

La Logica Matematica nell'Insegnamento - Alcune riflessioni

Carlo Marchini

1. Introduzione. - Ora che la Logica è entrata nella programmazione scolastica, a partire dalle elementari, nasce il problema di trovare una collocazione degli argomenti innovativi. Le proposte avanzate nella letteratura già disponibile, sono spesso o troppo semplicistiche, o troppo formali. Fa eccezione [Sm], in cui viene offerta un'immagine della Logica assai prossima al gioco. Uno dei problemi è suscitare l'interesse degli alunni; un altro è mostrare come usando la Logica in contesti anche consueti, si porta chiarezza, quindi si tratti di uno strumento "utile". Il campo delle applicazioni della Logica nella didattica è estremamente vasto; qui mi limito a semplici considerazioni, senza la pretesa di completezza, iniziando dalle proposizioni.

Nelle pubblicazioni che divulgano gli aspetti logici, parlare di calcolo delle proposizioni, è quasi equivalente a parlare di tavole di verità. Queste tabelle vengono presentate spesso, senza giustificazione, talvolta anche con errori, divenendo così un argomento propinato senza adeguate chiarificazioni, un tecnicismo da imparare a memoria che non contribuisce alla formazione del pensiero critico. In quanto segue voglio proporre un esempio. Secondo me è questa la strada, suscitare l'interesse, anche con strumenti che spesso sento bollare con tono dispregiativo (chissà poi perché) da Settimana Enigmistica ed attraverso esempi di questo tipo far giungere alle tavole di verità, viste

[†] Indirizzo: Dipartimento di Matematica dell'Università, Via Arnesano, 73100 LECCE. - Intervento al Seminario SSS di Lecce del 1 dicembre 1988.

come una "summa" abbreviata e come utile sostegno per il ragionamento.

1. Un problema. - L'esempio che propongo, per me assai significativo¹ simula, in modo semplificato, il procedere del ricercatore di fronte a fenomeni complessi. Nello studio di un fenomeno avviene di formulare delle ipotesi che devono poi essere controllate nella loro veridicità o meno. Questo tipo di situazione si può presentare anche nella scuola, in modo proficuo.

E1) Si considerino quattro carte tratte da un mazzo di 104 carte, per il gioco della Scala 40:

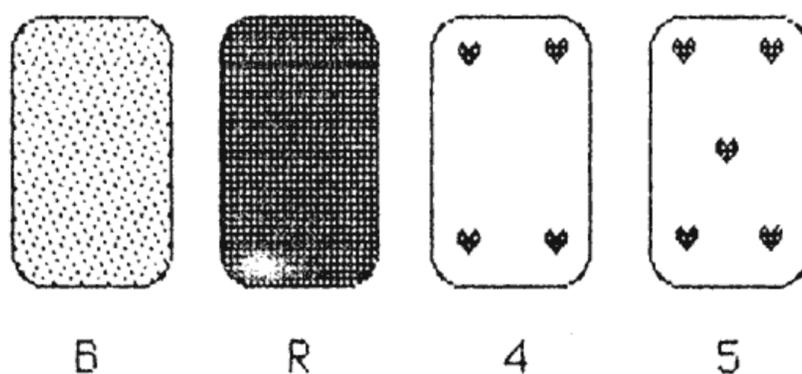


Fig. 1

Nel disegno, con toni diversi di grigio si sono voluti indicare colori del verso distinti, ad esempio blu e rosso. Si può pensare, per rendere la cosa più attinente a situazioni reali, che, invece di carte, ci siano i dati di certe esperienze in condizioni sperimentali diverse. Assumo un'ipotesi (di lavoro): *se la carta ha il verso rosso, allora (la carta) è pari*. Si tratta, ora, di provare o confutare l'ipotesi, mediante un'esperienza di controllo. Il problema è quello di progettare, nel modo più economico possibile, un siffatto esperimento, cioè si deve determinare il minimo numero di carte da voltare, e quali, per ottenere la verifica dell'ipotesi

¹ L'esempio che segue è modificazione di uno presentato da [JW].

detta. In questo compito sono d'aiuto le tavole di verità². Per semplicità scrivo l'ipotesi nella forma $r \Rightarrow p$, dove r sta per "la carta ha il verso rosso", mentre p sta per la proposizione "la carta è pari". Calcolo, in ciascun caso, il valore di verità della proposizione composta $r \Rightarrow p$. Se la carta è blu, caso B, ottengo, dalle tavole di verità, che la proposizione composta è vera, in quanto è falsa la protasi r , dunque non interessa sapere il valore della carta col verso blu. Nel caso della carta col verso rosso, R, l'antecedente è vera, affinché sia vera la proposizione composta $r \Rightarrow p$ è necessario che sia vera anche l'apodosi p . Pertanto bisogna voltare la carta R, per appurare se l'ipotesi è vera. Nel caso della carta 4, la proposizione conseguente p è vera e da ciò è vera pure la proposizione composta $r \Rightarrow p$, anche se la proposizione r fosse falsa. Perciò non serve conoscere il verso della carta 4, al fine di verificare l'ipotesi. Infine con la carta 7 la proposizione conseguente p è falsa. La proposizione composta risulta vera se e solo se la protasi r è falsa. Così per concludere la verifica dell'ipotesi, bisogna voltare anche la carta 7. L'esperimento di controllo consiste nel voltare due carte: R e 7.

È interessante osservare che un rilevamento statistico su questo problema ha ricevuto meno del 10% di risposte esatte. Le strategie (scorrette) più spesso seguite indicano la carta R oppure le carte R e 4 come quelle da voltare per verificare l'ipotesi. L'indagine rivela come

² Per comodità del lettore riporto qui le tavole di verità per i principali connettivi. In essa le lettere p e q stanno ad indicare proposizioni generiche:

p	¬p	p	q	p ∧ q	p ∨ q	p ⇒ q	p ⇔ q
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1	1

I valori di verità si possono trovare denotati in modi diversi: ad esempio v e f , per, rispettivamente, quello che qui si è indicato con 1 e 0. In certi testi, ad esempio in [Me], i valori vengono scambiati.

il caso dell'implicazione sia difficile da comprendere o, se si preferisce, che gli strumenti di logica naturale, mediamente disponibili, sono insufficienti. L'analisi che precede mette altresì in luce la "potenza" e la "facilità" d'uso delle tavole di verità come strumento per la conoscenza, soprattutto se confrontato con le difficoltà degli strumenti razionali cosiddetti naturali³. Per provare l'esistenza di una relazione tra due proposizioni del tipo di quella illustrata sopra, la via seguita dal maggior numero degli intervistati è quella di prendere in considerazione solo i casi in cui entrambe le proposizioni componenti sono vere, cioè come se si trattasse di una congiunzione⁴. In altri casi gli alunni sono portati a confondere l'implicazione presentata nella forma *se ... allora...* con una relazione più affine alla deduzione, espressa da *siccome... allora...* Questo perché lo *status* dell'implicazione è diverso da quello della congiunzione e della disgiunzione. Con i connettivi \wedge e \vee la proposizione risultante tiene conto, in certo senso, delle proposizioni componenti, dato che alla congiunzione è associata l'operazione di minimo nell'insieme numerico $\{0,1\}$, con l'ordine naturale, mentre a \vee è associata l'operazione di massimo. Per di più con-

³ Esempi e problemi sul calcolo proposizionale si possono trovare anche in [V].

⁴ [J] sostiene che spesso nell'affrontare l'analisi di un'implicazione, si preferiscono modelli mentali, piuttosto che regole di inferenza. Cioè alla lettura delle premesse il soggetto si costruisce una rappresentazione specifica in cui è vera la protasi. La costruzione tiene d'occhio solo le richieste delle premesse. Se questo tipo d'analisi fosse portata a termine in modo completo, fornendo cioè diverse situazioni in cui è vero l'antecedente, da questa si potrebbe correttamente concludere se l'implicazione risulta vera oppure no. Ma solitamente il modo di procedere conduce ad errori in quanto vengono prese in considerazione non tutte le situazioni possibili, ma solo quelle che sono costruibili più facilmente.

giunzione e disgiunzione sono "commutative" ed "associative"⁵, e questo, anche se spesso le proprietà considerate non vengono neppure segnalate, fa sì che la congiunzione e la disgiunzione hanno un trattamento "naturale". Invece per l'implicazione non valgono le proprietà "commutativa" ed "associativa" che sussistono per i primi due connettivi. Infine i connettivi \wedge e \vee hanno una stretta corrispondenza con operazioni insiemistiche facilmente visualizzabili, ciò che non avviene per \Rightarrow . Con l'implicazione la domanda è, in modo scorretto, ma spero efficace⁶, se sussista una relazione di causalità tra l'antecedente ed il conseguente, non già se siano vere la protasi e/o l'apodosi. Un altro tipo di difficoltà insito nell'implicazione è che la tavola di verità è "poco" naturale, come si già avuto modo di osservare. Tuttavia, anche se a scapito dell'implicazione c'è una minor naturalezza ed intuitività, l'uso corretto del simbolo \Rightarrow evita le confusioni tra le *condizioni necessarie* e le *condizioni sufficienti* che abbondano sui libri di testo.

Maggior chiarezza si ottiene leggendo la tavola al negativo: ammesso che la verità dell'implicazione traduca il fatto che tra la protasi e l'apodosi è instaurata una relazione di causalità, essa sarà vera se la sua negazione è falsa; falsa se la negazione sarà vera. Dunque il problema è riconducibile alla negazione dell'implicazione. E quest'ultima come si esprime? Cosa significa negare in modo fattuale che esista una relazione di causalità tra due fenomeni? Mi sembra chiaro: si

⁵ A ben guardare tali proprietà non valgono neppure per la congiunzione, nel senso che le proposizioni $p \wedge q$ e $q \wedge p$ sono distinte, ma sono equivalenti in quanto hanno gli stessi valori di verità. Ciò non avviene per l'implicazione. Anzi uno degli errori che capita di rilevare più frequentemente, è l'utilizzazione dell'inesistente proprietà commutativa dell'implicazione, cioè le proposizioni $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$, vengono ritenute equivalenti mentre sono tra loro equivalenti $p \Rightarrow q$ e $\neg q \Rightarrow \neg p$.

⁶ ma reminiscente di Crisippo. Si veda al successivo §3.

manifesta la presunta causa e non il presunto effetto. Ad esempio negare "se si inaugura la Fiera di Milano, allora lo stesso giorno piove a Milano" (frase che i milanesi assicurano vera!), significa che c'è stato (almeno) un giorno in cui è avvenuta l'inaugurazione della Fiera e a Milano non è piovuto.

Dunque per concludere che è vera $r \Rightarrow p$, basta provare che è falsa $r \wedge \neg p$ e per provare che è falsa $r \Rightarrow p$, basta provare che è vera $r \wedge \neg p$ ⁷. Costruendo la tavola di $r \wedge \neg p$, si trova esattamente la tavola "contraria", meglio *duale*, di $r \Rightarrow p$, cioè quella in cui i valori 0 e 1 si presentano scambiati, rispetto alla tavola di $r \Rightarrow p$. Ma la tavola di $r \wedge \neg p$ è molto più accettabile, intuitivamente, per questo la consiglio in via preliminare, al momento di introdurre l'implicazione. C'è tuttavia un delicato problema di natura didattica: una relazione tra i dati dell'esperienza può essere scoperta in due modi: per via *positiva*, verificando che nei casi in cui si attende valga la relazione, essa sussiste, oppure per via *negativa*, verificando che nei casi in cui non ci si aspetta valga la relazione, essa non sussiste. Ebbene [R] mostra che le due strategie hanno livelli di accettazione ben diversi, secondo dell'età, comunque il metodo che dà migliori risultati didattici è quello positivo.

Credo queste le difficoltà maggiori che si incontrano nella presentazione delle tavole di verità⁸. Da parte degli alunni, una volta accettate, non dovrebbero sorgere problemi nel valutare i valori di verità di una proposizione composta, in quanto si tratta di un procedimento puramente meccanico (e che volendo si può far eseguire completa-

⁷ Si intende meglio che la negazione dell'implicazione $r \Rightarrow p$ è equivalente a $r \wedge \neg p$, se si pensa che l'implicazione $r \Rightarrow p$ è equivalente a $\neg r \vee p$, come mostrano esempi quali "se bevi il vino ti ubriachi": "non bere il vino, o ti ubriachi". Di qui con le leggi di De Morgan si ottiene quanto detto sopra.

⁸ Ma è importante che le tavole di verità siano il risultato di un lungo percorso didattico che ne faccia capire l'importanza e la "comodità", come una prima schematizzazione del discorso.

mente ad un elaboratore elettronico). Si tenga presente però che nel caso si debba analizzare una proposizione composta mediante i connettivi proposizionali, a partire da n proposizioni semplici e non ulteriormente scomponibili (le cosiddette proposizioni atomiche di cui sono esempi " *Paolo canta*", " *l'oggetto è rosso*", " *Carlo Bonaparte è padre di Napoleone I*" , ecc.), il numero dei casi da considerare è 2^n . Anche questo risultato è assai interessante e andrebbe fatto scoprire dagli alunni, per andare incontro alla richiesta di illustrare «le più elementari questioni di tipo combinatorio», come previsto dai programmi delle scuole primarie.

2. Linguaggio e Logica. - I risultati sorprendenti di **E1)**, potrebbero essere giustificati ritenendo infelice la presentazione del quesito. Infatti nelle prove da me compiute con amici e conoscenti, anche ricercatori universitari, che hanno confermato i risultati dell'indagine statistica, dopo una prima fase di tentativi, portati avanti in modo insicuro, si è passato alla richiesta di riproporre il problema con eventuali spiegazioni. Molto spesso, in questa seconda fase, il tentativo del solutore riproponeva l'ipotesi di lavoro nella forma: *se è pari, allora è rossa*, oppure *se è blu, allora è dispari*. Forse il quesito è mal formulato, ma mi pare che la situazione sia diversa. Nel linguaggio di uso quotidiano, e che ha in sé una struttura logica sufficiente per le esigenze della vita pratica, non riscontriamo quella precisione e chiarezza, che sono invece meriti del linguaggio scientifico. Questi limiti, che possono essere pregi da un punto di vista estetico, ci impastoiano al momento di utilizzare il linguaggio come uno strumento razionale preciso, atto alla comunicazione con se stessi e con gli altri. Ne sono una conseguenza le ambiguità della legge italiana.

La Logica si colloca allora, più propriamente, in quella parte di linguaggio che si occupa di Scienza, dando a questa parola un'accezione assai ampia. I rapporti tra linguaggio e Logica sono assai simili a

quelli intercorrenti tra spazio fisico e Geometria. Su questa analogia mi voglio soffermare per mostrare come e perché di Logica ci si occupi in Matematica, anzi che in Linguistica. Nello spazio fisico vi sono oggetti, linee, superfici, che **non** sono punti, rette e piani, in quanto si tratta di oggetti limitati e con un loro ben preciso volume. Così un granello di sabbia può aver dato origine al concetto di punto, però che non sia un punto geometrico lo provano le spiagge. Un bastoncino o un filo d'erba, pur essendo limitati (ma Euclide parla di rette che si prolungano nei due sensi) non sono rette o segmenti geometrici, dato che ammucchiandoli con altri dello stesso tipo si possono formare fascine o covoni. Così un foglio di carta suggerisce l'idea di piano, tuttavia con fogli si costruiscono libri e quaderni, che hanno un volume. Tutto ciò non avviene in quella teoria che chiamiamo Geometria, ma sarebbe più corretto indicare con l'appellativo di euclidea, dato che da più di duemila anni nelle scuole viene insegnata prendendo spunto dal testo di Euclide. Ebbene la Geometria (euclidea) non è il vero studio dello spazio fisico, ma solo di certi aspetti della realtà, il compito di spiegare i fenomeni "reali" è lasciato appunto alla Fisica⁹.

Così è pure per la Logica. Nel linguaggio, oggetto di studio della Linguistica, vi sono strutture assai complesse, frutto di stratificazioni storiche. Lo scrittore J.L. Borges definisce il linguaggio come una serie di metafore congelate. Lo studio di questa realtà, costruita dall'uomo in vari secoli, è più complesso che lo studio della Natura, con le sue leggi costanti: *Natura non facit saltus*, ma la lingua sì, essendo in

⁹ Non voglio addentrarmi nella polemica, di interesse più filosofico che matematico, se la Geometria sia lo studio del mondo delle Idee (Platone), o una schematizzazione della esperienza (empirismo), o ancora un dato a priori (Kant). Anche la Fisica non è in grado di studiare a fondo la realtà, ma si serve di comode approssimazioni: basti pensare agli studi di Galileo sulla caduta dei gravi, in cui si prescindeva dall'attrito, dalla presenza dell'aria e, in generale, da fenomeni perturbativi.

continuo mutamento. Ma, come la Fisica e la Geometria studiano opportune semplificazioni di certe classi di fenomeni naturali, così la Logica tratta solo di una esigua parte del linguaggio e lo fa con strumenti matematici

Viene allora il sospetto che data la ristrettezza del campo di applicazione, la Logica sia uno strumento di scarsa utilità. Tale pregiudizio, abbinato a quello che la nostra materia si occupi di cose ovvie, è stato causa del disinteresse finora mostrato dalla scuola pre-universitaria. L'opera dei grandi logici del secolo scorso, quali Frege, Cantor, Bolzano, e di questo secolo, Russell, Godel, Tarski, Turing, Church, Robinson, ecc. prima, e l'Informatica poi, hanno provveduto, in maniera clamorosa, a modificare questo modo di pensare. Gli studi teorici di Logica hanno contribuito a darci una idea più chiara delle possibilità e capacità umane, provando per mezzo di rigorose dimostrazioni le sostanziali limitazioni concettuali intrinseche al pensiero. L'idea della conoscenza, intesa non solo in modo sperimentale, è passata così dall'immagine di una sfera sempre dilatantesi (di sapore positivista), proposta da J.L. Borges, a quella di F. Ponge di una perla molle, anzi forse più correttamente di un'ameba che ha incontrato, in certe direzioni, ostacoli (cioè teoremi limitativi) che riconosce insormontabili

I successi delle applicazioni pratiche con l'uso dell'elaboratore sono sotto gli occhi di tutti: dall'archivio dei beni culturali, allo spoglio sistematico di testi letterari, alla diagnostica medica con strumenti quali la tomografia assiale computerizzata (TAC). L'elaboratore si avvale di strumenti matematici e logici che traggono la loro origine dall'opera di G. Boole, il quale scrisse nella seconda metà del secolo scorso un trattato sulle leggi del pensiero, [B]¹⁰, da cui poi sono nate le strutture matematiche note col nome di algebre di Boole.

In base a tutto ciò, oggi non è più possibile, a scuola, passare sotto silenzio la Logica e l'Informatica. Tuttavia bisogna non lasciarsi

¹⁰ Per approfondire l'argomento si consiglia [H].

prendere da entusiasmi esagerati: è necessaria un'attenta riflessione sui compiti della scuola dell'obbligo, tra i quali è quello di fornire conoscenza e formazione, non capacità tecniche specifiche. Lo studio dell'Informatica dovrebbe iniziare da quella fase cosiddetta povera, quella della carta e matita, solo in seguito arricchita dall'uso di strumenti di calcolo più raffinati. D'altra parte la Logica, per sua natura, affina il pensiero critico e serve a prendere le distanze da quelle che sono le mode del momento, ricche, se si vuole, di elementi di richiamo, contribuendo egregiamente ad una salda cultura di base.

Uno degli ostacoli maggiori alla diffusione della nostra materia nell'insegnamento è costituita proprio dal rapporto difficile e complesso che sussiste col linguaggio. Accostandosi per la prima volta a considerazioni logiche si prova un certo smarrimento: pare di entrare in un mondo di frasi prive di senso: quali, ad esempio *Luigi va a pesca e lunedì splende il sole*; *Luigi è un non bambina*; *se $0 = 1$, Giancarlo Pajetta è il Papa*; *se c'è il sole esce il coniglio con le macchie nere*¹¹. Ci si accorge, poi, di quanto diverso sia il significato dei simboli logici, da quelli linguistici, anche omonimi (si veda ad esempio il ruolo diverso della congiunzione logica \wedge e dello stesso connettivo usato in lingua in modi diversi: come conseguenza, come disgiunzione, con aspetti intensionali, ecc.). Ma la cosa non deve stupire la perdita in espressività a favore di un aumento di chiarezza, e un effetto del procedimento di schematizzazione, di cui si diceva prima, risultato di una matematizzazione. Il linguaggio di cui si occupa la Logica, almeno negli aspetti più semplici, è un frammento ridotto e deformato della lingua usata in Matematica.

Lo studio della Logica ha poi un'importante conseguenza sull'apprendimento della Matematica, oltre che per motivi di carattere

¹¹ Sarebbe senza dubbio più interessante, per gli studenti, cercare di capire la differenza tra frasi quali: *se studi sarai promosso*; *se non studi non sarai promosso*.

generale, perché, come dice [BC], «è una novità da non sottovalutare il fatto che, invece di dare definizioni e fare dimostrazioni, esse diventino, in quanto tali, oggetto di riflessione». E' dunque in gioco un nuovo modo di intendere la Matematica che, da Scienza delle quantità, è divenuta oggi anche la Scienza degli aspetti qualitativi.

3. Logica naturale e Logica formale. - Mi sono sempre posto il problema di saper discernere procedimenti razionali validi per la Logica naturale e non applicabili a quella formale. Finora però mi sono sempre convinto che tale distinzione poteva trarre in inganno. Ciò che non sembra rientrare nell'ambito di un certo tipo di Logica formale, lo si può facilmente ritrovare in altri ambiti. Questo perché gli studi formali hanno il pregio di delimitare chiaramente il loro campo di applicabilità. Così ci si può rendere conto che certe carenze espressive e deduttive del calcolo proposizionale vengono superate dal calcolo dei predicati del primo ordine, da calcoli di ordine superiore, ecc. Altri tipi di limitazioni vengono analizzati in calcoli modali e/o non classici, a più valori di verità, devianti, non monotoni, ecc. Evidentemente tutti questi studi traggono spunto da situazioni riscontrabili nel linguaggio, e forse allora con Logica naturale si intende proprio l'unione di tutti questi modi di sviluppare un pensiero razionale. Questa visione globalizzante può essere inadatta come oggetto di insegnamento ed offrire difficoltà all'apprendimento: cercare di tornare ad una situazione globale di questo tipo, è un modo di procedere contrario al progresso scientifico. Servendomi di un'analogia, sarebbe come mescolare in un unico pentolone tutte le più avanzate specializzazioni mediche, farmacologiche, assieme alle conoscenze mediche antiche, alle pratiche magiche, ecc. e poi pretendere di somministrare agli allievi questa "macedonia" a piccole dosi, presumendo così di dare un contributo alla cultura medica di base. Non si può richiedere all'in-

segnamento della Logica di contrapporsi in modo così palese alla sua natura ed ai suoi scopi.

Per questo ed altri motivi¹² incentrare troppo l'attenzione sulla pretesa differenza tra aspetti naturali e formali, anche se può essere interessante, rischia di non contribuire alle finalità didattiche che qui interessano. Ci deve essere tuttavia nel docente la consapevolezza che solo tralasciando la globalità, si può guadagnare in chiarezza, e di qui trarre ispirazione per un'azione culturale mirata. E forse qualche accenno storico può aiutare in questa opera di convincimento.

La Logica, così come appare oggi, ha avuto un lungo cammino soprattutto nella Matematica. Si trattava di dare una veste rigorosa alle argomentazioni ed alle dimostrazioni. Così in questo campo della conoscenza si è accolta una procedura grammaticale e sintattica che ha acquistato, col tempo, generalità e proprio questa generalità ne ha garantito la diffusione, la "bontà" ed il "successo". Ma i primi passi sono stati mossi all'interno della lingua naturale, che poco a poco è stata lasciata da parte, nel senso che il frammento che interessa le deduzioni, pur essendo formato da parole, per lo più, della lingua naturale, è assai ridotto rispetto al linguaggio nella sua interezza. Grazie a questa elaborazione si è giunti ad una sintassi "speciale" che è garanzia essa stessa della correttezza della prova. Questa sintassi ha in sé regole di generazione, ha finalità proprie ed il potere di inferenza e di decisione che ha acquistato in questo modo viene trasformato in proprietà del senso comune. Semplici risultati matematici sono entrati nella vita di tutti i giorni: $2 + 2 = 4$, il quadrato costruito sull'ipotenusa

¹² C'è ad esempio chi, come [1], sostiene che la Logica naturale non ha alcuna esistenza empirica immediata, non essendovi protocolli d'osservazione in grado di rilevarla. E' questa anche la posizione di Kant. Per costoro, seppure con sfumature diverse, la Logica naturale è argomento di ricerche antropologiche, non matematiche.

di un triangolo rettangolo è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti, anche per i "profani" ed anche senza dimostrazione, assumendo un' "evidenza" che è frutto di cultura acquisita.

Quando alla fine del secolo scorso, la ristrutturazione della Matematica ha rigettato l'infinito e l'infinitesimo in atto ed imposto l'induzione come prova fondamentale, le espressioni analitiche della ricorsione hanno richiesto l'estensionalità, è stato quindi necessario un simbolismo speciale che superasse le limitazioni della sillogistica. È nata così la scrittura con i quantificatori, mediante la quale i procedimenti dimostrativi hanno trovato una espressione adeguata sia per la loro formazione, che per la loro giustificazione. Questi modi si sono però dimostrati di scarsa compatibilità con i vincoli grammaticali di una lingua naturale e questo spiega lo sconcerto provato di fronte a dimostrazioni per assurdo, in cui si assume come dato proprio ciò che si intende negare. Allo stesso tempo apparve, ancora prima che se ne potessero cogliere i motivi, quanto gli aspetti estensionali ripugnassero ad una lingua naturale, come dimostrano frasi senza senso, corrette dal punto di vista logico. Di fronte a queste difficoltà poteva venire spontaneo rifiutare le particolarità linguistiche del linguaggio formale, ma questo rifiuto non poteva essere fatto proprio a cuor leggero, dato che le inferenze realizzate con questi nuovi linguaggi opponevano la loro singolarità tecnica, fonte di chiarezza, ai penosi ed oscuri giri di frase del linguaggio in uso¹³. D'altro canto ci si è trovati nella

¹³ Per offrirci un esempio, si consideri il seguente brano tratto da un documento di larga diffusione in Italia, "Istruzioni per la compilazione del Mod. 740-S (1988)": «Se l'imposta corrispondente al reddito di lavoro dipendente è invece inferiore all'importo delle predette detrazioni d'imposta, queste competono limitatamente all'importo dell'imposta corrispondente al reddito di lavoro dipendente. Esempio le due spettanti detrazioni di imposta trovano capienza nella loro misura intera di L. 648mila solo se il reddito, per l'intero anno, è stato per lo meno pari a L. 5.396.000 cui corrisponde un'imposta (arrotondata) di L. 648mila.»

condizione di ammettere che gli assiomi ora proposti, come principi primi della Logica, hanno perduto in evidenza (carattere sostanziale nella presentazione aristotelico-euclidea). E l'evidenza, allontanandosi dagli aspetti formali, ha portato via con sé quelle certezze imprecise che costituiscono il senso comune.

Cerco di affrontare il problema dal punto di vista del linguaggio comune. Si può ritenere che una "scienza" iniziasse già dai tempi preistorici. Quando comparve la scrittura, il fatto che lo stesso alfabeto sia costruito con un numero ridotto di segni, sta a testimoniare che la coscienza grammaticale era già sufficientemente evoluta tanto da padroneggiare lo svolgersi del discorso. Era questo un atteggiamento "naturale", oppure già "culturale"? Io propendo per la seconda ipotesi.

Di grande importanza fu poi l'opera dei filosofi greci. Per capirne la portata basta ricordare con L. Wittgenstein che «i problemi filosofici che interessavano già i Greci, ci interessano ancora. La nostra lingua è restata identica a se stessa e ci indirizza sempre verso le stesse questioni». Forse il più grande merito di quegli studiosi è stato quello di offrire, con un procedimento di categorizzazione sistematica e finita, la possibilità di associare i dati sensibili all'elaborazione, attraverso il discorso, di una situazione. Così grazie a loro abbiamo un ambito e, contemporaneamente, uno strumento pronto ad essere oggetto di decisione e di inferenza. In questo senso si può vedere una Logica naturale, che naturale poi non è, come il modello offerto, sostanzialmente dagli stoici, per l'appropriazione delle articolazioni sintattiche fissate nella lingua naturale, in grado di esprimere i criteri di inferenza di cui si avvale la Scienza ed aderente ai paradigmi di essa. A questo modello si riferiva tempi addietro la didattica quando stabiliva che strumenti per il suo apprendimento erano le discipline più svariate.

Il procedimento di categorizzazione si deve tuttora tenere in grande considerazione: il suo successo è stato determinato dall'aver saputo grammaticalizzare l'esperienza, cioè affidare ad una sintassi della

lingua naturale la gestione delle dimostrazioni ritenute determinanti e capaci di tradurre l'economia del corso fisico degli avvenimenti, a beneficio delle decisioni umane, sia che si tratti di rappresentazioni della Natura, quanto che sia in gioco l'adattamento alla Natura stessa. Questo è principalmente merito del filosofo Crisippo, contemporaneo di Euclide che fu in grado di risolvere un problema posto da Platone ed affrontato parzialmente da Aristotele: fissare in modo discorsivo l'idea fisica della causalità¹⁴ e, simultaneamente, regolare le concatenazioni discorsive sulla base del paradigma causale. La schematizzazione crisippiana è, ancora oggi, la base di un qualunque discorso scientifico, anche se fisici come Mach si sono opposti all'assunzione della causalità come criterio fondamentale di studio della Natura.

Le considerazioni precedenti, forse un poco complesse, le ho portate per giustificare una mia presa di posizione, avvalorata dai successi ottenuti dalla Logica, di carattere pratico e culturale. Mi sembra chiaro che non si possa conferire un valore veramente primordiale alla cosiddetta Logica naturale, ammesso che esista, ma che si tratti di un *habitus* culturale da apprendere al pari di altri. D'altro canto, si può presentare la Logica formale come una teoria che ha aspetti di semplicità e di applicabilità. Per questo ritengo varrebbe la pena di iniziare da quest'ultima, senza attendere la presentazione di discipline complesse quali l'Aritmetica razionale o la Geometria euclidea. Si può giungere, una volta costruite le capacità metodologiche e critiche, ad un'analisi della complessità congenita della Logica naturale.

¹⁴ La causalità ha ricevuto sempre grande attenzione; la formulazione più semplice è appunto quella che usa il connettivo \Rightarrow . Per cercare di approfondire meglio il problema, sono nati vari tipi di Logica, e per chi interessato consiglio la lettura del II cap. di [Ma] e [Sp]. Oggi è riservata grande attenzione al problema per le sue rilevanti applicazioni in campo economico.

4. Semantica. - Nei due paragrafi precedenti ho analizzato l'esempio del §1 da un punto di vista generale, sia linguistico che filosofico. Ma veniamo a connotazioni più matematiche. Il progetto dell'esperimento di controllo è stato reso possibile grazie alla ripresentazione del quesito in termini più astratti mediante la formula $r \Rightarrow p$. In questo modo, il problema è stato "tradotto" nella ricerca dei casi in cui $r \Rightarrow p$ è vera. Ho così incontrato una situazione che merita attenzione: come analizzare, sia pure in contesto matematico, il concetto di verità.

Per parlare di verità o falsità di una formula, si devono assegnare significati alle scritture simboliche. Dunque i simboli devono rimandare ad altro; pertanto bisogna dare una specie di dizionario che spieghi il significato dei termini utilizzati (semantica). La semantica del calcolo delle proposizioni studia (solo) la verità o la falsità delle affermazioni. Per tale motivo, in questa parte della Logica, si prendono in considerazione solo proposizioni suscettibili di assumere valori di verità. Non si considerano imperativi, frasi esclamative o interrogative, frasi aperte del tipo " $x > 2$ ". Si tratta però di chiarire che il problema principale non è quello di assegnare valori di verità alle proposizioni cosiddette atomiche, perché questo può essere argomento di altri studi, matematici o no¹⁵, ma quello di conoscere come valutare la verità di un'affermazione composta, una volta noti i valori di verità (cioè se vere o false) delle affermazioni componenti. Il paragone con una lingua straniera è assai illuminante, in quanto permette di intendere con semplicità la distinzione tra *linguaggio* e *metalinguaggio*. Si pensi alla grammatica della lingua inglese illustrata usando la

¹⁵ L'interesse matematico della frase "*Luigi è andato a Parigi*" è nullo, così anche per la frase "*Carlo dorme supino*", e la loro verità o falsità dipende da un contesto in cui queste frasi vengono considerate. Una frase che può essere costruita con questi "mattoni" è "*Carlo dorme supino, oppure Luigi è andato a Parigi*", probabilmente di nessun interesse pratico, ammette un trattamento matematico relativo allo studio della disgiunzione.

lingua italiana. In questo esempio l'Inglese è un linguaggio per spiegare il quale si usa un linguaggio diverso. In termini logici l'Inglese è il *linguaggio oggetto* e l'Italiano è il *metalinguaggio*. La distinzione tra i livelli linguistici è, come si vede, assai semplice, ma molto importante. Si pensi che sfruttando questa distinzione il matematico A. Tarski¹⁶ è riuscito a risolvere un paradosso famoso fin dall'antichità ed a fornire una definizione matematica del concetto di verità. L'antinomia di cui si parla è nota col nome di "paradosso del mentitore"¹⁷ e si può schematizzare (con una certa approssimazione) con la frase

"io dico il falso .

Chi pronuncia questa frase fa un'affermazione vera e falsa allo stesso tempo, indipendentemente dal fatto che intenda proferire il vero o il falso. La ragione del paradosso consiste nel fatto che la frase confonde il linguaggio ed il metalinguaggio. Secondo Tarski, solo nel metalinguaggio è possibile stabilire se una affermazione del linguaggio è vera o falsa. Così per parlare del significato delle affermazioni e dei simboli del linguaggio formalizzato, bisogna disporre di un altro linguaggio, esterno al primo e più potente di esso.

Il metalinguaggio può essere poi, a sua volta, linguaggio oggetto per un altro metalinguaggio. Per spiegarmi con un esempio, si consideri uno studioso francese di didattica che scriva sulle difficoltà fo-

¹⁶ Fondamentale a questo proposito [T1]. Un articolo divulgativo delle idee di Tarski è pubblicato col titolo *Verità e Dimostrazione*, ripubblicato nel 1978, senza varianti, su di un quaderno de Le Scienze, con lo stesso titolo dell'articolo (cfr. [T2]).

¹⁷ Diogene Laerzio riferisce che questa argomentazione è dovuta ad Ebulide di Mileto (attivo attorno alla metà del IV sec. a.C.), esponente di spicco della Scuola di Megara. Nell'Epistola a Tito di S. Paolo si incontra una formulazione analoga del paradosso. Dai riferimenti che S. Paolo permette, si è risaliti all'autore di questa seconda versione: Epimenide di Creta. Per questo in certi testi si parla del paradosso di Epimenide.

netiche incontrate da un insegnante italiano quando usa la lingua italiana per spiegare l'Inglese, ad esempio con la frase (discutibile) "dans la langue italienne il n'y a pas des sons semblables à l'Anglais *ʔ*. La meilleure approximation pour l'enseignant italien est le son *o'*, comme dans le mot *o'o'o*". In questo esempio il Francese è metalinguaggio per l'Italiano che a sua volta è metalinguaggio per l'Inglese.

E2) Apparentemente queste considerazioni sembrano lontane dalla pratica didattica, invece problemi analoghi si incontrano molto presto, fin dai primi anni delle elementari. Un esempio farà meglio comprendere a cosa intendo riferirmi. Molto spesso si introduce l'operazione di moltiplicazione tra numeri naturali dicendo che 3×4 ha per risultato la somma di 4 fattori eguali a 3 o, in altro modo, che $3 \times 4 = 3+3+3+3$, o ancora, $3 \times 4 = 3+\dots+3$ (*quattro volte*)¹⁸. L'insegnante però può (o meglio, dovrebbe) aver incontrato nei suoi studi formativi che la moltiplicazione tra interi è definita per *ricursione* da:

$$\begin{cases} a \times 0 = 0 \\ a \times (b + 1) = a \times b + a. \end{cases}$$

Sembra che vi siano due diverse definizioni della moltiplicazione¹⁹. Si può estendere quanto qui detto, in modo semplice, all'elevamento a potenza. Per inciso faccio notare che il secondo modo di procedere può essere utilizzato immediatamente qualora si voglia costruire un programma per realizzare tali operazioni con linguaggi di programmazione che consentano la ricorsività, quali il Logo o il Pascal.

Nasce il problema di vedere se le due moltiplicazioni coincidono ed eventualmente di stabilire quale sia più conveniente

¹⁸ Tralascio il fatto, che talora è oggetto di discussione, se $3 \times 4 = 3+3+3+3$, oppure $3 \times 4 = 4+4+4$, in quanto, per quel che segue, la cosa non ha importanza.

¹⁹ Vi è un altro e diverso modo di introdurre la moltiplicazione, come cardinalità di un prodotto cartesiano. Non la tratto perché non è mia intenzione qui un esame esaustivo e comparato delle varie possibilità di introduzione delle operazioni aritmetiche.

adottare. Il fatto che può stupire è che non si tratta di definizioni equivalenti²⁰, anche se sui numeri naturali coincidono. Da questa coincidenza, e vista l'immediatezza didattica del primo metodo, esso sembrerebbe da preferire. Certamente ciò può essere fatto, ma il docente si deve rendere conto che la prima definizione fa intervenire due tipi diversi di numeri naturali: quelli del linguaggio, identificati dai segni usati per denotarli, e quelli del metalinguaggio, facilmente riconoscibili in quanto usati come aggettivi qualificativi numerali della parola *volte*. Cioè nella frase "quattro volte" il numerale è relativo al metalinguaggio.

L'uso di due livelli linguistici è causa di alcuni abusi, anche di una certa gravità. Se si adotta la convenzione che 3×4 stia ad indicare $3 + \dots + 3$ (*quattro volte*), non si è in grado di dare valore alle moltiplicazioni 3×1 e 3×0 , se non con definizioni esplicite²¹ a riguardo. Solitamente queste precisazioni non vengono fatte, né, tanto meno, viene chiarita la necessità di tali definizioni aggiuntive, anzi in certi casi, come per l'elevamento a potenza, definizioni analoghe vengono "dimostrate", confondendo considerazioni che servono a giustificare la scelta un certo tipo di definizione, con una esigenza deduttiva. Tornando alla moltiplicazione, con la prima definizione si sfrutta la proprietà associativa dell'addizione, ma da un punto di vista teorico, la moltiplicazione è indipendente da tale proprietà²². Con la seconda definizione di moltiplicazione, non si incorre in simili problemi. Resta però una questione di più sottile importanza psicologica. La moltiplicazione, così come viene definita usualmente, serve anche a confer-

²⁰ La non equivalenza delle due moltiplicazioni la si può vedere come conseguenza di importanti risultati logici: i teoremi di incompletezza Gödel e l'aritmetica di Pressburger. Per l'illustrazione e dimostrazione di questa situazione si rimanda ai testi [Me] e [Ha].

²¹ Se si adotta l'altra convenzione, i problemi si presentano per 1×3 e 0×3 .

²² Si vedano però le considerazioni sulle tavole pitagoriche presentate in [M1].

mare che il concetto di numerosità si modella nel numero naturale. Questo può essere ostacolo alla comprensione dei diversi sistemi numerici come osserva [Fi], in quanto non si ritrova poi alcun significato intuitivo in moltiplicazioni del tipo $\frac{3}{5} \times \sqrt{7}$.

5. Calcolo dei predicati. - Per mancanza di tempo mi soffermo assai brevemente su alcuni aspetti riguardanti la simbolizzazione nel calcolo dei predicati. L'argomento, più complesso del calcolo delle proposizioni, merita maggior attenzione. L'esigenza di introdurre questa nuova schematizzazione del linguaggio può essere giustificata dall'esempio di un famoso sillogismo (in *Barbara*):

"Tutti i greci sono uomini";
"Tutti gli uomini sono mortali";
"Tutti i greci sono mortali".

L'analisi attraverso il linguaggio proposizionale non dà ragione della correttezza del ragionamento sopra esposto: infatti dovrei schematizzare le tre frasi con tre proposizioni diverse, **p**, **q** e **r**, senza assolutamente trovare ragioni formali per cui da **p** e **q**, si deduce **r**. Ho bisogno allora di uno strumento più duttile, di un bisturi che affondi maggiormente nel tessuto linguistico per metterne in evidenza le articolazioni più complesse.

Nella lingua corrente si incontrano predicati che esprimono la caratteristica di un soggetto e predicati che mettono in relazione il soggetto con un altro elemento. Dal punto di vista linguistico, il primo caso si attua con i verbi intransitivi coniugati nelle persone singolari, oppure con i predicati nominali. Ne sono esempi le frasi "*Carlo corre*", "*la mela è rossa*", "*il bicchiere è di vetro*". Le frasi "*S. Quasimodo tradusse l'Odissea*", "*Piero mangia la mela*" fanno intervenire verbi transitivi, che esprimono l'azione di un soggetto su di un oggetto. Nella Lingua italiana è possibile invertire i ruoli tra soggetto ed oggetto

di un'azione, usando la forma passiva: " *L'Odissea fu tradotta da S. Quasimodo*", " *La mela è mangiata da Piero*". In queste frasi, che sono modi diversi per esprimere lo stesso fatto, il ruolo di soggetto viene assunto sia dal soggetto dell'azione, sia dall'oggetto. Questo giustifica l'attitudine matematica a confondere il ruolo del soggetto e del complemento, parlando di predicati con più soggetti. Se così schematizzando con un'abbreviazione le frasi indicate sopra, si potrebbe scrivere T(Quasimodo,Odissea), M(Piero,mela). Il passaggio dalla considerazione non esclusiva di predicati che esprimono caratteristiche di un solo soggetto, a quello di predicati che esprimono caratteristiche di più soggetti è ritenuto da molti il momento di distacco della Logica moderna dalla Logica classica e si può datare dal 1879, anno di pubblicazione di [F].

Vi sono anche altri modi nella Lingua italiana per introdurre predicati con più soggetti, ad esempio con predicati nominali seguiti da complementi di varia natura: " *Piero è amico di Carlo*", " *Andrea è figlio di Luca e Clara*"

E3) Da quest'ultimo esempio traggo lo spunto per introdurre un'altra struttura fondamentale del linguaggio formale: i quantificatori

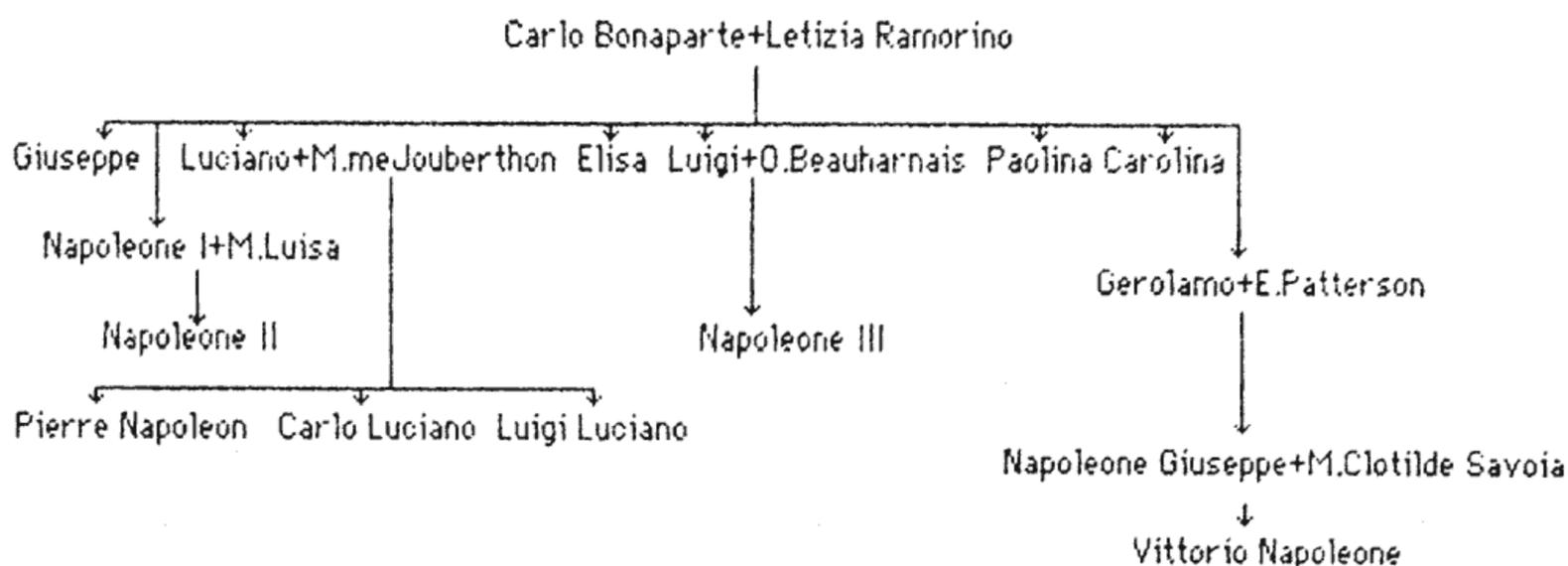


Fig. 2

Nella Fig. 2 è rappresentato l'albero genealogico della famiglia Bonaparte. In esso il rapporto matrimoniale è indicato con un segno matematico +, il rapporto genitori - figli è indicato con una freccia. Se consideriamo l'insieme $B = \{\text{Carlo, Giuseppe, Napoleone I, Luciano, Elisa, Luigi, Paolina, Carolina, Gerolamo, Napoleone II, Napoleone III, Pierre Napoleon, Carlo Luciano, Luigi Luciano, Napoleone Giuseppe, Vittorio Napoleone}\}$, come universo del discorso, in esso possiamo individuare diversi sottinsiemi. Più che la descrizione di tutti i sottinsiemi (ce ne sono $2^{16} = 65.536$), mi interessa descriverne alcuni. Ad esempio $N = \{\text{Napoleone II, Napoleone III, Pierre Napoleon, Carlo Luciano, Luigi Luciano, Napoleone Giuseppe}\}$ è l'insieme dei nipoti di Carlo Bonaparte. Se voglio però descrivere simbolicamente la situazione, usando solo un simbolo per indicare il rapporto di padre - figlio, ho qualche difficoltà. Sia cioè $P(x,y)$ la schematizzazione (simbolizzazione) della frase "*x è padre di y*". È corretto allora scrivere $P(\text{Carlo, Napoleone I})$. Ma come esprimere il rapporto tra Napoleone II e Carlo Bonaparte? Essendo il duca di Reichstad figlio di Napoleone I, si può scrivere $P(\text{Napoleone I, Napoleone II})$. Ma se si vuole una descrizione con formule dell'insieme dei nipoti di Carlo Bonaparte il predicato $P(x,y)$ apparentemente sembra insufficiente. E tale è se si ammette che le formule possano essere costruite solo con i connettivi proposizionali. Se si analizza meglio il fatto che Napoleone II è nipote di Carlo, si vede che tale parentela nasce perché il nipote è figlio di un figlio, cioè esiste un Bonaparte che è figlio di Carlo e padre di Napoleone II. Quanto detto per Napoleone II, vale anche per Luigi Luciano, non nel senso che Napoleone I è padre di Luigi Luciano, ma che esiste un Bonaparte che è figlio di Carlo e padre di Luigi Luciano. Si riconosce allora che si può rappresentare l'insieme N dei nipoti scrivendo $N = \{x \in B \mid (\exists y \in B)(P(\text{Carlo}, y) \wedge P(y, x))\}$. Nella formula che definisce l'insieme

è presente la scrittura " $\exists y \in B$ ", il cui significato è appunto "esiste un y , elemento dell'insieme B ". Con l'interpretazione che si è data al predicato $P(x,y)$, nella formula si chiede che tale y sia figlio di Carlo e padre di x .

Si consideri ora l'insieme $C = \{\text{Napoleone I, Luciano, Luigi, Gerolamo, Napoleone Giuseppe}\}$. Analizzando l'albero genealogico si vede che questi individui sono caratterizzati dal fatto di aver avuto solo figli maschi. Se allora si simbolizza la frase " x è maschio" con la scrittura $M(x)$, si ha $M(\text{Napoleone II})$ e $\neg M(\text{Elisa})$. L'insieme C si può scrivere $C = \{x \in B | (\forall y \in B)(P(x,y) \Rightarrow M(y))\}$. In questa scrittura compare una novità: il simbolo del quantificatore $\forall y \in B$, che sta a significare: "preso comunque un Bonaparte". La traduzione letterale della formula sopra scritta risulta così: "preso comunque un Bonaparte, se è figlio di x , allora è maschio". Per impadronirsi delle potenzialità del linguaggio, anche in un contesto così semplice, è bene effettuare vari esercizi, provandosi a descrivere in linguaggio simbolico, il fatto che Elisa sia zia di Napoleone III, che Vittorio Napoleone è pronipote di Carlo, ecc.

Tralascio altri esempi, ma sarà cura dell'insegnante soffermarsi a lungo sulla quantificazione, sia interpretandola come fenomeno linguistico, che simbolico. In Lingua italiana la quantificazione universale, cui corrisponde il simbolo \forall , viene solitamente introdotta con parole come "*ogni*", "*ciascuno*", "*qualunque*", "*tutti*", ma anche con:

il es. "*il contribuente verserà l'importo entro il 30 maggio*".

chi es. "*chi è causa del suo mal pianga se stesso*".

La quantificazione esistenziale, cui corrisponde il simbolo \exists , viene, di solito specificata da parole quali "*qualcuno*", "*certi*", "*alcuno*", ma anche con:

uno es. "*uno di voi mi tradirà*".

Nella lingua i quantificatori sono spesso presenti in combinazione con la negazione ed in tal caso le forme usate sono assai varie. Ad esempio " *non si hanno mai abbastanza soldi* "

Con lo strumento simbolico dei connettivi proposizionali e dei quantificatori, il linguaggio logico acquista una notevole flessibilità. Resta però sempre uno strumento grossolano, in grado di tradurre, solo in prima approssimazione, l'apparato linguistico naturale.

Personalmente sono convinto che non è opportuno trasmettere le conoscenze logiche usando esclusivamente simboli, perché ritengo che questi avrebbero presa poco duratura nella mente degli alunni. Tuttavia mi sembra indispensabile che la simbolizzazione sia uno strumento di cui il docente deve essersi ben impadronito, per essere in grado di condurre in modo corretto le lezioni riguardanti gli aspetti logici del linguaggio e della Matematica.

E4) Tutto questo sembra far intervenire aspetti poco significativi o di non immediata applicazione didattica, anche se le esigenze dell'Informatica hanno fatto cambiare a proposito, molte idee. Gli aspetti di una corretta formalizzazione sono però inscindibili dalla presentazione della Matematica, anzi della Scienza in generale. Come esempio consideriamo il seguente problema

Devo completare il rivestimento di una parete della cucina con un fregio alto cm. 25 e lungo m. 2. Ho a disposizione mattonelle rettangolari rosse e bianche, aventi entrambe una dimensione eguale a cm. 25, mentre l'altra dimensione è di cm. 12 per le mattonelle rosse e cm. 16 per le mattonelle bianche. Quante mattonelle devo utilizzare se non voglio essere costretto a spezzarne?

Per risolvere il problema può essere utile un disegno. Nella rappresentazione grafica non ha importanza se il disegno è approssimativo, se i rapporti tra le dimensioni della lunghezza ed altezza del

fregio non vengono conservati, purché siano perfettamente in scala la lunghezza del fregio e le basi delle mattonelle, altrimenti le indicazioni che si traggono dal modello visuale sono del tutto inaffidabili. Si tratta di un problema che non ha risposta unica: le soluzioni sono date dalle coppie $\langle 14,2 \rangle$, $\langle 10,5 \rangle$, $\langle 6,8 \rangle$ e $\langle 2,11 \rangle$, indicando con la prima componente il numero necessario di mattonelle rosse. Le soluzioni sono quasi impossibili a trovarsi, se si procede per casi, lavorando su di un disegno. Per questo sarebbe "faticoso" richiedere agli alunni di risolverlo completamente, per via grafica. Tuttavia è possibile determinare in modo, tutto sommato semplice, le possibili combinazioni per comporre il fregio, trattandosi di un problema che utilizza i concetti di massimo comun divisore e minimo comune multiplo. Il procedimento analitico ²³ è superiore a quello empirico e si esprime con una formula:

$$(1) \quad 12x + 16y = 200.$$

Ma non c'è nessun motivo che spinga a privilegiare la (1), in cui x rappresenta il numero delle mattonelle rosse ed y quello delle mattonelle bianche, rispetto, ad esempio, alle formule

$$(2) \quad 12z + 16y = 200; 12x + 16z = 200; \text{ecc.},$$

che si possono accettare come modelli diversi dello stesso problema. Certamente però non è accettabile la schematizzazione data dalla

$$(3) \quad 12z + 16z = 200.$$

²³ Il problema si può "tradurre" in un quesito di Geometria analitica: determinare i punti della retta (1) che si trovano nel I° quadrante ed hanno coordinate intere.

E perché? Gli studenti hanno coscienza delle leggi, non scritte, che vengono violate con la (3) e non con le (2)? Capita spesso in Matematica di sostituire oggetti variabili con altri, ma in questo caso non è chiaro a quali inconvenienti siamo andati incontro.

Gli aspetti proposizionali non sono sufficienti, come già mostrato. Ma questo non avviene perché si insegnano i sillogismi o altre forme di ragionamento che richiedono il calcolo dei predicati. Non basta il calcolo delle proposizioni perché c'è l'*eguaglianza* o *identità* che è uno dei concetti fondamentali in Matematica, per trattare la quale è indispensabile fare ricorso ad aspetti almeno predicativi. Anche se all'identità è riconosciuta come una relazione basilare, le viene riservata una scarsa attenzione nella programmazione didattica, ciò perché c'è forse la stessa concezione che si riportava sopra a riguardo della Logica, che si tratti di cosa ovvia, poco interessante. Invece è un argomento complesso, ricco di aspetti inaspettati, ma per trattare l'argomento con completezza è indispensabile l'uso del calcolo dei predicati in quanto tra tutte le relazioni di equivalenza²⁴, l'eguaglianza gode della proprietà di sostitutività, espressa mediante la formula:

$$(4) \quad (\forall x, y) (x = y \Rightarrow (A(x, x) \Rightarrow A(x, y))),$$

con opportune restrizioni sulla sostituibilità di x ad y e dove $A(x, x)$ è una formula espressa in un opportuno linguaggio. La presentazione a parole della proprietà di sostitutività dell'eguaglianza, di solito incontra consenso immediato, mostrando che le difficoltà e le puntualizzazioni tecniche, in via di enunciazione di principio, non sono rilevanti. Il problema si fa più delicato nel momento dell'applicazione del principio stesso nei vari contesti matematici. A mio parere, una maggiore familiarità e pratica col concetto di sostituzione, acquisita prima

²⁴ Vale adire relazioni riflessive, simmetriche e transitive.

ed indipendentemente da contingenze matematiche che la rendano necessaria ad uno scopo preciso, porterebbe ad una migliore comprensione dei metodi e dei ragionamenti matematici. E' infatti consuetudine dei matematici effettuare sostituzioni tra simboli o più in generale tra scritte, anche senza ponderare che in persone lontane dai procedimenti formali consueti o che devono apprendere tali metodi, l'uso disinvolto dei simboli può ingenerare incomprensioni.

Nella (4), compare il contesto, cioè l'ambito in cui l'eguaglianza viene posta, rappresentato dalle formule che si possono scrivere nel linguaggio atto a descrivere la teoria. Perciò in Geometria le formule parleranno di figure, di angoli, eccetera. In Aritmetica le formule riguarderanno i numeri e le operazioni. L'eguaglianza sarà allora, con termine tecnico, una *congruenza* per la teoria che si sta studiando. Faccio osservare che la determinazione della relazione di eguaglianza e delle sue proprietà è uno dei momenti più delicati della costruzione di ogni teoria.

6. Conclusione - Credo che su temi di Logica sia possibile e proficuo innescare quella forma di didattica che prende il nome di *dibattito culturale*, coinvolgente tutta la classe, dato che spesso l'argomento oggetto di dibattito è di conoscenza comune, non specialistica di alcuni campi e pertanto riservata agli alunni più colti e pronti²⁵

Il problema dell'insegnamento della Logica è di natura sostanzialmente didattica. Credo che sia esperienza comune a tutti gli insegnanti che qualora si tratti un argomento di qualsiasi materia, una sola volta ed in poco tempo, la permanenza nella memoria degli alunni è assai breve. Dunque se si vuole incidere sulla memoria e costituire capacità negli allievi, bisogna dedicare un tempo adeguato all'argomento prescelto.

²⁵ Per le modalità e le finalità di questa attività, si veda [BF].

Si giustifica così lo scarso "successo" avuto della teoria degli insiemi messa in veste di capitolo iniziale o finale in molti testi di impianto concettuale già "vecchio" e spesso insegnato da docenti che non hanno incontrato ed approfondito la teoria degli insiemi nei loro studi, fermandosi agli aspetti intuitivi ²⁶. Così è pure facile pronosticare l'insuccesso della Logica vista solo come presentazione mnemonica e limitata nel tempo di alcuni meccanismi come le tavole di verità. Qualora la presenza della Logica si limiti a questi aspetti poco produttivi e significativi, forse sarebbe meglio che tali argomenti non venissero neppure trattati. Per poter apprezzare l'importanza e l'utilità degli strumenti logici è necessaria una preparazione seria da parte del docente, perché sia in grado di cogliere le occasioni, così importanti per la crescita dell'allievo. I richiami frequenti a situazioni che si possano illuminare in modo precipuo con considerazioni logiche, compiranno l'opera.

Se invece l'insegnante accenna, di sfuggita e quasi malvolentieri, all'argomento, difficilmente riuscirà a farne cogliere gli aspetti interessanti, ma, ribadisco, questo è, secondo me, un problema di conoscenza approfondita, da parte del docente, ottenibile solo con studio e lavoro personali. A sfavore dell'introduzione della Logica nell'insegnamento c'è poi tutta una pubblicistica che si dice aggiornata, ma che invece è ricca di errori e confusioni.

Un contributo importante che la Logica può offrire è quello di essere un "cacciavite" idoneo allo "smontaggio del giocattolo" linguistico, per vedere cosa c'è all'interno. È perciò un ausilio al sorgere di una coscienza critica, indispensabile sempre e assai di più oggi in presenza di *media* coinvolgenti ed onnipresenti. Bisogna mettere i ragazzi in condizione di difendersi da soli da condizionamenti e stravolgimenti, ad iniziare dai pericoli insiti già nei libri di testo.

²⁶ Si veda [M2].

Bibliografia

- [B] G. Boole: **An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theory of logic and probability**. Walton & Maberley, Londra (1854), ristampato da Dover Publ. Inc., New York (1951).
- [BC] F. Bellissima - C. Crociani: *Due osservazioni sull'insegnamento della Logica nella Scuola media inferiore*, Rapporto matematico n.72, Ist. Mat. dell'Università di Siena (marzo 1983).
- [BF] M. Bartolini-Bussi, F. Ferri: *La discussione in situazioni di apprendimento della Matematica*. Relazione agli Internuclei, Pisa (marzo 1988).
- [F] G. Frege: **Ideografia - Un linguaggio in formule per il pensiero puro, formato ad imitazione di quello aritmetico**, Halle (1879), Ristampato in [He], pp. 1-82.
- [Fi] E. Fischbein: *Intuizioni e pensiero analitico nell'educazione matematica su Numeri ed operazioni nelle scuole di base - Aspetti psicologici e processi cognitivi*. A cura di L. Artusi Chini, Zanichelli, Bologna (1985).
- [H] T. Hailperin **Boole's Logic and Probability**. North Holland, Amsterdam (1976)
- [Ha] W.S. Hatcher: **Fondamenti di Matematica**, Boringhieri, Torino (1973)
- [He] J. van Heijenoort: **From Frege to Gödel**, Harvard University Press, Cambridge Mass. (1962)
- [I] C. Imbert: *Entre logique Naturelle et Intelligence Artificielle*. *Intellectica*, 1 n. 4 (1987) pagg. 7-40

- [J] P.N. Johnson-Laird, **Mental models**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1983).
- [JW] P.N. Johnson-Laird, P.C. Wason: *A theoretical analysis of insight into a reasoning task*, pubblicato su P.N. Johnson-Laird, P.C. Wason ed.: **Thinking: Readings in cognitive science** (1977) pp. 143 - 157
- [M1] C. Marchini: *La Scientificità dei nuovi programmi per le Scuole Elementari. La Matematica e le altre Discipline*. Intervento al Seminario IRRSAE-Puglia per la Formazione di Esperti in Matematica. Gallipoli (Le) 26/2/87 e 13/3/87. Preprint.
- [M2] C. Marchini: *Dall'«insiemistica» alla teoria degli insiemi*. La Matematica e la sua Didattica, **3** (Dicembre 1988), pp. 6 - 13.
- [Ma] D.C. Makinson: **Temi fondamentali della Logica moderna**, Boringhieri, Torino (1979).
- [Me] E. Mendelson: **Introduzione alla Logica Matematica**, Boringhieri, Torino (1972).
- [R] J.F. Richard: *Le vrai et le faux dans les conduites de recherche et de verification*. *Intellectica*, **1** n. 4 (1987), 65-80
- [Sm] R. Smullyan: **Qual è il titolo di questo libro?** Zanichelli, Bologna, (1981).
- [Sp] F. Speranza: *Logica* su **Enciclopedia delle Scienze**, de Agostini, Novara (1984) fasc. 109.
- [T1] A. Tarski: *Il concetto di verità nei linguaggi formalizzati (Wahrheitsbegriff in den formalisierten sprachen)*, *Studia Phil.*, **1**, (1935/36), pp. 261-405.
- [T2] A. Tarski. *Verità e Dimostrazione*, *Le Scienze* n° 12 (agosto 1969).
- [V] T. Varga: **Fondamenti di Logica per insegnanti**, Boringhieri, Torino (1973)