**Definizione 1.** *Sia $h$ un intero compreso tra 1 ed $n$, e sia $\alpha > 1$, $\Omega$ aperto in $\mathbf{R}^n$. Definiamo la classe $FSBV_h^\alpha(\Omega)$ come la classe delle funzioni di Borel localmente sommabili $w : \Omega \to \{0, 1, \ldots\}$ tali che esistono una successione di compatti $K_i \subset \Omega$, una successione di funzioni $w_i \in F_h C^\omega(\Omega \setminus K_i)$ tali che $w_i \to w$ in $SL_h(\Omega)$ e la somma*

$$\mathcal{H}^{h-1}(K_i) + \int_{\Omega\setminus K_i} w_i \, d\mathcal{H}^h + \int_{\Omega\setminus K_i} \left|{}_w\nabla^3(DSw_i)\right|^\alpha w_i \, d\mathcal{H}^h$$

*è limitata al variare di $i$.*

**Congettura 1.** Se $w \in FSBV_h^\alpha(\Omega)$ esiste una successione di insiemi $\mathcal{H}^h$-rettificabili $E_i$ tali che

$$w(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i}(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

**Congettura 2.** Se $h = n$, allora

$$\inf\{w, p\} \in SBV(\Omega)$$

per ogni intero $p$. Per la definizione della classe di funzioni speciali a variazione limitata $SBV(\Omega)$, si vedano i lavori citati nella terza conversazione e relativa bibliografia.

**Congettura 3.** Se $\alpha > h$ e $w \in FSBV_h^\alpha(\Omega)$, esistono $\gamma_w : \Omega \to [0, +\infty]$, $S_w \subset \Omega$ tali che

$$\lambda_1 \int_\Omega \varphi \gamma_w^\alpha w \, d\mathcal{H}^h + \lambda_2 \int_{S_w} \varphi \, d\mathcal{H}^{h-1} \leq$$

$$\leq \liminf_{i \to +\infty} \lambda_1 \int_\Omega \varphi \left|_w \nabla^3 (DSw_i)\right|^\alpha w_1 \, d\mathcal{H}^h + \lambda_2 \int_{K_i} \varphi \, d\mathcal{H}^{h-1}$$

per ogni scelta di $\lambda_1$, $\lambda_2 > 0$, $\varphi \in C_0^0(\Omega)$ non negativa e successioni $K_1$, $w_i$ come nella definizione 1. Inoltre, esiste una successione $K_i$, $w_i$ per la quale

$$\lambda_1 \int_\Omega \varphi \gamma_w^\alpha w \, d\mathcal{H}^h + \lambda_2 \int_{S_w} \varphi \, d\mathcal{H}^{h-1} = .$$

$$= \lim_{i \to +\infty} \lambda_1 \int_\Omega \varphi \left|_w \nabla^3 (DSw_i)\right|^\alpha w_1 \, d\mathcal{H}^h + \lambda_2 \int_{K_i} \varphi \, d\mathcal{H}^{h-1}.$$

**Congettura 4.** Sia $\alpha > h$. Per ogni $\lambda > 0$ ed ogni misura non negativa $\mu$ in $\Omega$ esiste il minimo di

$$\int_\Omega |\gamma_w|^\alpha w \, d\mathcal{H}^h + \lambda \mathcal{H}^{h-1}(S_w) + \int_\Omega (DSw)^\alpha \, d\mu.$$

Tra le varie proprietà di regolarità delle funzioni minimanti $w$ della congettura 4, ne segnaliamo una che potrebbe essere utile per varie applicazioni.

**Congettura 5.** Sia $w \in FSBV_h^\alpha(\Omega)$ una funzione minimizzante il funzionale della congettura 4. Si ha allora

$$\mathcal{H}^{h-1}(S_w) = \mathcal{M}^{h-1}(S_w),$$

ove

$$\mathcal{M}^{h-1}(K) = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\mathcal{H}^n\big(\{x \in \mathbf{R}^n : \operatorname{dist}(x, K) < \rho\}\big)}{\omega_{n-h+1}\, \rho^{n-h+1}}$$

per ogni insieme compatto $K \subset S_w$.

## Quinta conversazione

In questa conversazione useremo le notazioni introdotte nelle precedenti conversazioni, a cui rinviamo per le definizioni.

**Definizione 1.** *Sia $v \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n, d\mathcal{H}^h)$. Diremo che $v$ ammette funzione tangente in $x_0$ se esiste una funzione $\alpha_v(x_0) \in SL_h(\mathbf{R}^n)$ tale che risulti*

$$\lim_{\rho\to 0} \int_{\mathbf{R}^n} v(x_0 + \rho y)\, g(y)\, d\mathcal{H}^h(y) = \int_{\mathbf{R}^n} \alpha_v(x_0)(y)\, g(y)\, d\mathcal{H}^h(y) \qquad \textit{per ogni } g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

*Quando una tale funzione esiste porremo $Ftg_h v(x_0) = \alpha_v(x_0)$.*

**Definizione 2.** *Sia $v \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n, d\mathcal{H}^h)$. Diremo che $v$ ammette gradiente tangente in $x_0$ se esiste una funzione $\beta_v(x_0) \in SL_h(\mathbf{R}^n)$ tale che per ogni $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ risulti*

$$\lim_{\rho\to 0} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{v(x_0 + \rho y) - v(x_0 - \rho y)}{2\rho}\, g(y)\, d\mathcal{H}^h(y) = \int_{\mathbf{R}^n} \beta_v(x_0)(y)\, g(y)\, d\mathcal{H}^h(y).$$

*Quando una tale funzione esiste porremo $\nabla tg_h v(x_0) = \beta_v(x_0)$.*

**Definizione 3.** *Sia $v \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n, d\mathcal{H}^h)$. Se esiste una funzione $\gamma_v(x_0) \in SL_h(\mathbf{R}^n)$ tale che per ogni $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ risulti*

$$\lim_{\rho\to 0} \int_{\mathbf{R}^n} (v(x_0 + \rho y) - v(x_0 - \rho y))\, g(y)\, d\mathcal{H}^h(y) = \int_{\mathbf{R}^n} \gamma_v(x_0)(y)\, g(y)\, d\mathcal{H}^h(y),$$

*allora porremo $\partial tg_h v(x_0) = \gamma_v(x_0)$.*

Osserviamo che gli operatori appena definiti sono locali e lineari.
È interessante considerare anche iterazioni di tali operatori.

**Definizione 4.** *Sia $v \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n, d\mathcal{H}^h)$. Poniamo:*

$$FT_h v(x,y) = \begin{cases} Ftg_h v(x)(y) & \textit{se esiste } Ftg_h v(x) \\ 0 & \textit{se non esiste } Ftg_h v(x) \end{cases};$$

$$\partial T_h v(x,y) = \begin{cases} \partial tg_h v(x)(y) & \textit{se esiste } \partial tg_h v(x) \\ 0 & \textit{se non esiste } \partial tg_h v(x) \end{cases}$$

*ed inoltre:*

$$FT_h^2 v = FT_{2h}(FT_h v),$$

$$FT_h^{i+1} v = FT^i_{2^i h}(FT_h v) \qquad \textit{per ogni } i > 1.$$

Enunciamo ora alcune congetture riguardanti il comportamento delle classi $V_hC^\omega$ ed $F_hC^\omega$ introdotte nella prima conversazione rispetto a questi operatori.

**Congettura 1.** Sia $w \in F_hC^\omega(\mathbf{R}^n)$. Allora per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ esistono $Ftg_h w(x)$, $\nabla tg_h w(x)$, $\partial tg_h w(x)$ ed inoltre si ha $\nabla tg_h w(x) = 0$ e $\partial tg_h w(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}^n$.

**Congettura 2.** Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n)$ e $w \in F_hC^\omega(\mathbf{R}^n)$. Allora per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ esistono $Ftg_h(fw)(x)$, $\nabla tg_h(fw)(x)$, $\partial tg_h(fw)(x)$ ed inoltre si ha

$$Ftg_h(fw)(x) = f(x)Ftg_h w(x)$$

$$\nabla tg_h(fw)(x)(y) = \langle \nabla f(x), y\rangle Ftg_h w(x)(y)$$

$$\partial tg_h(fw)(x) = 0$$

**Congettura 3.** Se $w \in F_hC^\omega(\mathbf{R}^n)$, per ogni $i \geq 1$ si ha $FT_h^i w \in F_{2^i h}C^\omega(\mathbf{R}^{2^i n})$.

Le seguenti congetture legano gli operatori definiti in questa conversazione con l'operatore ${}_w\nabla$ introdotto nella prima conversazione.

**Congettura 4.** Per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $h \in \mathbf{N}$ con $h \leq n$ esiste un polinomio $\varphi_{h,n}$ tale che per ogni $w \in F_hC^\omega(\mathbf{R}^n)$ e per ogni $K \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ risulta

$$\int_{K\times B_\rho(0)} FT_h w(z)\,d\mathcal{H}^{2h}(z) = \rho^h \int_K \varphi_{h,n}({}_w\nabla Id_n,\ {}_w\nabla^2 Id_n)\,w\,d\mathcal{H}^h.$$

**Congettura 5.** Sia $E \in V_{h-1}C^\omega(\mathbf{R}^n) \cap \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ e sia $w \in F_hC^\omega(\mathbf{R}^n \setminus E)$; se esiste $\rho > 0$ tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho^i}{(2i)!} \int_{\mathbf{R}^n} |{}_w\nabla^i Id_n|^2 w\,d\mathcal{H}^h < +\infty$$

allora per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ esistono $Ftg_h w(x)$, $\partial tg_h w(x)$ e si ha $2|\partial T_h w| \in F_{2h-1}C^\omega(\mathbf{R}^{2n})$. Inoltre le seguenti due condizioni sono equivalenti:

(a) *Per ogni* $f \in C^1(\mathbf{R}^n)$ *esiste* $\nabla tg_h(fw)(x)$ *per ogni* $x \in \mathbf{R}^n$

(b) $\partial tg_h w(x) = 0$ *per ogni* $x \in \mathbf{R}^n$.

**Congettura 6.** Siano $v, w \in F_hC^\omega(\mathbf{R}^n)$, $k \in \mathbf{N}$ e supponiamo che per un certo $x$ sia $v(x) = w(x)$ e che per ogni $i \leq k$ si abbia ${}_v\nabla^i Id_n(x) = {}_w\nabla^i Id_n(x)$. Allora

$$FT_h^i v(x,z) = FT_h^i w(x,z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbf{R}^{n(2^i-1)} \text{ e per ogni } i \leq k.$$

Passiamo ora ad enunciare alcune congetture di tipo variazionale.

**Congettura 7.** Sia $E \in V_{h-1}C^\omega(\mathbf{R}^n) \cap \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ e sia $w \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n \setminus E)$; supponiamo che esista $\rho > 0$ tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho^i}{(2i)!} \int_{\mathbf{R}^n} |_w \nabla^i Id_n|^2 w d\mathcal{H}^h < +\infty.$$

Allora per ogni $i \geq h+1$ esiste finito il

$$\min\left\{ \int_{\mathbf{R}^n} |_u \nabla^i Id_n|^2 u d\mathcal{H}^h \right\}$$

al variare di $u \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n \setminus E)$ con $\partial T_h u = \partial T_h w$.

**Congettura 8.** Sia $E \in V_{h-1}C^\omega(\mathbf{R}^n) \cap \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ e sia $w \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n \setminus E)$; supponiamo che esista $\rho > 0$ tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho^i}{(2i)!} \int_{\mathbf{R}^n} |_w \nabla^i Id_n|^2 w d\mathcal{H}^h < +\infty.$$

Allora per ogni $i \geq 2$ esiste finito il

$$\min\left\{ \int_{\mathbf{R}^n} |_u \nabla^i Id_n|^2 u d\mathcal{H}^h \right\}$$

al variare di $u \in F_h C^\omega[(\mathbf{R}^n \setminus (E \cup K)]$ con $K$ chiuso, $\mathcal{H}^{h-1}(K) = 0$ e $\partial tg_h u(x) = \partial tg_h w(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}^n \setminus K$.

## 2. Derivate geometrico-distribuzionali

**Definizione 1.** *Sia $\mu$ una misura reale definita sui boreliani limitati di $\mathbf{R}^n$ tale che $|\mu|(K) < +\infty$ per ogni compatto $K$. Sia $f : E \to \mathbf{R}^k$ e sia $a \in \mathbf{R}^k$; diremo che $a$ è il $\mu$-limite approssimato di $f$ in $x$, e porremo $a = \mu - ap \lim_{y \to x} f(y)$ se:*

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{|\mu|(B_\rho(x) \cap E)}{|\mu|(B_\rho(x))} = 1$$

*e*

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{|\mu|(B_\rho(x))} \int^*_{B_\rho(x) \cap E} (|f(y) - a| \wedge 1) d|\mu|(y) = 0$$

*dove $\int^*$ indica l'integrale superiore.*

**Osservazione 1.** Questa definizione di limite approssimato è leggermente piú generale della definizione di punto di Lebesgue ed è ispirata alla definizione di $(\mu, V) - ap \lim$ data da H.Federer (cfr. H.Federer, Geometric Measure Theory, 2.9.12).

**Definizione 2.** *Siano $\mu$ ed $f$ come nella definizione 1, e sia $\tilde{f}(x) = \mu - ap \lim_{y \to x} f(y)$; sia inoltre, per $w \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^k)$, cioè $w : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$, $w$ lineare:*

$$\psi_x(w, y) = \begin{cases} \dfrac{|f(y) - \tilde{f}(x) - w(y - x)|}{|y - x|} & \text{se } y \neq x, \\ 0 & \text{se } y = x; \end{cases}$$

*porremo $w \in {}_\mu\mathcal{D}f(x)$ se*

$$\mu - ap \lim_{y \to x} \psi_x(w, y) = 0.$$

Osserviamo che ${}_\mu\mathcal{D}f(x)$ è un sottoinsieme convesso e chiuso di $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^k)$, che pensiamo munito della norma hilbertiana

$$\|w\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \langle w(e_i), e'_j \rangle^2$$

dove $(e_i)$ (risp. $(e'_j)$) è una base ortonormale in $\mathbf{R}^n$ (risp. $\mathbf{R}^k$).

**Definizione 3.** *Se ${}_\mu\mathcal{D}f(x) \neq \emptyset$, indicheremo con ${}_\mu\nabla f(x)$ l'elemento di norma minima in ${}_\mu\mathcal{D}f(x)$, cioè porremo $w = {}_\mu\nabla f(x)$ se $w \in {}_\mu\mathcal{D}f(x)$ e $\|w\| \leq \|v\|$ per ogni $v \in {}_\mu\mathcal{D}f(x)$.*

**Definizione 4.** *Sia $\mu$ come nella definizione 1, e sia $\gamma$ una misura vettoriale a $n$ componenti verificanti le stesse condizioni di $\mu$; diremo che $\gamma$ è la derivata geometrico-distribuzionale di $\mu$ e porremo $\gamma = GDD\mu$ se per ogni $f \in C_0^1(\mathbf{R}^n)$ risulta*

$$\int_{\mathbf{R}^n} {}_\mu\nabla_i f d\mu + \int_{\mathbf{R}^n} f \; d\gamma_i = 0 \qquad \textit{per ogni } i \in \{1,..,n\}.$$

**Osservazioni.** 2. I discorsi sopra sviluppati si possono evidentemente localizzare considerando misure definite in un qualsiasi aperto di $\mathbf{R}^n$.

3. La nozione di derivata geometrico-distribuzionale di $\mu$ dovrebbe unificare i tre concetti di funzioni aventi derivate misure, di bordo e di curvatura media.

4. Il concetto di derivata geometrico-distribuzionale si estende senza difficoltà alle misure vettoriali e quindi si può passare alle derivate geometrico-distribuzionali di ordine superiore al primo. Tali derivate saranno indicate con $GDD^i$.

5. Sarebbe interessante confrontare la definizione di derivata ${}_\mu\nabla$ con la definizione di ${}_w\nabla$ (si veda la definizione 5 nella prima conversazione sulle varietà analitiche e problemi variazionali connessi) nei casi in cui entrambe siano definite.

6. Si potrebbe pensare alle possibili estensioni del concetto di $\mu - ap\lim$ al caso di spazi metrici qualunque e del concetto di ${}_\mu\mathcal{D}$ al caso di spazi di Banach.

7. Con le notazioni delle prime due conversazioni sulle varietà analitiche e problemi variazionali connessi (si veda in particolare la definizione 5 nella prima), posto per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ $p_s(x) = x_s$ $(s = 1,..,n)$, e posto

$$b_{ijs} = {}_w\nabla_i\, {}_w\nabla_j\, p_s - {}_w\nabla_j\, {}_w\nabla_i\, p_s,$$

vale la formula:

$${}_w\nabla_i\, {}_w\nabla_j\, f - {}_w\nabla_j\, {}_w\nabla_i\, f = \sum_{s=1}^{n} b_{ijs}\, {}_w\nabla_s\, f;$$

per studiare iterazioni degli operatori ${}_\mu\mathcal{D}$ ${}_\mu\nabla$ bisognerebbe scoprire analoghe formule sulla commutazione dell'ordine di derivazione.

Per l'ulteriore indagine sulle proprietà della derivata geometrico-distribuzionale sarebbe importante confermare o smentire la seguente congettura.

**Congettura 1.** Se $\mu$ è una misura verificante le condizioni della definizione 1 ed esiste $GDD\mu$ allora esistono $n+1$ funzioni $f_0, f_1, ..., f_n$ tali che per ogni boreliano limitato $B \subset \mathbf{R}^n$ risulti:

$$\mu(B) = \sum_{i=0}^{n} \int_B f_i(x)\; d\mathcal{H}^i(x).$$

**Osservazioni.** 8. Si possono dare condizioni sufficienti sulle $f_i$ in modo che la misura $\mu$ definita per ogni boreliano limitato $B$ dalla $\mu(B) = \sum_{i=0}^{n} \int_B f_i\, d\mathcal{H}^i$ possieda derivata geometrico-distribuzionale. Per esempio si potrebbe cominciare a pensare a funzioni $f_i = \varphi_i \chi_{V_i}$, con $\varphi_i$ funzioni e $V_i$ varietà abbastanza regolari.

9. Posto per ogni boreliano limitato $B$ $\mu(B) = \sum_{i=0}^{n} \int_B f_i \, d\mathcal{H}^i$, e supposto che esista $GDD\mu$, ci si può domandare se esistano anche le $GDD\mu_i$, ove $\mu_i(B) = \int_B f_i \, d\mathcal{H}^i$.

**Definizione 5.** *Sia $\mu$ come nella definizione 1. Per ogni $x$ nel supporto di $\mu$ indicheremo con $N\mu(x)$ e con $T\mu(x)$ rispettivamente lo spazio normale e lo spazio tangente a $\mu$ in $x$, definiti come segue:*

$$N\mu(x) = \{z \in \mathbf{R}^n : \langle\, {}_\mu\nabla f(x), z\rangle = 0 \text{ per ogni } f \in C^1(\mathbf{R}^n)\};$$

$$T\mu(x) = \text{il complemento ortogonale di } N\mu(x).$$

*Indicheremo inoltre per ogni $x$ nel supporto di $\mu$ e per ogni $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ con $\mathcal{P}_{N\mu}f(x)$ la proiezione di $f(x)$ su $N\mu(x)$ e con $\mathcal{P}_{T\mu}f(x)$ la proiezione di $f(x)$ su $T\mu(x)$*

**Osservazione 10.** Per ogni $f \in C^1$ risulta: ${}_\mu\nabla f(x) = \mathcal{P}_{T\mu}\nabla f(x)$.

**Congettura 2.** Sia $P$ un poliedro in $\mathbf{R}^n$, e sia $\mu(B) = \mathcal{H}^n(B \cap P)$ per ogni boreliano $B \subset \mathbf{R}^n$. Allora per ogni $i$ esistono le derivate geometrico-distribuzionali $GDD^i\mu$ ed inoltre $GDD^{n+1}\mu = 0$.

Le prossime congetture riguardano alcune proprietà delle funzioni lipschitziane e delle derivate geometrico-distribuzionali.

**Congettura 3.** Sia $\mu$ tale che esista $GDD\mu$, e sia $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ lipschitziana; allora per $\mu - q.o.\ x \in \mathbf{R}^n$ esiste ${}_\mu\nabla\varphi(x)$ e si ha

$$\int_{\mathbf{R}^n} {}_\mu\nabla\varphi d\mu + \int_{\mathbf{R}^n} \varphi GDD\mu = 0.$$

**Congettura 4.** Sia $\mu$ tale che esista $GDD\mu$, e sia $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ lipschitziana; allora esiste $GDD(\varphi\mu)$ e si ha:

$$GDD(\varphi\mu) = \varphi GDD\mu + ({}_\mu\nabla\varphi)\mu.$$

## 3. Spazi metrici quasi-riemanniani

Una proposta di definizione

Qui si propone una definizione di spazio metrico quasi-riemanniano $(M, \sigma, g)$, uno spazio che abbia contemporaneamente una struttura metrica data da $\sigma$ e una "riemanniana" data da $g$, e tale che le due strutture verifichino quasi ovunque alcune condizioni di compatibilità.

### 1.Preliminari.

(1.1) Sia $(M, \sigma)$ uno spazio metrico, con $M$ connesso, completo e $\sigma$ una distanza *geodetica* (detta anche distanza *interna* o *intrinseca*) cioè tale che per ogni $\xi, \eta \in M$ si abbia

$$\sigma(\xi, \eta) = \inf\{\ L(\gamma)\ ;\ \gamma : [0,1] \to M,\ \gamma(0) = \xi, \gamma(1) = \eta\ \}$$

dove $L$ è la variazione totale della funzione $\gamma$ rispetto alla metrica $\sigma$.

(1.2) Indichiamo con $Bilip(\mathbf{R}^n, M)$ l'insieme delle coppie $(V, \varphi)$ dove $V$ è un aperto di $\mathbf{R}^n$, $\varphi : V \to U$ un omeomorfismo bilipschitziano tra $V$ ed un aperto $U = \varphi(V)$ di $(M, \sigma)$ La coppia $(V, \varphi)$ è detta anche *parametrizzazione* di $U$.

Posto $\mathcal{M} = Bilip(\mathbf{R}^n, M)$, se $M = \cup\{\varphi(V); (V, \varphi) \in \mathcal{M}\}$ allora $(M, \sigma)$ è una varietà di Lipschitz $n$-dimensionale ($n$-$LIP$ varietà, cfr. §3).

Se $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ e $M = \cup\{\varphi(V); (V, \varphi) \in \mathcal{F}\}$ allora $\mathcal{F}$ è un atlante per $(M, \sigma)$. Cosí $\mathcal{M}$ risulta l'atlante massimale della $n$-$LIP$ varietà $(M, \sigma)$.

(1.3) Se $W = (V, \varphi)$ è una parametrizzazione, è possibile definire su $V$ una distanza $\sigma_W$, indotta da $W$, mediante

$$\sigma_W(x, y) = \sigma(\varphi(x), \varphi(y)) \qquad \forall x, y \in V$$

**Congettura 1.** Sia $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ un fissato atlante di $(M, \sigma)$, sia $\mathcal{T}$ la famiglia di tutte le distanze $\tau$ su $M$ ($LIP$) equivalenti a $\sigma$ e per ogni $W = (V, \varphi)$ sia assegnata una forma bilineare simmetrica $g(W)$ a coefficienti $(g(W)_{ij})$ $\mathcal{H}^n$ -misurabili verificante per quasi ogni $(x, y) \in V^2$ la seguente condizione

$$\lambda_0 \leq \sum_{i,j=1}^{n} g(W)^{ij}(x) \, \frac{\partial \sigma_W(x, y)}{\partial x_i} \, \frac{\partial \sigma_W(x, y)}{\partial x_j} \leq \lambda_1 \tag{1.4}$$

dove $\lambda_0$ e $\lambda_1$ sono due numeri reali positivi e $(g(W)^{ij})$ sono gli elementi della matrice inversa di $(g(W)_{ij})$. Allora esiste una distanza $\overline{\tau}$ tale che

$$\overline{\tau} = \max\Big\{ \tau \in \mathcal{T}; \lambda_0 \tau \leq \sigma \leq \lambda_1 \tau,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} g(W)^{ij}(x)\,\frac{\partial\tau_W(x,y)}{\partial x_i}\,\frac{\partial\tau_W(x,y)}{\partial x_j} \le 1 \text{ q.o. su } V,\ \forall W\in\mathcal{F}\Big\}$$

**Congettura 2.** Se la congettura 1 è verificata, allora anche $\overline{\tau}$ è una distanza geodetica.

(1.5) Supposta vera la congettura 1, se $W=(V,\varphi)$ è una parametrizzazione, poniamo, come al solito

$$\overline{\tau}_W(x,y)=\overline{\tau}(\varphi(x),\varphi(y))$$

e consideriamo la misura di Hausdorff $n$-dimensionale rispetto a $\overline{\tau}_W$, $\mathcal{H}^n_{\overline{\tau}_W}$.

Allora poniamo i seguenti problemi.

**Problema 1.** Trovare sotto quali condizioni su $\mathcal{F}$ e su $g$ vale per ogni $W=(V,\varphi)\in\mathcal{F}$ la seguente formula

$$\int_V f\,d\mathcal{H}^n_{\overline{\tau}_W}=\int_V f\sqrt{\det(g(W)_{ij})}\,dx \qquad \forall f\in C^0_0(V)$$

È prevedibile che saranno necessarie condizioni di compatibilità tra le parametrizzazioni e sufficienti condizioni di regolarità per $g$.

**Problema 2.** Trovare sotto quali condizioni su $\mathcal{F}$ e su $g$ per ogni funzione $LIP$ $f: M\to\mathbf{R}$ e per ogni parametrizzazione $W=(V,\varphi)\in\mathcal{F}$ si abbia per quasi ogni $x\in V$

$$\limsup_{\zeta\to\varphi(x)}\left|\frac{f(\zeta)-f(\varphi(x))}{\overline{\tau}(\zeta,\varphi(x))}\right|^2=\sum_{i,j=1}^{n} g(W)^{ij}(x)\,\partial_i(f\circ\varphi)\,\partial_j(f\circ\varphi)$$

**Osservazione.** Con simbolismo equivalente potremmo scrivere anche

$$|\nabla f|_{\overline{\tau}}(\varphi(x))=|d(f\circ\varphi)(x)|_g$$

dove abbiamo posto, in accordo col concetto di pendenza di una funzione e di modulo del differenziale,

$$|\nabla f|_{\overline{\tau}}=\limsup_{\zeta\to\varphi(x)}\left|\frac{f(\zeta)-f(\varphi(x))}{\overline{\tau}(\zeta,\varphi(x))}\right|$$

e

$$|d(f\circ\varphi)(x)|_g=\left(\sum_{i,j=1}^{n} g(W)^{ij}(x)\,\partial_i(f\circ\varphi)\,\partial_j(f\circ\varphi)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(1.6) Nelle ipotesi in cui hanno risposta affermativa i problemi 1 e 2 è possibile definire i corrispondenti spazi di Sobolev. Ciò certamente accade se $(M, g)$ è una varietà riemanniana di classe $C^k$ con $k \geq 1$ e $\overline{\tau}$ è la distanza intrinseca indotta da $g$: basta anzi che i coefficienti di $g$ siano continui in ogni carta e che siano compatibili con il cambiamento delle carte.

I problemi 1 e 2 suggeriscono di definire un'ampia classe di spazi detti *spazi metrici quasi-riemanniani* che andiamo a definire.

## 2.Proposta di definizione di spazio metrico quasi-riemanniano.

(2.1) Uno *spazio metrico quasi-riemanniano di dimensione* $n$, $(M, \sigma, g)$, è una $n$-varietà $LIP$ $(M, \sigma)$ tale che esista un atlante $\mathcal{F} = \{(V, \varphi)\}$ e una famiglia $g = \{g(W);\ W = (V, \varphi) \in \mathcal{F}\}$ di forme bilineari simmetriche a coefficienti $\{g(W)_{ij}\}$ $\mathcal{H}^n$-misurabili verificanti per ogni $W$ le seguenti condizioni

1) per q.o. $(x, y) \in V^2$ si ha

$$0 < \lambda_0 \leq \sum_{i,j=1}^{n} g(W)^{ij}(x) \frac{\partial \sigma_W(x,y)}{\partial x_i} \frac{\partial \sigma_W(x,y)}{\partial x_j} \leq \lambda_1 < +\infty\,;$$

2) per ogni $f \in C_0^0(V)$ si ha

$$\int_V f\, d\mathcal{H}^n_\sigma = \int_V f \sqrt{\det(g(W)_{ij})}\, dx$$

3) per ogni $f : M \to \mathbf{R}$ $LIP$ vale per q.o.$x \in V$

$$|\nabla f|_\sigma(\varphi(x)) = \left( \sum_{i,j} g(W)^{ij}(x) \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_i} \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_j} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(2.2) Se $(M, g)$ è una varietà riemanniana e $\sigma$ è l'usuale distanza intrinseca indotta da $g$, allora 1), 2), 3) sono verificate dappertutto.

**Congettura 3.** Sia $(M, g, \sigma)$ uno spazio metrico quasi riemanniano di dimensione $n$. Se $\mathcal{F} = \mathcal{M}$, allora la distanza massima $\overline{\tau}$, congetturata in 1, si può costruire cosí

$$\overline{\tau}(x, y) = \lim_{p \to +\infty} \left[ \inf \left\{ \left( \int_M |du|^p\, dv \right)^{\frac{1}{p}} ; u \in Lip(M),\ u(x) = 0,\ u(y) = 1 \right\} \right]^{-1}$$

dove naturalmente $|du| = |du|_g = |\nabla u|_\sigma$.

## 3. Confronto con la bibliografia.

(3.1) Uno spazio metrico $(M, \sigma)$ con $\sigma$ distanza geodetica è detto anche *spazio di lunghezza*. In tali ipotesi, se $M$ è completo (connesso) e localmente compatto, allora ogni coppia di punti di $M$ può essere congiunta con una geodetica minimizzante ([2], pag.5; [4], pag. 172).

(3.2) Una *$n$-varietà di Lipschitz* è uno spazio metrico $(M, \sigma)$ paracompatto e connesso tale che ogni punto $x \in M$ ha un intorno chiuso $U$ bilipschitz-omeomorfo all' $n$-disco chiuso $\overline{\mathbf{B}}^n \subset \mathbf{R}^n$.

Si può vedere ([3], pag. 98) che la definizione precedente è equivalente a quella data tramite atlanti.

(3.3) Una $n$-varietà $LIP$ è una coppia costituita da una $n$-varietà topologica $M$ paracompatta e connessa e da una classe di equivalenza di $LIP$ atlanti. Un *$LIP$ atlante* su $M$ è una famiglia di carte $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ dove gli $\{U_\alpha\}$ formano un ricoprimento aperto di $M$ e

$$\Phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$$

porta omeomorficamente $U_\alpha$ su un insieme $V_\alpha$ che è aperto in $\mathbf{R}^n$ o in $\mathbf{R}^n_+$ e

$$\Phi_{\alpha\beta} = \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1} : \Phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \Phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

è $LIP$ per ogni $\alpha, \beta \in \Lambda$.

Ad ogni carta $(U_\alpha, \Phi_\alpha)$ possiamo associare la parametrizzazione $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$, dove $V_\alpha = \Phi_\alpha(U_\alpha)$ e $\varphi_\alpha = \Phi_\alpha^{-1}$.

(3.4) Una *(struttura) metrica riemanniana* su $M$ ([5], pag. 45) è una collezione $g = \{g^\alpha\}$, dove $g^\alpha$ è una forma bilineare simmetrica definita positiva su $V_\alpha \subset \mathbf{R}^n$, con componenti misurabili, che soddisfa quasi ovunque le condizioni di compatibilità

$$\Phi^*_{\alpha\beta} g^\beta = g^\alpha \qquad \text{(senza sommare)}$$

dove $\Phi^*_{\alpha\beta}$ è la trasposta dell'applicazione lineare $d\Phi_{\alpha\beta}$ definita componente per componente. Ricordiamo che $\Phi_{\alpha\beta}$, essendo $LIP$, è differenziabile q.o.

(3.5) Una (struttura) metrica riemanniana $g$ sarà chiamata *(struttura) metrica riemanniana $LIP$* su $M$ se ogni $g^\alpha$ definisce su $V_\alpha$ una norma $L_2$ che è equivalente a quella $L_2$ standard, cioè esistono due costanti $k_\alpha$ e$K_\alpha$ tali che, per ogni forma $\omega$ differenziabile e a supporto compatto in $V_\alpha$ si abbia

$$k_\alpha \|\omega\| \le \|\omega\|_{g^\alpha} \le K_\alpha \|\omega\| \tag{3.6}$$

dove

$$\|\omega\|^2 = \int_M \omega \wedge *\omega = \int_M |\omega|^2 \, dv ,$$

e

$$\|\omega\|^2_{g^\alpha} = \int_M \omega \wedge *_\alpha \omega = \int_M |\omega|^2_{g^\alpha} \, dv_\alpha$$

essendo $*$ e $*_\alpha$ gli operatori di Hodge rispettivamente della metrica euclidea e di $g^\alpha$. Naturalmente se $x_1, ... x_n$ sono coordinate in $\mathbf{R}^n$, allora

$$dv_\alpha = \sqrt{|g^\alpha|}\, dx_1 \wedge ... \wedge dx_n.$$

Si osservi che metrica riemanniana $LIP$ non vuol dire che le componenti di $g$ siano $LIP$, ma da (3.6) segue che è possibile trovare due costanti $h_\alpha$ e $H_\alpha$ strettamente positive tali che per ogni carta $(U_\alpha, \Phi_\alpha)$ si abbia per quasi ogni $z \in V_\alpha$

$$h_\alpha^2 \sum_i (v^i)^2 \leq \sum_{i,j} g_{ij}^\alpha(z) v^i v^j \leq H_\alpha^2 \sum_i (v^i)^2 \tag{3.7}$$

per ogni $n$-pla $(v^1, ..., v^n) \in \mathbf{R}^n$.

(3.8) **Nota.**

Se $(M, g)$ è una $LIP$ varietà riemanniana con metrica $LIP$ nel senso di [5], in [1] viene studiata nei dettagli l'espressione che compare nella congettura 3, provando che essa è una distanza intrinseca, $\delta(x, y)$, che coincide con quella classica se $(M, g)$ è una varietà riemanniana di classe $C^k$ con $k \geq 1$. Cosí $(M, \delta)$ diviene anche uno spazio metrico, con $\delta$ distanza geodetica.

Rimane ancora aperta la questione di vedere se $(M, g, \delta)$ è uno spazio metrico quasi-riemanniano.

## Bibliografia


[1] **G.De Cecco–G.Palmieri:** *Integral Distance on a Lipschitz Riemannian Manifold,* Dip.di Mat.Univ. di Lecce, Preprint n.36 (1988).

[2] **M.Gromov** (rédigé par **J.Lafontaine et P.Pansu**): *Structures métriques pour les variétés riemanniennes,* Cedic-Nathan, Paris (1981).

[3] **J.Luukkainen–J.Väisälä:** *Elements of Lipschitz Topology,* Ann.Ac.Sc.Fennicae **3** (1977), 85-122.

[4] **W.Rinow:** *Die innere Geometrie der metrischen Räume,* Springer (1961).

[5] **N.Teleman:** *The Index of Signature Operators on Lipschitz Manifolds,* Publ.Math. IHES **58** (1983), 261-290.

## 4. Sui fondamenti della Matematica

### Fondamenti della matematica e "teoria base".

L'esempio della teoria $7 \times 2$

Nello studio dei "fondamenti della matematica" forse può rientrare anche la proposta di ragionevoli "teorie base", ove col termine "teorie base" designerò una selezione di concetti primitivi, definizioni, assiomi, abbastanza semplici per essere compresa anche da ascoltatori non specializzati ed abbastanza ampia perché sia possibile assumerla come base fondamentale su cui edificare le piú complesse teorie matematiche (e forse anche altre teorie scientifiche e filosofiche).

Tra i requisiti desiderabili di una "teoria base", metterei al primo posto la semplicità, l'uso di un linguaggio vicino alle abitudini della maggior parte dei matematici contemporanei, l'eventuale recupero di qualche antica tradizione matematica e filosofica.

Altro requisito essenziale di una buona "teoria base" dovrebbe essere la facilità "d'innestare" in modo naturale, sul tronco della teoria stessa, i diversi rami della matematica. Inoltre la teoria base dovrebbe presentare il piú alto grado di "autoreferenza"; mi è difficile trovare una definizione generale del termine "autoreferenza", ma posso citare l'esempio della teoria $7 \times 2$, in cui le relazioni $Rrelb$, $Rrelt, \ldots, Rrelq$, sono, per cosí dire, le pietre di un arco di cui l'operazione $Seprq$ è la chiave di volta.

Infine accanto a requisiti informali, la "teoria base" dovrebbe avere due requisiti facilmente formalizzabili da parte dei logici matematici: dovrebbe essere facilmente descrivibile nel linguaggio del calcolo dei predicati del primo ordine e dovrebbe possedere molti modelli finiti non banali.

Concluderò osservando che non vi è ragione per pensare che la teoria $7 \times 2$ sia ottimale rispetto a tutti questi requisiti; essa è solo un esempio che, spero, potrà incoraggiare altri matematici alla ricerca di altre "teorie base" o alla individuazione, all'interno di teorie già note, di qualche nucleo fondamentale finito che possa essere ragionevolmente assunto come "teoria base".

Lo spirito conduttore di questa teoria risiede nel rinviare il concetto di "coppia", "terna", ecc., per evitare di èssere immediatamente immessi in una teoria non finita. Pertanto si useranno i concetti di relazioni binarie, ternarie e quaternarie, come verrà specificato, al fine di costruire, finché è possibile, una teoria base *finita* con modelli *finiti.*

Volendo precisare ancora un po' la mia "filosofia dell'innesto" direi che una buona esposizione di una "operazione d'innesto" potrebbe articolarsi in tre parti. Nella prima parte si potrebbero richiamare in modo assai sintetico concetti delle teorie classiche a cui ci si ispira e che alla fine si vorrebbero recuperare. Nella seconda parte l'autore finge per un momento di dimenticare le teorie classiche e di ricordare solo la teoria $7 \times 2$ (o qualche altra teoria base) e qualche nome suggestivo usato nelle teorie classiche che può ispirare molto liberamente i nomi e le sigle con cui designare le nuove costanti che arricchiranno la teoria base. Dopo l'introduzione delle nuove costanti si possono introdurre i nuovi assiomi a cui tali costanti soddisfano e che possono essere "liberamente ispirati" ad assiomi e teoremi delle teorie classiche ma non dedotti da tali teorie. Infine se la seconda parte è ben riuscita i principali oggetti delle teorie classiche potranno essere ragionevolmente identificati nella terza parte con alcuni oggetti della teoria base arricchita nel corso della seconda parte. Si realizza cosí il recupero della teoria classica cercando di ispirarsi ad altri recuperi ormai ben noti, per esempio il recupero degli interi mediante gli ordinali di von Neumann finiti.

Teoria $7 \times 2$

Diamo le seguenti definizioni:

1) $Qqual\, q \quad \Leftrightarrow \quad q$ è una qualità.
Scriveremo $qx$ per denotare che $x$ gode della qualità $q$.

2) $Qrelb\, r \quad \Leftrightarrow \quad r$ è una relazione binaria.

3) $Qrelt\, \rho \quad \Leftrightarrow \quad \rho$ è una relazione ternaria.
Scrivere $\rho xyz$ equivale a dire che "$x$ è nella relazione $\rho$ con $y$ e $z$".

4) $Qrelq\, \tau \quad \Leftrightarrow \quad \tau$ è una relazione quaternaria.
Ovviamente $\tau xyzt$ significa che $x$ è nella relazione $\tau$ con $yzt$.

Definiamo poi le operazioni nel modo seguente:

5) $Qops\, f \quad \Leftrightarrow \quad f$ è una operazione semplice; $fx = y$ indicherà che $y$ è il risultato dell'operazione semplice $f$ eseguita su $x$.

6) $Qopb\, \phi \quad \Leftrightarrow \quad \phi$ è una operazione binaria.
Scriveremo $\phi xy = z$ per indicare che $z$ è il risultato dell'operazione $\phi$ eseguita su $x$ ed $y$.

**Osservazione 1.** Richiamandoci alle notazioni usuali adottate per la somma ed il prodotto, molto spesso useremo la notazione $x + y$ o $x \cdot y$ in luogo di $\phi xy$.

Unitamente alle sei definizioni date si introduce l'operazione

7) $Invrb$, inversione della relazione binaria; posto $Invrb\, r = r^{-1}$, vale la condizione:

$$rxy \quad \Leftrightarrow \quad r^{-1}yx$$

**Osservazione 2.** Una delle possibili varianti di questa teoria è quella di considerare le operazioni semplici come caso particolare delle relazioni binarie e le operazioni binarie come caso particolare delle relazioni ternarie.

Introduciamo ora un secondo gruppo di oggetti fondamentali. Il primo è $Rqual$, caratterizzato dalla condizione:

1) $Rqual\, qx \quad \Leftrightarrow \quad qx$ (relazione binaria che descrive il comportamento della qualità.)

2)*Rrelb* è una relazione ternaria che può essere applicata a relazioni binarie o ad operazioni semplici nel modo seguente:

$$(Relb)rxy \quad \Leftrightarrow \quad rxy$$

$$(Relb)fxy \quad \Leftrightarrow \quad fx = y.$$

Analogamente poniamo:
3)*Rrelt* è una relazione quaternaria tale che:

$$(Rrelt)\rho xyz \quad \Leftrightarrow \quad \rho xyz$$

$$(Rrelt)\phi xyz \quad \Leftrightarrow \quad \phi xy = z.$$

Introduciamo ora l'operazione binaria *Seprq* (separazione di variabili nelle relazioni quaternarie) caratterizzata dalle proprietà seguenti:
4) se $\tau$ è una relazione quaternaria, allora, per ogni oggetto $x$, è definita $Seprq\,\tau x$, che è una relazione ternaria tale che

$$(Seprq\,\tau x)yzt \quad \Leftrightarrow \quad \tau xyzt.$$

Conviene esplicitamente osservare che una relazione quaternaria può essere descritta da una operazione binaria e da una relazione ternaria.

Introduciamo ora le nozioni di dominio, codominio ed ambiente.
5) Sia $Qrelb\,r$ (cioè sia $r$ una relazione binaria); *Rdom* è una relazione binaria tale che

$$Rdom\,xr \quad \Leftrightarrow \quad \text{esiste } y : rxy,$$

e traduce il fatto che "$x$ appartiene al dominio di $r$".
Analogamente se $Qops\,f$ allora :

$$Rdom\,xf \quad \Leftrightarrow \quad \text{esiste } y : fx = y.$$

6) Se $Qrelb\,r$ definiamo:

$$Rcod\,yr \quad \Leftrightarrow \quad \text{esiste } x : rxy.$$

Se $Qops\,f$ allora :

$$Rcod\,yf \quad \Leftrightarrow \quad \text{esiste } x : fx = y$$

L'ambiente di una qualità, relazione, operazione, è l'area in cui vanno presi gli oggetti che hanno quelle qualità o sono comunque coinvolti da quella relazione o operazione.

7) Denoteremo con *Ramb* la relazione binaria cosí definita: a) Se $q$ è una qualità ed $x$ un oggetto

$$Ramb\,xq \quad \Leftrightarrow \quad qx.$$

b) Se $r$ è una relazione ed $x$ un oggetto allora:

$$Ramb\, xr \quad \Leftrightarrow \quad Rdom\, xr \ \text{ Vel } \ Rcod\, xr.$$

c) Se $f$ è un'operazione ed $x$ un oggetto allora

$$Ramb\, xf \quad \Leftrightarrow \quad Rdom\, xf \ \text{ Vel } \ Rcod\, xf.$$

d) Se $\rho$ è una relazione ternaria ed $x$ un oggetto allora

$$Ramb\, x\rho \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, y, z \text{ tali che } \ \rho xyz \text{ Vel } \rho yxz \text{ Vel } \rho yzx.$$

e,f,g) Definizioni anologhe si dànno per le operazioni binarie, le relazioni quaternarie e le operazioni ternarie.

Abbiamo cosí selezionato il "tronco" $7 \times 2$ sul quale possono essere innestati i vari "rami" della matematica.



## Bibliografia

[1] **E.De Giorgi–M.Forti:** *Premessa a nuove teorie assiomatiche dei fondamenti della matematica,* Pisa, Quad. 45(1984), 2–31.

[2] **E.De Giorgi–M.Forti:** *Una teoria-quadro per i fondamenti della matematica,* Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **79** (1985), 55–67.

[3] **E.De Giorgi–M.Forti–V.M.Tortorelli:** *Sul problema dell'autoriferimento,* Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **80** (1986), 363–372.

## Innesto della teoria dei sistemi nella teoria $7 \times 2$

Tra gli "innesti" realizzabili partendo dalla teoria $7 \times 2$ uno dei piú agevoli è l'innesto della nozione di "sistema" già introdotto nella teoria ampia di Clavelli – De Giorgi – Forti – Tortorelli (nel seguito CDGFT, vedi [1]) e comprendente come casi particolari le nozioni di coppia ordinata, terna, quaterna, successioni, ecc. L'innesto è realizzabile per esempio mediante l'introduzione di tre qualità, $Qsist$ (la qualità di essere un sistema), $Qsiun$ (la qualità di essere un sistema univoco), $Qsid$ (la qualità di essere un sistema identico), la relazione ternaria $Rsist$ che caratterizza i sistemi, e tre operazioni binarie $Unb$ (unione di due sistemi), $Compl$ (complemento di un sistema rispetto ad un altro sistema), $Comps$ (composizione di due sistemi).

**Assioma 1.** $Rsist\ Sxy \Rightarrow Qsist\ S$.

**Definizione 1.** Poniamo ${}_yS_x \Leftrightarrow Rsist\ Sxy$ e diciamo che $y$ è un valore corrispondente all'indice $x$ nel sistema $S$.

Diciamo pure che $x$ (risp. $y$) è un indice (risp. valore) del sistema $S$ e scriviamo $S \uparrow x \Leftrightarrow \exists y:\ {}_yS_x$ (risp. $S \downarrow y \Leftrightarrow \exists x:\ {}_yS_x$).

Ammetteremo che valga per i sistemi un assioma di estensionalità.

**Assioma 2.** $(Qsist\ S,\ Qsist\ S',\ \forall x, y\ {}_yS_x \Leftrightarrow\ {}_yS'_x) \Rightarrow S = S'$.

Il terzo assioma riguarda l'esistenza di sistemi singolari.

**Assioma 3.** Dati comunque gli elementi $a, b$ (non necessariamente distinti) esiste un sistema $S$ che gode della proprietà seguente:

$$\forall x\ S \uparrow x \Leftrightarrow x = a \quad \forall y\ S \downarrow y \Leftrightarrow y = b.$$

In altri termini, $S$ è un sistema che ha un unico indice ed un unico valore; sarà indicato con la scrittura $\binom{a}{b}$.

Abbiamo visto che $Qsiun\ S$ vuol dire che $S$ è un sistema univoco. La nozione di univocità è descritta dall'assioma 4.

**Assioma 4.** $Qsiun\ S \Leftrightarrow (Qsist\ S,\ \forall x, y, z\ {}_yS_x,\ {}_zS_x \Rightarrow y = z)$.

Se $S$ è un sistema univoco, invece di scrivere ${}_yS_x$ scriveremo $y = S_x$.

$Qsid$ vuol dire che $S$ è un sistema identico, cioè un sistema univoco in cui ad ogni indice corrisponde l'indice stesso, secondo l'assioma 5.

**Assioma 5.** $Qsid\ S \Leftrightarrow (Qsiun\ S,\ \forall x, y,\ y = S_x \Rightarrow y = x)$.

Vediamo ora le operazioni sui sistemi.

L'unione è un'operazione binaria: invece di scrivere $S'' = Unb\ S, S'$ scriveremo secondo la notazione corrente $S'' = S \cup S'$.

**Assioma 6.** $S'' = S \cup S' \Leftrightarrow ({}_yS''_x \Leftrightarrow {}_yS_x\ vel\ {}_yS'_x)$.

È facile vedere che l'unione gode delle proprietà associativa e commutativa.

Il complemento è un'operazione binaria: invece di scrivere $S'' = Compl\ S, S'$ scriveremo secondo la notazione corrente $S'' = S' \setminus S$.

**Assioma 7.** $S'' = S' \setminus S \Leftrightarrow ({}_yS''_x \Leftrightarrow {}_yS'_x\ e\ non\ {}_yS_x)$.

**Definizione 2.** Poniamo $S \cap S' = S \setminus (S \setminus S')$ e scriviamo $S \subseteq S'$ in luogo di $S' = S \cup S'$.

**Osservazione 1.** Dall'assioma 7 e dall'assioma 3 segue l'esistenza del sistema vuoto, che può essere ottenuto da ogni elemento $a$ mediante $\binom{a}{a} \setminus \binom{a}{a}$. Il sistema vuoto sarà indicato con $\rlap{-}0$.

Dagli assiomi 3,6 sui sistemi singolari e l'unione segue pure l'esistenza dei sistemi

$$\rlap{-}1 = \rlap{-}0 \cup \binom{\rlap{-}0}{\rlap{-}0}, \quad \rlap{-}2 = \rlap{-}1 \cup \binom{\rlap{-}1}{\rlap{-}1}, \quad \rlap{-}3 = \rlap{-}2 \cup \binom{\rlap{-}2}{\rlap{-}2}, \quad \ldots$$

e quindi in sostanza la possibilità di costruire modelli naturali dell'aritmetica all'interno della teoria dei sistemi. Non ci soffermiamo su questa possibilità limitandoci ad osservare che $\rlap{-}0, \rlap{-}1, \rlap{-}2, \rlap{-}3, \ldots$ godono tutti della proprietà $Qsid$ e che per i sistemi identici si può elaborare una teoria del tutto analoga alla teoria degli insiemi.

Diamo infine la nozione di composizione di sistemi caratterizzata dall'assioma 8; adottiamo anche in questo caso la notazione usuale ponendo $S'' = S \circ S' \Leftrightarrow S'' = Comps\ S, S'$.

**Assioma 8.** $S'' = S \circ S' \Leftrightarrow ({}_yS''_x \Leftrightarrow \exists z:\ {}_yS_z,\ {}_zS'_x)$.

Notiamo che nel caso dei sistemi univoci la precedente espressione diventa $S''_x = S_{S'_x}$.

Introduciamo infine le notazioni

$$\binom{a, b}{x, y} = \binom{a}{x} \cup \binom{b}{y},$$

$$\binom{a_1, \ldots, a_n}{x_1, \ldots, x_n} = \binom{a_1}{x_1} \cup \ldots \cup \binom{a_n}{x_n}.$$

**Osservazione 2.** Volendo ritrovare le usuali nozioni di coppia ordinata, terna, quaterna ecc. chi abbia già eseguito l'innesto dell'aritmetica può considerare i sistemi

$$\begin{pmatrix} 1,2 \\ x_1, x_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1, \ldots, n \\ x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix}, ecc.;$$

chi non ha eseguito l'innesto dell'aritmetica può ripiegare sui sistemi

$$\begin{pmatrix} \cancel{1},\cancel{2} \\ x_1, x_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \cancel{1}, \ldots, \cancel{n} \\ x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix}, ecc.;$$

**Osservazione 3.** Confrontando l'innesto ora eseguito con l'introduzione dei sistemi proposta nella teoria ampia CDGFT noteremo che la disponibilità di operazioni binarie e di relazioni ternarie consente la simultanea introduzione di tutti i sistemi senza la necessità di premettere il capitolo sulle coppie al capitolo sui sistemi generici.

## Bibliografia


[1] **M.Clavelli–E.De Giorgi–M.Forti–V.M.Tortorelli:** *A self-reference oriented theory for the Foundations of Mathematics, in* Analyse mathématique et Applications – Contributions en l'honneur de J.L.Lions, Gauthier–Villars, Paris 1988, 67–115.





Centro Grafico Editoriale "Orantes" - Lecce
Luglio 1990