CAPITOLO 3

Completezza e Distributività nei Reticoli

3.1. Reticoli Completi

DEFINIZIONE 3.1.1. *Un insieme ordinato* $(X, \leq)$ *con almeno due elementi è un* **reticolo completo** *se* $\forall F \subseteq X$ *esistono* $\bigwedge F \in X$ *e* $\bigvee F \in X$.

ESEMPIO 3.1.2. (a) Il reticolo banale $\mathit{2}$ è un reticolo completo. Più in generale ogni reticolo finito è completo.

(b) $([0,1], \leq)$ è un reticolo completo.

(c) Se $X \neq \emptyset$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ è un reticolo completo, infatti per ogni $\mathcal{F}$ famiglia di sottoinsiemi di X esistono

$$\bigvee \mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F} \quad e \quad \bigwedge \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{F}.$$

(d) Il reticolo dei sottospazi di uno spazio vettoriale è un reticolo completo, infatti comunque presa una famiglia di sottospazi esiste il sup della famiglia dato dal sottospazio somma ovvero dal più piccolo sottospazio che contiene tutti questi sottospazi. L'intersezione insiemistica dei sottospazi è il loro inf.

PROPOSIZIONE 3.1.3. *Se* $(X, \leq)$ *è un insieme ordinato allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(i) *Ogni* $F \subseteq X$ *ha* sup.
(ii) *Ogni* $F \subseteq X$ *ha* inf.

DIMOSTRAZIONE. "$(i) \Rightarrow (ii)$" Osserviamo che l'esistenza del $\sup \emptyset$ comporta l'esistenza del minimo $\perp \in X$, così come l'esistenza del $\sup X$ comporta l'esistenza del massimo $\top \in X$.

Sia $H \subseteq X$ e proviamo che esiste $\inf H$. Indichiamo con

$$F = \{x \in X | x \leq h, \text{ per ogni } h \in H\}$$

l'insieme dei minoranti di H. Poiché $\perp \in F$, allora $F \neq \emptyset$. Per ipotesi, inoltre, essendo $F \subseteq X$, esiste $\overline{h} = \sup F$. Proviamo che $\overline{h} \in F$. Sia $h \in H$, allora $x \leq h$, $\forall x \in F$, ovvero h è un maggiorante per F, quindi $\overline{h} = \sup F \leq h$, da cui segue, per l'arbitrarietà di h, che $\overline{h} \in F$. Pertanto,

$\overline{h} = maxF$, ovvero $\overline{h} = \inf H$.

"$(ii) \Rightarrow (i)$" Si ottiene per dualità dalla precedente. $\square$

Dalla proposizione precedente discende che non esistono semireticoli completi che non siano anche reticoli completi.

DEFINIZIONE 3.1.4. *Sia $(X, \leq)$ un reticolo completo e $H \subseteq X$.*
H si dice ***sottoreticolo completo*** *di X se per ogni $A \subseteq H$ si ha*

$$\inf_X A \in H, \ \sup_X A \in H.$$

H si dice ***sottosemireticolo completo superiormente*** *o anche* ***$\bigvee$-completo*** *(rispettivamente* ***completo inferiormente*** *o* ***$\bigwedge$-completo****) se per ogni $A \subseteq H$ si ha*

$$\sup_X A \in H \ (\textit{rispettivamente}, \ \inf_X A \in H).$$

E' evidente che ogni sottosemireticolo $\vee$-completo ($\wedge$-completo, rispettivamente) contiene $\perp$ ($\top$, rispettivamente).

ESEMPIO 3.1.5. Sia X un insieme e τ una topologia su X. $(\tau, \subseteq)$ è un reticolo completo, infatti per ogni famiglia di aperti il sup è l'unione usuale fra insiemi e l'inf è l'interno dell'intersezione usuale fra insiemi.

$(\tau, \subseteq)$ è, inoltre, un sottosemireticolo $\bigvee$-completo di $\big(\mathcal{P}(X), \subseteq\ \big)$ ed è un sottoreticolo; possiamo, sinteticamente, dire che è un sottoreticolo $\bigvee$-completo di $\big(\mathcal{P}(X), \subseteq\ \big)$. In generale, però, $(\tau, \subseteq)$ non è un sottoreticolo completo.

PROPOSIZIONE 3.1.6. *Sia $(X, \leq)$ un reticolo completo e κ una involuzione che inverte l'ordine in X.*
Allora valgono le ***leggi di De Morgan*** *(infinite), cioè $\forall A \subseteq X$*

$$\kappa\left(\bigvee A\right) = \bigwedge \kappa^{\rightarrow}(A) = \bigwedge \big\{\kappa(a) | a \in A\big\}$$

e

$$\kappa\left(\bigwedge A\right) = \bigvee \kappa^{\rightarrow}(A) = \bigvee \big\{\kappa(a) | a \in A\big\}.$$

DIMOSTRAZIONE. $a \leq \bigvee A$, $\forall a \in A \Rightarrow \kappa\left(\bigvee A\right) \leq \kappa(a)$, $\forall a \in A$.
$m \leq \kappa(a)$, $\forall a \in A \Rightarrow a \leq \kappa(m)$, $\forall a \in A \Rightarrow \bigvee A \leq \kappa(m) \Rightarrow m \leq \kappa\left(\bigvee A\right)$.
Quindi $\kappa\left(\bigvee A\right)$ è il più grande dei minoranti di $\kappa^{\rightarrow}(A)$, ovvero $\kappa\left(\bigvee A\right) = \bigwedge \big\{\kappa(a) | a \in A\big\}$.
Analogamente si dimostra l'altra legge di De Morgan.

$\square$

Considerazioni analoghe a quelle fatte per dimostrare la Proposizione 2.3.15, portano ad affermare che la precedente proposizione, considerando anche il caso $A = \emptyset$, esprime il fatto che κ è un isomorfismo tra il reticolo completo $(X, \leq)$ e il suo opposto.

Indichiamo con **CLat** la categoria dei reticoli completi (considerati come oggetti) i cui morfismi sono le funzioni che conservano $\bigvee$ e $\bigwedge$ cioè, se $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ sono reticoli completi, i morfismi di $\mathbf{CLat}\big((X, \leq), (Y, \leq)\big)$ sono le funzioni

$$f : X \to Y$$

tali che, $\forall A \subseteq X$:

$$f\left(\bigvee A\right) = \bigvee f^{\to}(A) \quad \text{e} \quad f\left(\bigwedge A\right) = \bigwedge f^{\to}(A).$$

Indichiamo con **CBool** la categoria i cui oggetti sono le algebre di Boole complete ed i cui morfismi sono le funzioni che conservano $\bigvee$, $\bigwedge$ e commutano con $\neg$.

Indichiamo con **DMrg** la categoria i cui oggetti, detti *algebre di De Morgan*, sono reticoli completi muniti di una involuzione che inverte l'ordine ed i cui morfismi da $(X, \vee, \wedge, \bot, \top, \kappa)$ a $(Y, \vee, \wedge, \bot, \top, \kappa)$ sono funzioni

$$f : X \to Y$$

che conservano $\bigvee$, $\bigwedge$ e tali che

$$f(\kappa(x)) = \kappa(f(x)), \ \forall x \in X.$$

Evidentemente **CBool** è una sottocategoria piena di **CLat** ed è anche una sottocategoria piena di **DMrg**, in virtù della Proposizione 2.4.10. Inoltre, è ovvio che **DMrg** è (isomorfa a) una sottocategoria di **CLat** (tramite il funtore che "dimentica" l'involuzione κ) che però non è una sottocategoria piena. In effetti un morfismo di reticoli completi fra due algebre di De Morgan non commuta necessariamente con l'involuzione che inverte l'ordine, come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO 3.1.7. Posto $I = [0, 1]$ e considerata $\kappa : I \to I$ tale che $\kappa(x) = 1 - x$, $\forall x \in I$, si ha evidentemente che $(I, \leq, \kappa)$ è un'algebra di De Morgan.

La funzione $f : I \to I$ definita da

$$f(x) \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1+x}{2} & \text{se } \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

è un morfismo (anzi un isomorfismo) di **CLat** ma non commuta con l'involuzione κ.

OSSERVAZIONE 3.1.8. Se $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ sono reticoli completi, le condizioni

$$f\left(\bigvee A\right) = \bigvee f^{\to}(A), \ \forall A \subseteq X \ \text{ ed } \ f\left(\bigwedge A\right) = \bigwedge f^{\to}(A), \ \forall A \subseteq X$$

non sono equivalenti.

Si consideri ad esempio l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ed i reticoli (completi) $(\mathcal{P}, \subseteq)$, $(\mathcal{F}, \subseteq)$ ed $(\mathcal{I}, \subseteq)$ dove

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{N}), \ \mathcal{F} = \big\{\mathbb{N}\big\} \cup \big\{F \subseteq \mathbb{N} \mid |F| < \omega\big\}, \ \mathcal{I} = \big\{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}\big\}.$$

L'inclusione $j : \mathcal{F} \to \mathcal{P}$ conserva $\bigwedge$ ma non conserva $\bigvee$, mentre l'inclusione $l : \mathcal{I} \to \mathcal{P}$ conserva $\bigvee$ ma non conserva $\bigwedge$.

Infatti se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ allora $\bigwedge_{\mathcal{F}} \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A}$ e se $|\bigcup \mathcal{A}| = \omega$ allora $\bigvee_{\mathcal{F}} \mathcal{A} = \mathbb{N}$.

Si ha allora $\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F} : j\,(\bigwedge_{\mathcal{F}} \mathcal{A}) = j\,(\bigcap \mathcal{A}) = \bigcap \mathcal{A} = \bigwedge_{\mathcal{P}} \mathcal{A} = \bigwedge_{\mathcal{P}} j^{\rightarrow}(\mathcal{A})$ mentre se $|\bigcup \mathcal{A}| = \omega$ e $\bigcup \mathcal{A} \neq \mathbb{N} : j\,(\bigvee_{\mathcal{F}} \mathcal{A}) = j(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \neq \bigcup \mathcal{A} = \bigvee_{\mathcal{P}} \mathcal{A} = \bigvee_{\mathcal{P}} j^{\rightarrow}(\mathcal{A})$.

Analogamente, osserviamo che se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$ allora $\bigvee_{\mathcal{I}} \mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}$ e se $|X \setminus \bigcap \mathcal{B}| = \omega$ allora $\bigwedge_{\mathcal{I}} \mathcal{B} = \emptyset$.

Di conseguenza $\forall \mathcal{B} \subseteq \mathcal{I} : l\,(\bigvee_{\mathcal{I}} \mathcal{B}) = l\,(\bigcup \mathcal{B}) = \bigcup \mathcal{B} = \bigvee_{\mathcal{P}} \mathcal{B} = \bigvee_{\mathcal{P}} l^{\rightarrow}(\mathcal{B})$ mentre se $\bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset$ e $|X \setminus \bigcap \mathcal{B}| = \omega$ allora $l\,(\bigwedge_{\mathcal{I}} \mathcal{B}) = l(\emptyset) = \emptyset \neq \bigcap \mathcal{B} = \bigwedge_{\mathcal{P}} \mathcal{B} = \bigwedge_{\mathcal{P}} l^{\rightarrow}(\mathcal{B})$.

Per la precedente osservazione e per la Proposizione 3.1.3, risulta opportuno considerare le seguenti categorie.

$\bigvee$-**CSLat** ha come oggetti i reticoli completi e come morfismi le funzioni che conservano $\bigvee$.

$\bigwedge$-**CSLat** ha come oggetti i reticoli completi e come morfismi le funzioni che conservano $\bigwedge$.

3.2. Teorema del Funtore Aggiunto

Riprendiamo il concetto di aggiunzione fra funtori considerando in particolare funtori fra categorie ordinate, cioè funzioni isotone fra classi ordinate, già introdotto nell'Esempio 1.8.11.

TEOREMA 3.2.1 (Teorema del Funtore Aggiunto). *Siano $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ insiemi ordinati o equivalentemente categorie ordinate piccole.*

(1) *Se $F : X \to Y$ e $G : Y \to X$ sono funzioni isotone o equivalentemente funtori da $(X, \leq)$ in $(Y, \leq)$ ed*

$$F \dashv G$$

allora F conserva i sup *esistenti in X e G conserva gli* inf *esistenti in Y.*

(2) *Se $(X, \leq)$ è un reticolo completo ed $F : X \to Y$ conserva* sup *arbitrari, quindi in particolare è un funtore, allora la funzione*

$$G : Y \to X$$

definita $\forall y \in Y$ da

$$G(y) = \bigvee \{x \in X | F(x) \leq y\}$$

è l'unico funtore aggiunto a destra di F.

(3) *Se* $(Y, \leq)$ *è un reticolo completo e* $G : Y \to X$ *conserva* inf *arbitrari, quindi in particolare è un funtore, allora la funzione*

$$F : X \to Y$$

definita $\forall x \in X$ *da*

$$F(x) = \bigwedge \{y \in Y | x \leq G(y)\}$$

è l'unico funtore aggiunto a sinistra di F.

DIMOSTRAZIONE. (1) Sia $S \subseteq X$, per il quale esista $s = \bigvee S$.

Si deve dimostrare che $F(s) = F\left(\bigvee S\right) = \bigvee F^{\rightarrow}(S) = \bigvee \{F(x)|x \in S\}$, ovvero che $F(s)$ è il più piccolo dei maggioranti per $\{F(x)|x \in S\}$. Infatti: se $x \in S$, allora $x \leq s$; poiché F è isotona, allora $F(x) \leq F(s)$, pertanto $F(s)$ è un maggiorante per $\{F(x)|x \in S\}$. Inoltre, se $\overline{y} \in Y$ è un maggiorante per $\{F(x)|x \in S\}$, allora $F(x) \leq \overline{y}$, $\forall x \in S$ e poiché G è isotona $G(F(x)) \leq G(\overline{y})$, quindi per per (**ADI**) si ha $x \leq G(F(x)) \leq G(\overline{y})$, $\forall x \in S$. Pertanto $G(\overline{y})$ è un maggiorante di S, allora $s = \bigvee S \leq G(\overline{y})$ e dal fatto che F è isotona e da (**ADII**) segue che $F(s) \leq F(G(\overline{y})) \leq \overline{y}$.

Sia ora $T \subseteq Y$, per il quale esista $t = \bigwedge T$. Si deve avere che $G(t) = G\left(\bigwedge T\right) = \bigwedge G^{\rightarrow}(T) = \bigwedge \{G(y)|y \in T\}$, ovvero che $G(t)$ è il più grande dei minoranti di $\{G(y)|y \in T\}$; infatti: se $y \in T$, allora $t \leq y$ ed essendo G isotona, si ha che $G(t) \leq G(y)$, cioè $G(t)$ è un minorante di $\{G(y)|y \in T\}$. Inoltre, se $\overline{x} \in X$ è un minorante per $\{G(y)|y \in T\}$, allora $\overline{x} \leq G(y), \forall y \in T$ e poiché F è isotona, per (**ADII**) si ha che $F(\overline{x}) \leq F(G(y)) \leq y$, $\forall y \in T$, ovvero $F(\overline{x})$ è un minorante per T. Infine essendo G isotona, per la (**ADI**), si ha $\overline{x} \leq G(F(\overline{x})) \leq G(t)$.

(2) La funzione G dell'enunciato è ben definita poiché $(X, \leq)$ è un reticolo completo e quinsi esiste $\bigvee \{x \in X | F(x) \leq y\}$, $\forall y \in Y$. Inoltre è chiaro che G conserva l'ordine, quindi è un funtore. Per verificare che $F \dashv G$, si deve dimostrare che valgono le disuguaglianze di aggiunzione (**ADI**) e (**ADII**). Se $a \in X$, $a \in \{x \in X | F(x) \leq F(a)\}$, pertanto $a \leq \bigvee \{x \in X | F(x) \leq F(a)\} = G(F(a))$. Sia ora $b \in Y$; poiché F conserva sup arbitrari, allora $F(G(b)) = F(\bigvee \{x \in X | F(x) \leq b\} = \bigvee \{F(x) | x \in X : F(x) \leq b\} \leq b$.

Per l'unicità, supposto che esista $G' : Y \to X$ isotona tale che $F \dashv G'$, allora $\forall x \in X$ e $\forall y \in Y$ risultano verificate per F e G' (**ADI**) e (**ADII**), cioè $x \leq G'(F(x))$ ed $F(G'(y)) \leq y$. Ma, poiché $F \dashv G$, allora valgono (**ADI**) e (**ADII**) per F e G, pertanto, essendo G e G' funzioni isotone, si ha che, $\forall y \in Y$, $G(y)) \leq G'(F(G(y)) \leq G'(y)$ e $G'(y) \leq G(F(G'(y))) \leq G(y)$. Per doppia disuguaglianza segue che $G = G'$.

(3) La funzione F dell'enunciato è ben definita poiché $(Y, \leq)$ è un reticolo completo, allora esiste $\bigwedge \{y \in Y | x \leq G(y)\}$, $\forall x \in X$; è chiaro che F conserva l'ordine, quindi è un funtore. Per dimostrare che $F \dashv G$, si devono verificare (**ADI**) ed (**ADII**). Sia $a \in X$; poiché G conserva intersezioni arbitrarie, allora $a \leq \bigwedge \{G(y) | y \in Y : a \leq G(y)\} = G\left(\bigwedge \{y \in Y | a \leq G(y)\}\right) =$

$G(F(a))$. Se $b \in Y$, allora $b \in \{y \in Y/G(b) \leq G(y)\}$, quindi $F(G(b)) = \bigwedge \{y \in Y/G(b) \leq G(y)\} \leq b$.

L'unicità della F si dimostra analogamente a quella di G in (2). □

OSSERVAZIONE 3.2.2. Dall'unicità nel Teorema del Funtore Aggiunto e dall'Esempio 1.8.12 segue che gli operatori powerset classici associati ad un'applicazione $f : A \to B$ sono esprimibili l'uno in funzione dell'altro nel modo seguente

$$f^{\to}(X) = \bigwedge \{Y \subseteq B | f^{\leftarrow}(Y) \supseteq X\},\ \forall X \subseteq A$$

ed

$$f^{\leftarrow}(Y) = \bigvee \{X \subseteq A | f^{\to}(X) \subseteq Y\},\ \forall Y \subseteq B.$$

PROPOSIZIONE 3.2.3. *La categoria opposta della categoria delle algebre di De Morgan,* $\mathbf{DMrg}^{op}$*, è (isomorfa ad) una categoria concreta.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con **DMOp** la categoria avente come oggetti algebre di De Morgan e come morfismi fra gli oggetti L ed L' i morfismi di semireticoli superiori completi aventi aggiunta a destra che commuta con l'involuzione che inverte l'ordine in L ed L'. Evidentemente, **DMOp** è una categoria concreta, in quanto ogni oggetto L individua univocamente l'insieme L, ogni morfismo $f \in \mathbf{DMOp}(L, L')$ individua univocamente la funzione $f : L \to L'$. Osserviamo, innanzitutto, che se $f \in \mathbf{DMrg}^{op}(L, L')$, ciò equivale a dire che $f^{op} : L' \to L$ è un morfismo di algebre di De Morgan, avente, per il Teorema del Funtore Aggiunto, aggiunta a sinistra $h : L \to L'$ che è un morfismo di semireticoli superiori completi e pertanto, $h \in \mathbf{DMOp}(L, L')$. Inoltre, sempre per il Teorema del Funtore Aggiunto, ogni morfismo $f \in \mathbf{DMOp}(L, L')$ ha aggiunta a destra $f'' : L' \to L$ che è un morfismo di semireticoli inferiori completi, che, commutando per ipotesi con l'involuzione che inverte l'ordine in L ed L' è anche un morfismo di semireticoli superiori completi, ovvero un morfismo di reticoli completi; inoltre, f'' poiché commuta con l'involuzione che inverte l'ordine è un morfismo di algebre di De Morgan, quindi determina un morfismo $k \in \mathbf{DMrg}^{op}(L, L')$, tale che $k^{op} = f''$. Pertanto, le corrispondenze che associano ad ogni

$$L \in |\mathbf{DMrg}^{op}| \quad \longmapsto \quad F(L) = L$$

e ad ogni

$$f \in \mathbf{DMrg}^{op}(L, L') \quad \longmapsto \quad F(f) = h$$

con h aggiunto a sinistra di f^{op}, definiscono un funtore

$$F : \mathbf{DMrg}^{op} \to \mathbf{DMOp}.$$

Analogamente, le corrispondenze che associano ad ogni

$$L \in |\mathbf{DMOp}| \quad \longmapsto \quad G(L) = L$$

e ad ogni

$$f \in \mathbf{DMOp}(L, L') \quad \longmapsto \quad G(f) = k$$

con $f'' = k^{op}$ aggiunto a destra di f, definiscono un funtore

$$G : \mathbf{DMOp} \to \mathbf{DMrg}^{op}.$$

Inoltre, dall'unicità del funtore aggiunto (a sinistra e a destra) segue che

$$F \circ G = 1_{\mathbf{DMOp}} \;\text{ e }\; G \circ F = 1_{\mathbf{DMrg}^{op}}.$$

Allora

$$F : \mathbf{DMrg}^{op} \to \mathbf{DMOp}$$

è un isomorfismo, ovvero $\mathbf{DMrg}^{op}$ e $\mathbf{DMOp}$ sono categorie isomorfe. □

LEMMA 3.2.4. *Siano Y, Z due reticoli completi ed $f : Y \to Z$ una funzione.*

Se f è suriettiva e conserva $\bigvee$ ($\bigwedge$, rispettivamente), allora per l'aggiunta a destra (a sinistra, rispettivamente) di f, $g : Z \to Y$, si ha che $\forall b, b' \in Z$

$$g(b) \leq g(b') \Leftrightarrow b \leq b'.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $g(b) \leq g(b')$ e sia $b = f(a)$. Allora

$$b = f(a) \leq f\big(g(f(a))\big) \leq f\big(g(b)\big) \leq f\big(g(b')\big) \leq b'.$$

Il viceversa vale banalmente essendo g un'applicazione isotona.

La dimostrazione è analoga nella versione alternativa indicata in parentesi. □

PROPOSIZIONE 3.2.5. *Siano Y e Z due reticoli completi e sia $f : Y \to Z$ una funzione che conserva $\bigvee$. Allora, indicata con $g : Z \to Y$ l'aggiunta a destra di f, si ha*

(1) *f è iniettiva $\Leftrightarrow g \circ f = i_Y$.*
(2) *f é suriettiva $\Leftrightarrow f \circ g = i_Z$.*
(3) *f è bigettiva $\Leftrightarrow g = f^{-1}$.*

DIMOSTRAZIONE. "$\Leftarrow$" Tale implicazione è evidente in (1), (2) e (3).

"$\Rightarrow$" Per il Teorema del Funtore Aggiunto, $\forall b \in Z$, $\forall a \in Y$, risulta:

$$g(b) = \bigvee \left\{a' \in Y | f(a') \leq b\right\}$$

ed

$$f(a) = \bigwedge \left\{b' \in Z | a \leq g(b')\right\}.$$

(1) Dal Lemma 3.2.4 segue che $\forall a \in Y$, si ha

$$\begin{aligned} g \circ f(a) &= g(f(a)) \\ &= \bigvee \{a' \in Y | f(a') \leq f(a)\} \\ &= \bigvee \{a' \in Y | a' \leq a\} \\ &= a. \end{aligned}$$

Quindi

$$g \circ f(a) = a = i_Y(a), \ \forall a \in Y.$$

(2) Dal Lemma 3.2.4 segue che, $\forall b \in Z$, risulta

$$\begin{aligned} f \circ g(b) &= f(g(b)) \\ &= \bigwedge \{b' \in Z | g(b) \leq g(b')\} \\ &= \bigwedge \{b' \in Z | b \leq b'\} \\ &= b. \end{aligned}$$

Pertanto

$$f \circ g(b) = b = i_Z(b), \ \forall b \in Z.$$

(3) Poiché f è un'applicazione bigettiva, esiste ed è unica l'inversa di f, f^{-1} e da (1) e (2) segue che $f^{-1} = g$. □

PROPOSIZIONE 3.2.6. *Siano Y e Z due reticoli completi e sia $g : Z \to Y$ una funzione che conserva $\bigwedge$. Allora, indicata con $f : Y \to Z$ l'aggiunta a sinistra di g, si ha*

(1) *g è iniettiva $\Leftrightarrow$ $f \circ g = i_Z$.*
(2) *g è suriettiva $\Leftrightarrow$ $g \circ f = i_Y$.*
(3) *g è bigettiva $\Leftrightarrow$ $f = g^{-1}$.*

DIMOSTRAZIONE. "$\Leftarrow$" Tale implicazione è evidente in (1), (2) e (3).

"$\Rightarrow$" (1) Dal Lemma 3.2.4 segue che $\forall b \in Z$ si ha

$$\begin{aligned} f \circ g(b) &= f(g(b)) \\ &= \bigwedge \{b' \in Z | g(b) \leq g(b')\} \\ &= \bigwedge \{b' \in Z | b \leq b'\} \\ &= b. \end{aligned}$$

Quindi,

$$f \circ g(b) = b = i_Z(b), \ \forall b \in Z.$$

(2) Dal Lemma 3.2.4 segue che $\forall a \in Y$, risulta

$$\begin{aligned} g \circ f(a) &= g(f(a)) \\ &= \bigvee \{a' \in Y | f(a') \leq f(a)\} \\ &= \bigvee \{a' \in Y | a' \leq a\} \\ &= a. \end{aligned}$$

Pertanto

$$g \circ f(a) = a = i_Y(a),\ \forall a \in Y.$$

(3) Poiché f è un'applicazione bigettiva, dall'unicità dell'inversa di f e da (1) e (2) segue la tesi. □

PROPOSIZIONE 3.2.7. *Se Y e Z sono reticoli completi ed $f : Y \to Z$ è un morfismo di reticoli completi bigettivo, allora f^{-1} è un morfismo di reticoli completi, quindi f è un isomorfismo di reticoli completi.*

DIMOSTRAZIONE. Essendo f un morfismo di reticoli completi, f conserva $\bigvee$ e $\bigwedge$. Inoltre, poiché f è bigettiva, per 3.2.5 (3), f^{-1} è l'aggiunta a destra di f, quindi conserva $\bigwedge$, e per 3.2.6 (3) f^{-1} è l'aggiunta a sinistra di f e pertanto conserva $\bigvee$, ovvero è un morfismo di reticoli completi. □

PROPOSIZIONE 3.2.8. *Se $(Y, \vee, \wedge, \perp, \top, \kappa)$ e $(Z, \vee, \wedge, \perp, \top, \kappa)$ sono algebre di De Morgan ed*

$$f : Y \to Z$$

è un morfismo di algebre di De Morgan bigettivo, allora f^{-1} è un morfismo di algebre di De Morgan, quindi f è un isomorfismo di algebre di De Morgan.

DIMOSTRAZIONE. Poiché per la Proposizione 3.2.7 f^{-1} è un morfismo di reticoli completi, per ottenere la tesi basta verificare che f^{-1} commuta con le involuzioni che invertono l'ordine in Y e Z.

Se $a \in Z$, si ha

$$\kappa(a) = f \circ f^{-1}(\kappa(a))$$

e posto $b = f^{-1}(a)$, essendo f un morfismo di algebre di De Morgan, risulta

$$f(b) = f \circ f^{-1}(a) = a = \kappa(f \circ f^{-1}(\kappa(a))) = f(\kappa(f^{-1}(\kappa(a))))$$

quindi, per l'iniettività di f

$$b = \kappa(f^{-1}(\kappa(a)))$$

e componendo a destra per κ

$$\kappa(b) = \kappa(f^{-1}(a)) = f^{-1}(\kappa(a)).$$

□

PROPOSIZIONE 3.2.9.

(1) *Una funzione isotona $f : Y \to Y$ è auto-aggiunta se e solo se è autoinversa.*

(2) *Se* $f : Y \to Z$ *e* $g : Z \to Y$ *sono funzioni isotone e se* $f \dashv g$, *allora* $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *sono idempotenti.*

DIMOSTRAZIONE. (1)

$$\begin{aligned} f \dashv f &\Leftrightarrow \forall y \in Y : f(f(y)) \leq y \leq f(f(y)) \\ &\Leftrightarrow f^2 = i_Y. \end{aligned}$$

(2) $\forall y \in Y$

$$\begin{aligned} g \circ f \circ g \circ f(y) &= g(f \circ g(f(y))) \\ &\leq g(f(y)) \\ &= g \circ f(y) \\ &\leq g \circ f(g \circ f(y)) \\ &= g \circ f \circ g \circ f(y). \end{aligned}$$

Analogamente, $\forall z \in Z$

$$\begin{aligned} f \circ g \circ f \circ g(z) &= f \circ g(f \circ g(z)) \\ &\leq f \circ g(z) \\ &= f(g(z)) \\ &\leq f(g \circ f(g(z))) \\ &= f \circ g \circ f \circ g(z). \end{aligned}$$

□

3.3. Algebre di Heyting Complete, Frames e Locales

DEFINIZIONE 3.3.1. *Sia* $(X, \leq)$ *un reticolo completo.*

$(X, \leq)$ *verifica la* ***prima legge di distributività infinita****, se soddisfa la condizione*

$$(\mathbf{ILD}\infty) \quad a \wedge \bigvee S = \bigvee \{a \wedge s | s \in S\}, \ \forall a \in X, \ \forall S \subseteq X.$$

$(X, \leq)$ *verifica la* ***seconda legge di distributività infinita****, se soddisfa la condizione*

$$(\mathbf{IILD}\infty) \quad a \vee \bigwedge S = \bigwedge \{a \vee s | s \in S\}, \ \forall a \in X, \ \forall S \subseteq X.$$

Un reticolo completo che verifica la (**ILD**∞) *(la* (**IILD**∞)*, rispettivamente) si dice* ***frame*** *(****coframe****, rispettivamente).*

ESEMPIO 3.3.2. (a) $\forall X \in |\mathbf{Set}|$, $\mathcal{P}(X)$ verifica entrambe le leggi di distributività infinita. Infatti $\forall A \subseteq X$, $\forall \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$:

$$A \cup \left(\bigcap \mathcal{F}\right) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} (A \cup F)$$

e
$$A \cap \left(\bigcup \mathcal{F}\right) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} (A \cap F).$$

(b) Se (X, τ) è uno spazio topologico, come osservato in 3.1.5, τ è un reticolo completo. Si verifica inoltre che τ soddisfa (**ILD**∞); infatti, $\forall \mathcal{F} \subseteq \tau$ risulta
$$\bigvee \mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F} \quad e \quad \bigwedge \mathcal{F} = Int\left(\bigcap \mathcal{F}\right)$$
quindi in particolare, $\forall P, Q \in \tau$:
$$P \wedge Q = P \cap Q.$$

Allora tenendo conto anche dell'Esempio 3.3.2 (a), si ha, evidentemente, $\forall A \in \tau$
$$A \wedge \left(\bigvee \mathcal{F}\right) = A \cap \left(\bigcup \mathcal{F}\right) = \bigcup \{A \cap F | F \in \mathcal{F}\} = \bigvee \{A \wedge F | F \in \mathcal{F}\}.$$

(c) Analogamente si può vedere che la famiglia dei chiusi di uno spazio topologico verifica la (**IILD**∞).

In generale un frame non è detto che sia un coframe e viceversa, come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO 3.3.3. Sia $(\mathbb{N}, \tau)$ lo spazio topologico dato da $\mathbb{N}$ con la topologia cofinita τ. Posto
$$P_t = \mathbb{N} \setminus \{2t\}, \ t \in \mathbb{N}_0 \quad \text{ed} \quad A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$
allora risulta $P_t \in \tau$, $\forall t \in \mathbb{N}_0$ ed $A \in \tau$, ma
$$\left(\bigwedge_{t \in \mathbb{N}_0} P_t\right) \vee A = A$$
mentre
$$\bigwedge_{t \in \mathbb{N}_0} (P_t \vee A) = \mathbb{N}$$
ovvero τ non verifica (**IILD**∞), quindi non è un coframe, mentre da 3.3.2 (b) segue che τ è un frame.

Analogamente, prendendo la famiglia dei chiusi di tale topologia si ha un esempio di coframe che non è un frame.

PROPOSIZIONE 3.3.4. *Ogni algebra di Heyting completa verifica la prima legge di distributività infinita* (**ILD**∞).

DIMOSTRAZIONE. Sia $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \rightarrow)$ un'algebra di Heyting completa e sia $a \in X$.

Consideriamo le funzioni
$$f : X \to X, \ x \longmapsto f(x) = a \wedge x$$
$$g : X \to X, \ x \longmapsto g(x) = a \to x.$$

Allora f e g sono funtori e risulta

$$f \dashv g.$$

Infatti: $\forall x \in X$

$$f(g(x)) = f(a \to x) = a \wedge (a \to x) = a \wedge x \leq x$$

e

$$\begin{aligned} x \leq (a \to x) &= (a \to a) \wedge (a \to x) \\ &= a \to (a \wedge x) \\ &= g(a \wedge x) = g(f(x)). \end{aligned}$$

Pertanto, g conserva $\bigwedge$ e f conserva $\bigvee$ e quindi

$$a \wedge \bigvee S = f(\bigvee S) = \bigvee \{f(s) | s \in S\} = \bigvee \{a \wedge s | s \in S\}.$$

$\square$

PROPOSIZIONE 3.3.5. *Un reticolo completo $(X, \leq)$ che verifica la prima legge di distributività infinita* (**ILD**∞) *è un'algebra di Heyting.*

DIMOSTRAZIONE. Sia, $\forall a \in X$,

$$f_a : X \to X$$

definita da

$$x \longmapsto f_a(x) = a \wedge x.$$

Allora f_a conserva $\bigwedge$, quindi per il Teorema del Funtore Aggiunto ha aggiunta a destra $g_a : X \to X$ e risulta

$$f_a\big(g_a(x)\big) \leq x, \quad y \leq g_a\big(f_a(y)\big), \ \forall x, y \in X.$$

Posto

$$a \to b = g_a(b), \ \forall b \in X$$

segue che

$$\begin{aligned} x \leq a \to b \Rightarrow \ & x \leq g_a(b) \\ \Rightarrow \ & f_a(x) \leq f_a(g_a(b)) \leq b \\ \Rightarrow \ & a \wedge x \leq b \end{aligned}$$

e viceversa

$$\begin{aligned} a \wedge x \leq b \Rightarrow \ & f_a(x) \leq b \\ \Rightarrow \ & x \leq g_a(f_a(x)) \leq g_a(b) \\ \Rightarrow \ & x \leq a \to b \end{aligned}$$

ovvero X è un'algebra di Heyting. $\square$

PROPOSIZIONE 3.3.6.

(1) *Se $(X, \leq)$ è un'algebra di De Morgan, allora $(X, \leq)$ è un frame se e solo se $(X, \leq)$ è un coframe.*

(2) *Se $(X, \leq)$ è un'algebra di Boole completa, allora $(X, \leq)$ è un frame ed un coframe.*

DIMOSTRAZIONE. (1) "$\Rightarrow$" Siano $b \in X$ e $T \subseteq X$, allora dalle ipotesi segue che

$$\begin{aligned} b \vee (\bigwedge T) &= \kappa\Big(\kappa\Big(b \vee \Big(\bigwedge T\Big)\Big)\Big) \\ &= \kappa\Big(\kappa(b) \wedge \Big(\kappa\Big(\bigwedge T\Big)\Big)\Big) \\ &= \kappa\Big(\kappa(b) \wedge \Big(\bigvee (\kappa^{\rightarrow}(T))\Big)\Big) \\ &= \kappa\left(\bigvee \{\kappa(b) \wedge \kappa(t) | t \in T\}\right) \\ &= \bigwedge \{\kappa\big(\kappa(b) \wedge \kappa(t)\big) | t \in T\} \\ &= \bigwedge \{b \vee t | t \in T\} \end{aligned}$$

ovvero che X soddisfa (**IILD∞**), quindi X è un coframe.

"$\Leftarrow$" La tesi si dimostra analogamente.

(2) La tesi segue dalla parte (1) e dalla Proposizione 2.5.10, poiché ogni algebra di Boole completa è un'algebra di De Morgan. □

Indichiamo con **Frm** la categoria concreta avente per oggetti i frames e per morfismi le funzioni che conservano $\wedge$ e $\bigvee$.

Indichiamo con **CoFrm** la categoria concreta avente per oggetti i coframes e per morfismi le funzioni che conservano $\bigwedge$ e $\vee$.

OSSERVAZIONE 3.3.7. Secondo le definizioni date in precedenza è chiaro che se X, Y sono due oggetti di $\bigvee$-**CLat** o $\bigwedge$-**CLat** o **Frm** o **CoFrm**, o **CLat** e se $f : X \to Y$ è un morfismo nella corrispondente categoria, f è un isomorfismo in tale categoria se e solo se f è bigettiva ed $f^{-1} : Y \to X$ è un morfismo della stessa categoria.

Evidentemente, con le notazioni del paragrafo 2.3 $\forall X, Y \in |\mathbf{CoFrm}|$ si ha

$$Is\big(\mathbf{CLat}(X,Y)\big) \subseteq Is\big(\mathbf{CoFrm}(X,Y)\big) \subseteq Is\big(\bigwedge\text{-}\mathbf{CLat}(X,Y)\big)$$

e $\forall X, Y \in |\mathbf{Frm}|$

$$Is\big(\mathbf{CLat}(X,Y)\big) \subseteq Is\big(\mathbf{Frm}(X,Y)\big) \subseteq Is\big(\bigvee\text{-}\mathbf{CLat}(X,Y)\big).$$

Possiamo verificare che tali inclusioni sono, in realtà, delle uguaglianze. Infatti, vale il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 3.3.8. *Se $(X, \leq)$ ed $(Y, \leq)$ sono reticoli completi ed $f : X \to Y$ è bigettiva, allora sono equivalenti le seguenti condizioni:*

(*i*) $f \in \bigvee$-$\mathbf{SLat}(X, Y)$.

(*ii*) $f \in \mathbf{CLat}(X,Y)$.
(*iii*) $f \in \bigwedge\text{-}\mathbf{SLat}(X,Y)$.

DIMOSTRAZIONE. "$(i) \Rightarrow (ii)$" Per il Lemma 2.3.11 f conserva e riflette l'ordine. Se allora $S \subseteq X$, verifichiamo che $f\left(\bigvee S\right) = \bigvee f^{\rightarrow}(S)$.

Infatti $f(s) \leq f\left(\bigvee S\right)$, $\forall s \in S$. Se $f(s) \leq a$, $\forall s \in S$, allora $s \leq f^{-1}(a)$, $\forall s \in S$, quindi $\bigvee S \leq f^{-1}(a)$ e pertanto $f\left(\bigvee S\right) \leq a$. Analogamente si verifica che f conserva $\bigwedge$.

L'implicazione "$(iii) \Rightarrow (ii)$" è analoga.

"$(ii) \Rightarrow (i)$" e "$(ii) \Rightarrow (iii)$" sono ovvie. □

COROLLARIO 3.3.9. *Se X, Y sono oggetti delle categorie considerate come richiesto nei vari casi, allora*

$$Is\big(\mathbf{CoFrm}(X,Y)\big) = Is\big(\mathbf{CLat}(X,Y)\big) = Is\big(\mathbf{Frm}(X,Y)\big)$$

$$Is\big(\bigwedge\text{-}\mathbf{CLat}(X,Y)\big) = Is\big(\mathbf{CLat}(X,Y)\big) = Is\big(\bigvee\text{-}\mathbf{CLat}(X,Y)\big).$$

DIMOSTRAZIONE. La precedente proposizione permette chiaramente di verificare che $Is\big(\mathbf{CLat}(X,Y)\big)$ contiene ciascuno degli altri insiemi elencati. □

ESEMPIO 3.3.10. Sia $f \in \mathbf{Top}((X,\tau),(X',\tau'))$. Dall'Esempio 3.3.2 (b) segue che $\tau, \tau' \in |\mathbf{Frm}|$ e risulta che l'operatore powerset inverso classico associato ad f ristretto a τ' e ridotto a τ, ovvero $f^{\leftarrow} : \tau' \to \tau$ è un morfismo da τ' in τ in $\mathbf{Frm}$; infatti se $\mathcal{A} \subseteq \tau'$ e $B, C \in \tau'$ allora risulta

$$f^{\leftarrow}\left(\bigvee \mathcal{A}\right) = f^{\leftarrow}\left(\bigcup \mathcal{A}\right) = \bigcup\{f^{\leftarrow}(A) | A \in \mathcal{A}\} = \bigvee (f^{\leftarrow})^{\rightarrow}(\mathcal{A})$$

e

$$f^{\leftarrow}(B \wedge C) = f^{\leftarrow}(B \cap C) = f^{\leftarrow}(B) \cap f^{\leftarrow}(C) = f^{\leftarrow}(B) \wedge f^{\leftarrow}(C).$$

OSSERVAZIONE 3.3.11. Dall'Esempio 3.3.10 segue che le corrispondenze

$$(X,\tau) \in |\mathbf{Top}| \quad \longmapsto \quad \leftarrow (X,\tau) = \tau$$

ed

$$f \in \mathbf{Top}\big((X,\tau),(T,\delta)\big) \quad \longmapsto \quad \leftarrow (f) = f^{\leftarrow} : \delta \to \tau$$

definiscono un funtore controvariante

$$\leftarrow : \mathbf{Top} \to \mathbf{Frm}.$$

Osserviamo che ogni frame è un'algebra di Heyting ed è un reticolo completo; tuttavia $\mathbf{Frm}$ non è sottocategoria né di $\mathbf{Heyt}$ né di $\mathbf{CLat}$, come mostrano i seguenti esempi.

ESEMPIO 3.3.12. Siano $(\mathbb{R}, \delta)$ ed $(\mathbb{R}, \tau)$ spazi topologici su $\mathbb{R}$, con δ la topologia discreta e τ la topologia naturale. Allora $\mathcal{A} = \big\{(-\epsilon, \epsilon) | \epsilon \in \mathbb{R}_+\big\} \subseteq$

τ e $i_{\mathbb{R}} \in \mathbf{Top}\big((\mathbb{R},\delta),(\mathbb{R},\tau)\big)$. Per l'Esempio 3.3.10 allora $i^{\leftarrow} \in \mathbf{Frm}(\tau,\delta)$. Ora

$$i^{\leftarrow}\left(\bigwedge_{\tau}\mathcal{A}\right) = \emptyset \neq \{0\} = \bigwedge_{\delta}\{i^{\leftarrow}(A)|A\in\mathcal{A}\}$$

ovvero $i^{\leftarrow}$ non è un morfismo di reticoli completi da τ in δ.

Dalla Proposizione 2.5.3 si deduce che per una arbitraria topologia σ su S pensata come frame, si ha

$$A \to_{\sigma} B = \bigcup\{X \in \sigma | A \cap X \subseteq B\},$$

quindi, in particolare,

$$A \to_{\delta} B = (S \setminus A)\bigcup B.$$

Ora presi $A = (-\infty, 0)$ e $B = (0, +\infty)$ risulta

$$A \to_{\tau} B = B \quad e \quad A \to_{\delta} B = [0, +\infty)$$

e risulta

$$i^{\leftarrow}(A \to_{\tau} B) = B \neq [0,+\infty) = i^{\leftarrow}(A) \to_{\delta} i^{\leftarrow}(B)$$

ovvero $i^{\leftarrow}$ non è un morfismo di algebre di Heyting da τ in δ.

Osservazione 3.3.13. Se $f \in \mathbf{Top}\big((X,\tau),(X',\tau')\big)$ è un omeomorfismo, allora $f^{\leftarrow}$ è un morfismo di reticoli completi e di algebre di Heyting, oltre che di frame.

Indichiamo con **Loc** la categoria opposta di **Frm**. Quando un'algebra di Heyting completa si pensa come oggetto della categoria **Loc** essa si dice anche **locale**. Da ciò segue che i termini locale, frame o algebra di Heyting completa denotano lo stesso tipo di struttura.

Osservazione 3.3.14. Le corrispondenze

$$(X,\tau) \in |\mathbf{Top}| \quad \longmapsto \quad \tau(X,\tau) = \tau$$

ed

$$f \in \mathbf{Top}\big((X,\tau),(T,\delta)\big) \quad \longmapsto \quad \tau(f)$$

tale che

$$\big(\tau(f)\big)^{op} = f^{\leftarrow} : \delta \to \tau$$

definiscono un funtore

$$\tau : \mathbf{Top} \to \mathbf{Loc}.$$

3.4. Reticoli Completamente Distributivi

DEFINIZIONE 3.4.1. *Un reticolo $(L, \leq)$ completo si dice* ***completamente distributivo*** *se sono verificate le seguenti condizioni* $\forall (J_i)_{i \in I}$, *con* $I, J_i \in |\mathbf{Set}|$, $\forall i \in I$,

$$(\mathbf{CDI}) \quad \bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J_i} a_{ij} = \bigvee_{f \in \prod J_i} \bigwedge_{i \in I} a_{if(i)}$$

$$(\mathbf{CDII}) \quad \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} a_{ij} = \bigwedge_{f \in \prod J_i} \bigvee_{i \in I} a_{if(i)}$$

dove per ogni $i \in I$ *e per ogni* $j \in J_i$, $a_{ij} \in L$ *ed* $f \in \prod J_i$ *significa che* $f : I \to \bigcup_{i \in I} J_i$ *tale che per ogni* $i \in I$, $f(i) \in J_i$.

LEMMA 3.4.2. *Se $(L, \leq)$ è un reticolo completo, allora sono equivalenti le seguenti proprietà*

(*i*) $(L, \leq)$ *verifica* $(\mathbf{CDI})$.
(*ii*) $(L, \leq)$ *verifica la seguente condizione,* $\forall I, J \in |\mathbf{Set}|$,

$$(\mathbf{CDI'}) \quad \bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} x_{ij} = \bigvee_{f \in J^I} \bigwedge_{i \in I} x_{if(i)}$$

dove $x_{ij} \in L$, $\forall i \in I$ *e* $j \in J$.

DIMOSTRAZIONE. "$(ii) \Rightarrow (i)$" $\forall (J_i)_{i \in I}$ e $\forall (x_{ij})_{i \in I, j \in J_i}$, con $x_{ij} \in L$, $\forall i \in I$ e $\forall j \in J_i$, poniamo $J = \bigcup_{i \in I} J_i$ e $x_{ij} = \perp$ se $j \in J \setminus J_i$.

Allora risulta

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J_i} x_{ij} = \bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} x_{ij}.$$

Inoltre, se $f \in J^I \setminus \prod_{i \in I} J_i$ allora esiste $\bar{i} \in I$ per cui $f(\bar{i}) \notin J_i$ e quindi $x_{\bar{i}f(\bar{i})} = \perp$ allora si ha $\bigwedge_{i \in I} x_{if(i)} = \perp$. Petanto, facendo il sup al variare di $f \in J^I$, gli unici contributi non nulli sono forniti dalle funzioni $f \in \prod_{i \in I} J_i$, quindi

$$\bigvee_{f \in J^I} \bigwedge_{i \in I} x_{if(i)} = \bigvee_{f \in \prod_{i \in I} J_i} \bigwedge_{i \in I} x_{if(i)}.$$

Quindi per la $(\mathbf{CDI'})$ risulta

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J_i} x_{ij} &= \bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} x_{ij} \\ &= \bigvee_{f \in J^I} \bigwedge_{i \in I} x_{if(i)} \\ &= \bigvee_{f \in \prod_{i \in I} J_i} \bigwedge_{i \in I} x_{if(i)}. \end{aligned}$$

"$(i) \Rightarrow (ii)$" E' ovvio perchè la condizione $(\mathbf{CDI'})$ si ottiene dalla $(\mathbf{CDI})$ come caso particolare, quando $J_i = J$, $\forall i \in I$. □

LEMMA 3.4.3. *Se* $(L, \leq)$ *è un reticolo completo, allora sono equivalenti le seguenti proprietà*

(*i*) $(L, \leq)$ *verifica* (**CDII**).
(*ii*) $(L, \leq)$ *verifica la seguente condizione,* $\forall I, J \in |\mathbf{Set}|$,

$$(\mathbf{CDII'}) \quad \bigvee_{i\in I}\bigwedge_{j\in J} x_{ij} = \bigwedge_{f\in J^I}\bigvee_{i\in I} x_{if(i)}$$

dove $x_{ij} \in L$, $\forall i \in I$ *e* $j \in J$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si ottiene dualizzando quella del Lemma 3.4.2. □

PROPOSIZIONE 3.4.4. *Se* $(L, \leq)$ *è un reticolo completo, allora sono equivalenti le seguenti proprietà*

(*i*) $(L, \leq)$ *verifica* (**CDI**).
(*ii*) $(L, \leq)$ *verifica* (**CDII**).

DIMOSTRAZIONE. "(*i*) $\Rightarrow$ (*ii*)" Per i lemmi 3.4.2 e 3.4.3 è sufficiente dimostrare che "(**CDI'**) $\Rightarrow$ (**CDII'**).

Sia quindi $(x_{ij})_{i\in I, j\in J}$ una qualsiasi famiglia di elementi di L. Osserviamo intanto che $\bigvee_{i\in I}\bigwedge_{j\in J} x_{ij} \leq \bigwedge_{f\in J^I}\bigvee_{i\in I} x_{if(i)}$. Infatti, $\bigwedge_{j\in J} x_{ij} \leq x_{if(i)}$, $\forall i \in I$, $\forall f \in J^I$, quindi $\bigvee_{i\in I}\bigwedge_{j\in J} x_{ij} \leq \bigvee_{i\in I} x_{if(i)}$, $\forall f \in J^I$.

Viceversa, $\forall i \in I$ ed $f \in J^I$ poniamo $y_{fi} = x_{if(i)}$, allora poiché per ipotesi L verifica (**CDI'**) si ha

$$\bigwedge_{f\in J^I}\bigvee_{i\in I} x_{if(i)} = \bigwedge_{f\in J^I}\bigvee_{i\in I} y_{fi} = \bigvee_{\psi\in I^{J^I}}\bigwedge_{f\in J^I} y_{f\psi(f)}.$$

Inoltre per ogni $\psi \in I^{J^I}$ esite $i \in I$ tale che $(x_{ij})_{j\in J}$ sia una sottofamiglia della famiglia $(y_{f\psi(f)})_{f\in J^I}$: infatti, $\forall i_0 \in I$, $j_0 \in J$, considerata una funzione $f_0 : I \to J$ tale che $f_0(i_0) = j_0$ e una funzione $\psi_0 : J^I \to I$ tale che $\psi_0(f_0) = i_0$ si ha

$$x_{i_0 j_0} = x_{i_0 f_0(i_0)} = y_{f_0 i_0} = y_{f_0\psi_0(f_0)}.$$

Pertanto si ha che per ogni $\psi \in I^{J^I}$ esiste $i \in I$ tale che si abbia $\bigwedge_{f\in J^I} y_{f\psi(f)} \leq \bigwedge_{j\in J} x_{ij}$. In definitiva si ottiene la disugualgianza

$$\bigvee_{\psi\in I^{J^I}}\bigwedge_{f\in J^I} y_{f\psi(f)} \leq \bigvee_{i\in I}\bigwedge_{j\in J} x_{ij}$$

che prova la tesi.

"(*ii*) $\Rightarrow$ (*i*)" Si dimostra per dualità. □

ESEMPIO 3.4.5. (a) $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ è un reticolo completo e completamente distributivo.

(b) $([0,1], \leq)$ è un reticolo completo completamente distributivo.

(c) Su una circonferenza considerati due punti o ed m, si orientino da o ad m le semicirconferenze che insistono sul diametro om, indicate rispettivamente con K ed H; sia inoltre mp un segmento orientato da m verso p giacente sul prolungamento del diametro om dalla parte di m, denotato con N. Sia $L = H \cup K \cup N$. Su L si definisca la relazione d'ordine:

$$a \leq b \iff a \text{ precede } b \text{ in } K, H \text{ o } N, \text{ oppure } a \in K \cup H \text{ e } b \in N.$$

Se a, b sono due elementi non confrontabili allora si ha

$$a \vee b = m \ \text{ e } \ a \wedge b = o.$$

La coppia $(L, \leq)$ è un reticolo, con minimo o e massimo p. Si vede facilmente che L è un reticolo completo, in quanto ogni sottoinsieme di L ha sup e inf, ma L non è un reticolo distributivo, in quanto, se prendiamo $a, b \in K$, con $a \leq b$, $a \neq b$, non confrontabili con $c \in H$, si ha

$$a \vee (b \wedge c) = a \vee o = a$$

mentre

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = b \wedge m = b$$

e quindi $(L, \leq)$ non è un reticolo completamente distributivo.

(d) Dall'Esempio 3.3.3 segue che se τ è la topologia cofinita su $\mathbb{N}$, poiché essa non verifica la (**IILD**∞), allora essa non può soddisfare neanche la completa distributività.

DEFINIZIONE 3.4.6. *Se $(L, \leq)$ è un reticolo ed $x, y \in L$ allora si dice che y **copre** x se $x \leq y$, $x \neq y$ e non esiste $z \in L$ tale che $x \leq z \leq y$, con $x \neq z \neq y$.*

PROPOSIZIONE 3.4.7. *Ogni catena completa è completamente distributiva.*

DIMOSTRAZIONE. Se $(L, \leq)$ è una catena completa, per il Lemma 3.4.2 basta che verifichiamo la condizione (**CDI**$'$).

Sia $(x_{ij})_{i \in I, j \in J}$ una famiglia di elementi di L e sia $\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} x_{ij} = y$, allora resta da provare che $y = \bigvee_{f \in J^I} \bigwedge_{i \in I} x_{if(i)}$.

y è un maggiorante per $\{\bigwedge_{i \in I} x_{if(i)} | f \in J^I\}$ in quanto, per come è stato definito y risulta $\bigwedge_{i \in I} x_{if(i)} \leq \bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} x_{ij} = y$, $\forall f \in J^I$.

Consideriamo, ora, un altro maggiorante, u, cioè sia $\bigwedge_{i \in I} x_{if(i)} \leq u$, $\forall f \in J^I$.

Se fosse $u \leq y$, $u \neq y$, allora sarebbe $u \leq \bigvee_{j \in J} x_{ij}$ e $u \neq \bigvee_{j \in J} x_{ij}$, $\forall i \in I$, quindi, $\forall i \in I$ esisterebbe un elemento x_{ij_i}, con $j_i \in J$, tale che $u \leq x_{ij_i}$, $u \neq x_{ij_i}$. Associando ad ogni $i \in I$ un tale indice, j_i, si otterrebbe una funzione

$$f_u : I \to J, \quad i \longmapsto f_u(i) = j_i$$

tale che $u \leq x_{if_u(i)}$, $u \neq x_{if_u(i)}$, $\forall i \in I$. Si avrebbe allora

$$u \leq \bigwedge_{i \in I} x_{if_u(i)} \leq u,$$

cioè $u = \bigwedge_{i \in I} x_{if_u(i)}$.

Inoltre si verificherebbe che y copre u. Infatti considerato un elemento $u' \in L$ tale che $u \leq u' \leq y$ con $u' \neq y$, allora per i medesimi argomenti usati per u esisterebbe $f_{u'} \in J^I$ tale che $u' = \bigwedge_{i \in I} x_{if_{u'}(i)}$.

Inoltre, poiché $\bigwedge_{i \in I} x_{if(i)} \leq u$, $\forall f \in J^I$, seguirebbe che $u' \leq u$, ovvero $u' = u$. Ora da $u \leq x_{if_u(i)}$, $u \neq x_{if_u(i)}$, $\forall i \in I$, poiché y copre u si avrebbe $y \leq x_{if_u(i)}$, $\forall i \in I$.

In definitiva si otterrebbe $y \leq \bigwedge_{i \in I} x_{if_u(i)} = u \leq y$ e questo è assurdo avendo supposto $u \neq y$.

□

Indichiamo con **CDLat** la sottocategoria piena di **CLat** i cui oggetti sono i reticoli completi e completamente distributivi.

PROPOSIZIONE 3.4.8. *Se $(L, \leq)$ è un reticolo completamente distributivo, allora ogni sottoreticolo completo di $(L, \leq)$ è completamente distributivo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $(S, \leq)$ un sottoreticolo completo di L; poiché per ogni $F \subseteq S$ esiste $\sup_S F = \sup_L F \in S$ ed esiste $\inf_S F = \inf_L F \in S$, segue che $(S, \leq)$ è completamente distributivo. □

Data una famiglia di insiemi ordinati $(L_i, \leq)_{i \in I}$ e considerato il prodotto

$$\prod_{i \in I} L_i = \left\{ s : I \to \bigcup L_i | s(i) \in L_i \right\},$$

si può definire una relazione d'ordine su $\prod_{i \in I} L_i$ ponendo, $\forall s, t \in \prod_i L_i$

$$s \leq t \;\Leftrightarrow\; s(i) \leq t(i),\; \forall i \in I.$$

L'eventuale esistenza di strutture reticolari di un qualche tipo su ciascun L_i comporta che la relazione d'ordine su definita induca un'analoga struttura di reticolo sul prodotto. In particolare formuliamo esplicitamente il seguente risultato

PROPOSIZIONE 3.4.9. *Se ogni L_i è un reticolo completo e completamente distributivo, allora anche il prodotto $\left(\prod_{i \in I} L_i, \leq \right)$ è un reticolo completo completamente distributivo.*

DIMOSTRAZIONE. $\forall S \subseteq \prod_{i \in I} L_i$ si ha

$$\left(\bigvee S \right)(i) = \bigvee \{s(i) | s \in S\} \;\text{ e }\; \left(\bigwedge S \right)(i) = \bigwedge \{s(i) | s \in S\},\; \forall i \in I.$$

Se poi $\mathcal{S} = ((s_{\alpha\beta})_{\beta\in B_\alpha})_{\alpha\in A}$ è una famiglia di famiglie di elementi del prodotto, allora dalla completa distributività in ogni L_i segue che $\forall i \in I$

$$\begin{aligned}\left(\bigvee_{\alpha\in A}\bigwedge_{\beta\in B_\alpha} s_{\alpha\beta}\right)(i) &= \bigvee_{\alpha\in A}\bigwedge_{\beta\in B_\alpha} s_{\alpha\beta}(i)\\ &= \bigwedge_{\omega\in\prod_{\alpha\in A} B_\alpha}\bigvee_{\alpha\in A} s_{\alpha\omega(\alpha)}(i)\\ &= \left(\bigwedge_{\omega\in\prod_{\alpha\in A} B_\alpha}\bigvee_{\alpha\in A} s_{\alpha\omega(\alpha)}\right)(i).\end{aligned}$$

□