CAPITOLO 1

Categorie e Funtori

1.1. Categorie

DEFINIZIONE 1.1.1. *Una* ***categoria,*** $\mathbf{C}$, *è definita dai seguenti dati:*

- *Una classe* $Ob(\mathbf{C})$ *(o* $|\mathbf{C}|$*), i cui elementi sono detti oggetti della categoria* $\mathbf{C}$ *e sono, di solito, indicati con le lettere maiuscole dell'alfabeto,* $A, B, C, \dots \in |\mathbf{C}|$.
- *Una classe* $\mathcal{M}or(\mathbf{C})$*, i cui elementi sono detti morfismi ed una funzione*

  $$\mathbf{C} : |\mathbf{C}| \times |\mathbf{C}| \to \mathcal{P}\big(\mathcal{M}or(\mathbf{C})\big)$$

  che associa ad ogni coppia di oggetti (A, B)*, un insieme* $\mathbf{C}(A, B)$ *contenuto nella classe dei morfismi, i cui elementi sono detti morfismi dall'oggetto* A *(detto dominio) nell'oggetto* B *(detto codominio) e si indicano con*

  $$f : A \to B \quad \textit{oppure} \quad A \xrightarrow{f} B.$$

  Si richiede, inoltre, che

  $$\{\mathbf{C}(A, B) | A, B \in |\mathbf{C}|,\ \mathbf{C}(A, B) \neq \emptyset\}$$

  sia una partizione di $\mathcal{M}or(\mathbf{C})$. $\mathbf{C}(A, B)$ *è anche, a volte, denotato con* $\mathcal{M}or_{\mathbf{C}}(A, B)$.
- *Una legge di composizione parziale*

  $$\circ : \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \times \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{C})$$

  che soddisfa le seguenti condizioni: se $f \in \mathbf{C}(A, B)$, $g \in \mathbf{C}(B, C)$, *esiste*

  $$\circ(f, g) = g \circ f \in \mathbf{C}(A, C).$$

  Inoltre "$\circ$*" è associativa, ovvero se* $f \in \mathbf{C}(A, B)$, $g \in \mathbf{C}(B, C)$, $h \in \mathbf{C}(C, D)$, *allora*

  $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$
- *Per ogni* $A \in |\mathbf{C}|$, *esiste*

  $$1_A \in \mathbf{C}(A, A)$$

detto morfismo identico (o identità) di A, tale che $\forall f \in \mathbf{C}(A, B)$ e $\forall g \in \mathbf{C}(C, A)$ risulta

$$f \circ 1_A = f \text{ ed } 1_A \circ g = g.$$

OSSERVAZIONE 1.1.2. Sia $\mathbf{C}$ una categoria. $\forall A \in |\mathbf{C}|$, $\exists | 1_A \in \mathbf{C}(A, A)$, morfismo identico di A. Infatti, se $i_A \in \mathbf{C}(A, A)$ è un altro morfismo identico di A, per le proprietà dei morfismi identici si ha

$$i_A = i_A \circ 1_A = 1_A.$$

ESEMPIO 1.1.3. (a) **Set** è la categoria degli insiemi, i cui oggetti sono gli insiemi ed i cui morfismi sono le funzioni fra insiemi che si compongono secondo la usuale composizione di funzioni. Le identità sono le funzioni identiche.

Indichiamo con **FSet** la categoria avente per oggetti gli insiemi finiti e per morfismi le funzioni fra di essi. Composizione ed identità, in questo come negli esempi dei successivi punti (b)-(i) ed (m), sono le stesse che in **Set**.

(b) **SGrp** è la categoria dei semigruppi, in cui gli oggetti sono i semigruppi ed i morfismi sono gli omomorfismi tra semigruppi.

(c) **Mon** è la categoria dei monoidi, in cui gli oggetti sono i monoidi ed i morfismi sono gli omomorfismi tra monoidi.

(d) **Grp** è la categoria dei gruppi in cui gli oggetti sono i gruppi ed i morfismi sono gli omomorfismi tra gruppi.

(e) **Rng** è la categoria degli anelli in cui gli oggetti sono gli anelli ed i morfismi sono gli omomorfismi tra anelli, cioè le funzioni che conservano la somma e il prodotto.

(f) **Field** è la categoria avente per oggetti i campi e per morfismi gli omomorfismi di campi, ovvero le funzioni che conservano le due leggi di composizione.

(g) **Vec** è la categoria degli spazi vettoriali i cui oggetti sono gli spazi vettoriali su un qualsiasi campo ed i cui morfismi sono le applicazioni lineari (si noti il punto 3. dell'Osservazione 1.1.4).

(h) **Top** è la categoria degli spazi topologici in cui gli oggetti sono gli spazi topologici ed i morfismi fra gli oggetti (S, σ), (T, τ) sono le applicazioni

$$f : S \to T$$

che soddisfano la seguente condizione

$$f^{\leftarrow}(A) = \{x \in S | f(x) \in A\} \in \sigma, \ \forall A \in \tau,$$

ovvero sono le applicazioni continue da (S, σ) in (T, τ).

(i) **pTop** è la categoria avente per oggetti gli spazi topologici puntati, ovvero le coppie formate da uno spazio topologico e da un punto fissato nel sostegno dello spazio; i morfismi sono le funzioni continue che portano il punto fissato nel primo oggetto nel punto fissato nel secondo.

(l) **hTop** è la categoria avente per oggetti gli spazi topologici e per morfismi le classi di omotopia di funzioni continue.

(m) Altri esempi di categorie si ottengono considerando **Set** e selezionando la classe dei morfismi; si indicano ad esempio con:

- $<<$ **Set** la categoria avente per oggetti tutti gli insiemi e per morfismi solo le funzioni iniettive.
- $>>$ **Set** la categoria avente per oggetti tutti gli insiemi e per morfismi solo le funzioni suriettive.
- $=$ **Set** la categoria avente per oggetti tutti gli insiemi e per morfismi solo le funzioni bigettive.

(n) $\mathbf{0}$ è la categoria vuota, in cui $|\mathbf{0}| = \emptyset$ e $\mathcal{M}or(\mathbf{0}) = \emptyset$.

$\mathbf{1}$ è la categoria avente un solo oggetto, $|\mathbf{1}| = \{A\}$, ed un solo morfismo, $\mathcal{M}or(\mathbf{1}) = \{1_A\}$.

$\mathbf{2}$ è la categoria avente due soli oggetti, $|\mathbf{2}| = \{A, B\}$ e due soli morfismi, $\mathcal{M}or(\mathbf{2}) = \{1_A, 1_B\}$ e così via$\cdots$

Tali categorie sono dette *categorie discrete*.

(o) Ogni classe X può essere rivista come categoria, che indichiamo con $\mathbf{X}$ in cui

$$|\mathbf{X}| = X,\ \mathbf{X}(x, y) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } x \neq y \\ \{x\} & \text{se } x = y \end{cases},\ 1_x = x \ \text{ ed } \ x \circ x = x,$$

ovvero, in esse i soli morfismi sono le identità. Se X è un insieme finito, tale categoria rientra nell'esempio precedente.

(p) Se $(M, \bullet)$ è un monoide, con e elemento neutro, $(M, \bullet)$ è una categoria $\mathbf{M}$ con un solo oggetto

$$|\mathbf{M}| = \{M\},\ \mathbf{M}(M, M) = M,\ 1_M = e \ \text{ ed } \ y \circ x = y \bullet x.$$

(q) $\mathbf{Mat}_K$ è la categoria avente per oggetti tutti i numeri naturali e per morfismi fra gli oggetti m ed n, l'insieme di tutte le matrici $m \times n$ in un fissato campo K, le identità $1_n : n \to n$, $n \in \mathbb{N}$, sono le matrici diagonali unitarie $n \times n$ e la composizione "$\circ$" è il prodotto righe per colonne. Si noti che, a differenza dell'Esempio (g), non si può considerare K arbitrario, altrimenti $\mathbf{Mat}_K(m, n)$ non sarebbe un insieme.

(r) **Rel** è la categoria avente per oggetti gli insiemi e per morfismi le relazioni binarie fra insiemi. In **Rel**, per ogni $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$ ed $\mathcal{S} \subseteq Y \times Z$, con $X, Y, Z \in |\mathbf{Rel}|$, la composizione fra morfismi è l'usuale composizione fra relazioni $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \subseteq X \times Z$, definita da

$$(x, z) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \ \Leftrightarrow \ \exists y \in Y : x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{S}z$$

che è una legge di composizione associativa; il morfismo identità di ogni oggetto, cioè di ogni insieme, è la relazione di uguaglianza nell'insieme stesso.

(s) Un insieme pre-ordinato, $(X, \leq)$, è una categoria, indicata con $\mathbf{X}$, in cui la classe degli oggetti è X stesso ed in cui l'insieme dei morfismi da un oggetto $x \in X$ ad un oggetto $y \in X$ è

$$\mathbf{X}(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\} & \text{se } x \leq y \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad 1_x = (x,x) \;\text{ e }\; (y,z) \circ (x,y) = (x,z).$$

OSSERVAZIONE 1.1.4. 1. Se $\mathbf{C}$ è una categoria, $\forall A \in |\mathbf{C}|$, l'insieme di tutti i morfismi da A in se stesso, $\mathbf{C}(A,A)$, con la legge di composizione "$\circ$" è una struttura algebrica; precisamente $\big(\mathbf{C}(A,A), \circ\big)$ è un monoide.

2. Per le categorie (b)-(i) ed (m) dell'Esempio 1.1.3, i morfismi fra due oggetti nella categoria costituiscono un sottoinsieme dell'insieme dei morfismi fra i sostegni delle due strutture nella categoria **Set**. Inoltre, la composizione in tali categorie è data dalla composizione in **Set**, ed i morfismi identità sono le identità in **Set**.

3. Se $(V, +, \cdot)$ e $(W, +', \cdot')$ sono due spazi vettoriali su campi diversi, allora

$$\mathbf{Vec}\big((V,+,\cdot),(W,+',\cdot')\big) = \emptyset$$

e ciò accade anche se i sostegni dei due spazi coincidono, cioè $V = W$. **Vec**, pertanto, fornisce un esempio di categoria in cui l'insieme dei morfismi fra due oggetti fissati può essere vuoto. Altri esempi di questo tipo sono (n), (o) ed (s).

DEFINIZIONE 1.1.5. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria.*

$\mathbf{C}$ *si dice* ***piccola*** *se la classe degli oggetti di* $\mathbf{C}$ *è un insieme.*

$\mathbf{C}$ *si dice* ***connessa*** *se* $\mathbf{C}(A,B) \neq \emptyset$, $\forall A, B \in |\mathbf{C}|$.

$\mathbf{C}$ *si dice* ***discreta*** *se gli unici morfismi sono i morfismi identici.*

$\mathbf{C}$ *si dice* ***monoide*** *se ha un solo oggetto, ovvero* $|\mathbf{C}| = \{A\}$.

OSSERVAZIONE 1.1.6. 1. In particolare, una categoria discreta si può identificare con la sua classe degli oggetti (si veda l'Esempio 1.1.3 (o)); se una categoria è discreta e piccola, allora essa può essere identificata con l'insieme che costituisce la sua classe degli oggetti.

2. Il termine categoria monoide trova giustificazione nel fatto che una tale categoria, $\mathbf{C}$, si può identificare col monoide dei morfismi dell'unico oggetto A in se stesso $\big(\mathbf{C}(A,A), \bullet\big)$ (si veda l'Esempio 1.1.3 (p) e l'Osservazione 1.1.4).

3. Affinchè un insieme munito di una relazione $(X, \leq)$ sia una categoria, nel senso dell'Esempio 1.1.3 (s), è necessario e sufficiente che la relazione sia di pre-ordine; infatti la transitività della relazione equivale all'esistenza della composizione dei morfismi, mentre la riflessività equivale all'esistenza delle identità.

La seguente definizione descrive formalmente tale situazione.

Definizione 1.1.7. *Una categoria* $\mathbf{C}$ *è detta* ***quasi ordinata*** *o* ***pre-ordinata*** *se verifica la seguente proprietà:*

$$|\mathbf{C}(X,Y)| \leq 1, \ \forall X, Y \in |\mathbf{C}|.$$

In tal caso, nella classe degli oggetti di $\mathbf{C}$, $|\mathbf{C}|$, resta definita la seguente relazione $\leq$:

$$X \leq Y \Leftrightarrow \mathbf{C}(X,Y) \neq \emptyset, \ \forall X, Y \in |\mathbf{C}|.$$

Dall'esistenza della composizione fra morfismi in $\mathbf{C}$, segue che $\leq$ è una relazione transitiva; inoltre, poiché per ogni $X \in |\mathbf{C}|$ esiste il morfismo identico su X, 1_X, allora la relazione $\leq$ è riflessiva. Quindi $\leq$ è una relazione di pre-ordine e la classe degli oggetti di $\mathbf{C}$ con tale relazione è pre-ordinata.

Affinchè questa relazione definita su $|\mathbf{C}|$ sia una relazione d'ordine, occorre e basta che $\mathbf{C}$ verifichi una condizione un pò più forte della precedente, cioè:

$$|\mathbf{C}(X,Y) \cup \mathbf{C}(Y,X)| \leq 1, \ \forall X, Y \in |\mathbf{C}|.$$

In tal caso la categoria si dice ***ordinata***. Se nella disuguaglianza precedente si verifica, in particolare, l'uguaglianza, per ogni $X, Y \in |\mathbf{C}|$, allora $\leq$ è una relazione d'ordine totale. Se $\mathbf{C}$ è una categoria ordinata, la classe degli oggetti di $\mathbf{C}$ è ordinata e si indica con $(|\mathbf{C}|, \leq)$.

Definizione 1.1.8. *Una categoria* $\mathbf{C}$ *si dice* ***concreta*** *se ogni oggetto* A *di* $\mathbf{C}$ *individua univocamente un insieme* $u(A)$ *ed ogni morfismo* $f \in \mathbf{C}(A,B)$ *individua univocamente una funzione*

$$u(f) : u(A) \to u(B)$$

dall'insieme corrispondente ad A *nell'insieme corrispondente a* B*, in modo tale che* $\forall f \in \mathbf{C}(A,B)$, $\forall g \in \mathbf{C}(B,C)$*, si abbia*

$$u(g \circ f) = u(g) \circ u(f)$$

e $\forall A \in |\mathbf{C}|$ *risulti*

$$u(1_A) = 1_{u(A)} : u(A) \to u(A).$$

Spesso il morfismo f e la funzione $u(f)$ si indicano con lo stesso simbolo.

La maggior parte delle categorie analizzate nell'Esempio 1.1.3 sono categorie concrete. Ad esempio, la categoria dei gruppi, **Grp**, è una categoria concreta: infatti ad ogni gruppo $(G,*)$ si può associare il sostegno G ed ogni omomorfismo di gruppi è un'applicazione tra i sostegni dei gruppi considerati.

Definizione 1.1.9. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria.*

Una sottocategoria $\mathbf{D}$ *di* $\mathbf{C}$*, indicata con* $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{C}$*, è una categoria in cui:*

$$|\mathbf{D}| \subseteq |\mathbf{C}| \quad e \quad \mathbf{D}(A,B) \subseteq \mathbf{C}(A,B), \quad \forall A, B \in |\mathbf{D}|$$

la composizione è la restrizione a $\mathcal{M}or(\mathbf{D})$ *della composizione in* $\mathcal{M}or(\mathbf{C})$ *ed i morfismi identici in* $\mathbf{D}$ *sono i morfismi identici in* $\mathbf{C}$.

D *è una* ***sottocategoria piena*** *di* **C** *se*

$$\mathbf{D}(A,B) = \mathbf{C}(A,B), \quad \forall A,B \in |\mathbf{D}|.$$

OSSERVAZIONE 1.1.10. Se **D** è una sottocategoria (piena) di **C** ed **E** è una sottocategoria (piena) di **D**, allora evidentemente **E** è una sottocategoria (piena) di **C**.

ESEMPIO 1.1.11. Alcuni esempi di sottocategoria sono:

(a) **FSet** $\subseteq$ **Set**, ed è piena.

(b) **Mon** $\subseteq$ **SGrp**: infatti, ogni monoide è un semigruppo ed ogni omomorfismo di monoidi è un omomorfismo di semigruppi che porta l'elemento neutro della prima struttura nell'elemento neutro della seconda. **Mon**, però, non è una sottocategoria piena di **SGrp**, infatti si ha che un'applicazione fra i sostegni di due monoidi che sia un omomorfismo di semigruppi è un omomorfismo di monoidi solo se verifica l'ulteriore condizione relativa all'elemento neutro, non automaticamente realizzata.

(c) **Grp** $\subseteq$ **Mon** ed è piena.

(d) **Grp** $\subseteq$ **SGrp** ed è piena.

OSSERVAZIONE 1.1.12. Se $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{D} \subseteq \mathbf{C}$ ed **E** è piena sia in **C** che in **D** ciò non implica che **D** sia piena in **C**, come mostra facilmente l'esempio in cui $\mathbf{C} = \mathbf{SGrp}$, $\mathbf{D} = \mathbf{Mon}$ ed $\mathbf{E} = \mathbf{Grp}$.

DEFINIZIONE 1.1.13. *Sia* **C** *una categoria. Se esiste una relazione d'equivalenza* $\sim$ *in* $\mathcal{M}or(\mathbf{C})$ *tale che*

$$\begin{gathered} f \in \mathbf{C}(A,B) \quad g \in \mathbf{C}(B,C) \ e \ f \sim f', \ g \sim g' \\ \Downarrow \\ f' \in \mathbf{C}(A,B) \quad g' \in \mathbf{C}(B,C) \ e \ g \circ f \sim g' \circ f' \end{gathered}$$

allora si definisce ***categoria quoziente*** *di* **C** *relativamente alla relazione* $\sim$*, denotata con* $\mathbf{C}/\sim$*, la categoria avente per oggetti i medesimi oggetti di* **C** *e per morfismi le classi di equivalenza dei morfismi di* **C**.

ESEMPIO 1.1.14. **hTop** è la categoria quoziente di **Top** relativamente alla relazione di omotopia definita da:

$$f,g : S \to T \text{ continue}, \ f \sim g \ \Leftrightarrow \ \exists H : S \times I \to T \text{ continua t.c.}$$
$$H(s,0) = f(s), \ H(s,1) = g(s), \quad \forall s \in S.$$

DEFINIZIONE 1.1.15. *Siano* $\mathbf{C}_1$ *e* $\mathbf{C}_2$ *due categorie. Si definisce* ***categoria prodotto*** *di* $\mathbf{C}_1$ *per* $\mathbf{C}_2$*, indicata con* $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$*, la categoria avente come classe degli oggetti il prodotto cartesiano delle classi degli oggetti di* $\mathbf{C}_1$ *e* $\mathbf{C}_2$*,*

$$|\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2| = |\mathbf{C}_1| \times |\mathbf{C}_2|$$

e come morfismi fra gli oggetti (A,X)*,* (B,Y)*, le coppie* (f,g)*, tali che* $f \in \mathbf{C}_1(A,B)$ *e* $g \in \mathbf{C}_2(X,Y)$*.*

Se $(f,h) \in \mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2\big((A,X),(B,Y)\big)$ *e* $(g,k) \in \mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2\big((B,Y),(C,Z)\big)$, *allora la composizione in* $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ *è data da*

$$(g,k) \circ (f,h) = (g \circ f, k \circ h).$$

L' associatività della composizione delle singole componenti garantisce l'associatività della composizione tra le coppie.

Il morfismo identico di un oggetto (A,X) *è la coppia dei singoli morfismi identici di* A *in* $\mathbf{C}_1$ *e di* X *in* $\mathbf{C}_2$*, cioè*

$$1_{(A,X)} = (1_A, 1_X).$$

1.2. Proprietà dei Morfismi

DEFINIZIONE 1.2.1. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria e siano* $A, B \in |\mathbf{C}|$ *ed* $f \in \mathbf{C}(A,B)$. *Si dice che:*

(a) f *è una* ***sezione*** *se è invertibile a sinistra, cioè*

$$\exists f' \in \mathbf{C}(B,A) \text{ tale che } f' \circ f = 1_A.$$

(b) f *è una* ***retrazione*** *se è invertibile a destra, cioè*

$$\exists f'' \in \mathbf{C}(B,A) \text{ tale che } f \circ f'' = 1_B.$$

(c) f *è un* ***isomorfismo*** *se è invertibile a sinistra e a destra.*

OSSERVAZIONE 1.2.2. 1. Dall'associatività della composizione di morfismi segue subito che se f è un isomorfismo allora ogni inversa a destra coincide con ogni inversa a sinistra. Infatti, se $f \in \mathbf{C}(A,B)$ ed

$$f' \in \mathbf{C}(B,A) \text{ è tale che } f' \circ f = 1_A$$

ed

$$f'' \in \mathbf{C}(B,A) \text{ è tale che } f \circ f'' = 1_B,$$

allora

$$f' = f' \circ (f \circ f'') = (f' \circ f) \circ f'' = f''.$$

Quindi c'è un'unica inversa a destra che coincide con l'unica inversa a sinistra.

In tal caso il morfismo $f' = f'' : B \to A$ si indica con f^{-1} ed è detto l'inverso di f.

Segue facilmente che se f è invertibile, allora f^{-1} è invertibile ed

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

2. In una categoria concreta si ha evidentemente:

f sezione $\Rightarrow f$ iniettiva.
f retrazione $\Rightarrow f$ suriettiva.
f isomorfismo $\Rightarrow f$ bigettiva.

Le implicazioni inverse sono vere in alcune categorie, come **Set** e **Vec**, e sono false in altre, come **Top**; infatti, se X è un insieme, $|X| \geq 2$, δ la topologia discreta e ϑ la topologia caotica su X, $i_X : (X, \delta) \to (X, \vartheta)$ è continua, quindi è un morfismo in **Top**, ma la sua unica possibile inversa (a sinistra e a destra) $i_X : (X, \vartheta) \to (X, \delta)$ non è un morfismo in **Top**.

DEFINIZIONE 1.2.3. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria e siano* $A, B \in |\mathbf{C}|$ *ed* $f \in \mathbf{C}(A, B)$. *Si dice che:*

(a) f *è un* ***monomorfismo*** *se è cancellabile (semplificabile) a sinistra, ovvero se* $\forall g, g' \in \mathbf{C}(A', A)$,

$$f \circ g = f \circ g' \ \Rightarrow \ g = g'.$$

(b) f *è un* ***epimorfismo*** *se è cancellabile (semplificabile) a destra, ovvero se* $\forall h, h' \in \mathbf{C}(B, B')$,

$$h \circ f = h' \circ f \ \Rightarrow \ h = h'.$$

(c) f *è un* ***bimorfismo*** *se è cancellabile (semplificabile) sia a destra che a sinistra.*

PROPOSIZIONE 1.2.4. *In ogni categoria* $\mathbf{C}$, $\forall f \in \mathbf{C}(A, B)$, *si hanno le seguenti implicazioni:*

(1) f *sezione* $\Rightarrow f$ *monomorfismo.*
(2) f *retrazione* $\Rightarrow f$ *epimorfismo.*
(3) f *isomorfismo* $\Rightarrow f$ *bimorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Sia f una sezione. Se $g, g' \in \mathbf{C}(A', A)$ sono tali che $f \circ g = f \circ g'$ e se $f' \in \mathbf{C}(B, A)$ è inversa a sinistra di f, allora $f' \circ f \circ g = f' \circ f \circ g' \Rightarrow 1_A \circ g = 1_A \circ g' \Rightarrow g = g'$, ovvero f è un monomorfismo.
Le verifiche di (2) e (3) sono analoghe. □

OSSERVAZIONE 1.2.5. In una categoria concreta, $\forall f \in \mathbf{C}(A, B)$, si hanno le seguenti implicazioni:

f iniettiva $\Rightarrow f$ monomorfismo.
f suriettiva $\Rightarrow f$ epimorfismo.
f bigettiva $\Rightarrow f$ bimorfismo.

DEFINIZIONE 1.2.6. *Una categoria* $\mathbf{C}$ *si dice* ***bilanciata*** *se per ogni* $f \in \mathcal{M}or(\mathbf{C})$, *si ha*

$$f \textit{ isomorfismo} \Leftrightarrow f \textit{ bimorfismo}.$$

ESEMPIO 1.2.7. (a) **Set** e **Vec** sono categorie bilanciate; infatti, nella teoria degli insiemi e nella teoria degli spazi vettoriali si dimostra che, per ogni morfismo f:

f è invertibile a sinistra $\Leftrightarrow f$ è iniettivo $\Leftrightarrow f$ è semplificabile a sinistra.

f è invertibile a destra $\Leftrightarrow f$ è suriettivo $\Leftrightarrow f$ è semplificabile a destra.

f è invertibile $\Leftrightarrow f$ è bigettivo $\Leftrightarrow f$ è semplificabile a sinistra e a destra.

(b) **Top** non è bilanciata; infatti, se (X, τ) e (X, τ') sono due spazi topologici e $\tau \subset \tau'$, l'applicazione identica di X, $i_X : X \to X$, è un'applicazione continua da (X, τ') in (X, τ). Inoltre, i_X è bigettiva ed essendo **Top** una categoria concreta, quindi i_X è un bimorfismo. Ma la funzione i_X ammette un'unica inversa a sinistra

$$i_X : (X, \tau) \to (X, \tau')$$

che però non è un'applicazione continua, ovvero i_X non è invertibile a sinistra in **Top** e quindi **Top** non è una categoria bilanciata.

C'è da osservare che in **Top** le implicazioni dell'Osservazione 1.2.5 sono invertibili, quelle dell'Osservazione 1.2.2 (2.) evidentemente no.

(c) **HComp**, sottocategoria piena di **Top** degli spazi topologici compatti di Hausdorff è una categoria bilanciata; la verifica non è banale e segue dal fatto che uno spazio compatto di Hausdorff è compatto massimale ed è di Hausdorff minimale.

(d) **SGrp**, **Mon** e **Rng** non sono categorie bilanciate, infatti, l'inclusione $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ è un bimorfismo in **Mon**, **SGrp** e **Rng**, ma non è un isomorfismo. Questo esempio mostra anche che almeno la seconda, quindi la terza delle implicazioni dell'Osservazione 1.2.5 non sono invertibili.

PROPOSIZIONE 1.2.8. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria.*
Se $f \in \mathbf{C}(A, B)$ *e* $g \in \mathbf{C}(B, C)$ *allora*

(1) f, g *sezioni* (*retrazioni, isomorfismi, rispettivamente*) $\Rightarrow$ $g \circ f$ *sezione* (*retrazione, isomorfismo, rispettivamente*).
(2) f, g *monomorfismi* (*epimorfismi, bimorfismi, rispettivamente*) $\Rightarrow$ $g \circ f$ *monomorfismo* (*epimorfismo, bimorfismo, rispettivamente*).
(3) $g \circ f$ *monomorfismo* (*sezione, rispettivamente*) $\Rightarrow$ f *monomorfismo* (*sezione, rispettivamente*).
(4) $g \circ f$ *epimorfismo* (*retrazione, rispettivamente*) $\Rightarrow$ g *epimorfismo* (*retrazione, rispettivamente*).

DIMOSTRAZIONE. (1) Se f e g sono sezioni, allora siano $h : B \to A$ e $k : C \to B$ tali che $h \circ f = 1_A$ e $k \circ g = 1_B$; considerata $h \circ k : C \to A$ si ha che $(h \circ k) \circ (g \circ f) = h \circ (k \circ g) \circ f = h \circ f = 1_A$, ovvero $g \circ f$ è una sezione.

Analogamente si procede per retrazioni ed isomorfismi.

(2) Se f e g sono monomorfismi, siano $h, k : D \to A$, con $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k$; sfruttando le ipotesi e l'associatività si ha $g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k)$, da cui $f \circ h = f \circ k$ e quindi $h = k$.

Si procede allo stesso modo per epimorfismi e bimorfismi.

(3) Sia $g \circ f$ un monomorfismo; se $h, k : D \to A$ sono tali che $f \circ h = f \circ k$, allora componendo a sinistra per g si ha $g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k)$ e per l'associatività $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k$ da cui dall'ipotesi discende che $h = k$.

Se $g \circ f$ è una sezione, sia $h : C \to A$ la sua inversa a sinistra, allora $h \circ (g \circ f) = 1_A$; per l'associatività risulta quindi $(h \circ g) \circ f = 1_A$, ovvero f è invertibile a sinistra ed ha inversa a sinistra $h \circ g$.

(4) La dimostrazione è analoga a quella della parte (3). □

PROPOSIZIONE 1.2.9. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria. Se* $f \in \mathbf{C}(A, B)$ *allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(*i*) f *è un epimorfismo e una sezione.*
(*ii*) f *è un isomorfismo.*
(*iii*) f *è un monomorfismo ed una retrazione.*

DIMOSTRAZIONE. "$(i) \Rightarrow (ii)$" Affinchè f sia un isomorfismo, occorre verificare che f è una retrazione, ovvero è invertibile a destra. Poiché per ipotesi f è invertibile a sinistra, esite $g : B \to A$ tale che $g \circ f = 1_A$; componendo a sinistra con f si ha $f \circ (g \circ f) = f \circ 1_A$ allora $(f \circ g) \circ f = 1_B \circ f$ ed essendo per ipotesi f un epimorfismo, quindi cancellabile a destra, si ha $f \circ g = 1_B$, ovvero f è invertibile e il suo inverso $f^{-1} = g$.

"$(iii) \Rightarrow (ii)$" Poiché per ipotesi f è invertibile a destra, esiste $g : B \to A$ tale che $f \circ g = 1_B$. Componendo a destra con f ed usando l'associatività si ha $(f \circ g) \circ f = 1_B \circ f$ allora $f \circ (g \circ f) = f \circ 1_A$ e per la cancellabilità a sinistra di f segue che $g \circ f = 1_A$, ovvero f è invertibile a sinistra; pertanto f risulta un isomorfismo con inverso $f^{-1} = g$.

"$(ii) \Rightarrow (i)$" e "$(ii) \Rightarrow (iii)$" seguono dalle definizioni e dalla Proposizione 1.2.4. □

PROPOSIZIONE 1.2.10. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria e sia* $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{C}$. *Se* $f \in \mathbf{D}(A, B)$ *allora si ha:*

(1) f *sezione (retrazione, isomorfismo, rispettivamente) in* $\mathbf{D} \Rightarrow f$ *sezione (retrazione, isomorfismo, rispettivamente) in* $\mathbf{C}$.
(2) f *monomorfismo (epimorfismo, bimorfismo, rispettivamente) in* $\mathbf{C}$ $\Rightarrow f$ *monomorfismo (epimorfismo, bimorfismo, rispettivamente) in* $\mathbf{D}$.

DIMOSTRAZIONE. (1) Se $f \in \mathbf{D}(A, B)$ è una retrazione, allora $\exists g \in \mathbf{D}(B, A)$ tale che $f \circ g = 1_B$. Poiché $\mathbf{D}(B, A) \subseteq \mathbf{C}(B, A)$, allora f ha inversa a destra in $\mathbf{C}$, ovvero f è una retrazione in $\mathbf{C}$.

Analogamente si dimostra la tesi per le sezioni e quindi per gli isomorfismi.

(2) Sia $f \in \mathbf{C}(A, B)$ un monomorfismo. Siano $h, k \in \mathbf{D}(C, A)$ tali che $f \circ h = f \circ k$; poiché $\mathbf{D}$ è una sottocategoria di $\mathbf{C}$, allora $h, k : C \to A$ sono morfismi in $\mathbf{C}$ tali che $f \circ h = g \circ k$ ed essendo f un monomorfismo in $\mathbf{C}$, si ha $h = k$. Da ciò segue che f è un monomorfismo in $\mathbf{D}$.

La tesi si ottiene in modo analogo per gli epimorfismi e quindi per i bimorfismi. □

1.3. Proprietà degli Oggetti

DEFINIZIONE 1.3.1. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria. Se* $A, B \in |\mathbf{C}|$, A *e* B *si dicono* ***isomorfi*** *in* $\mathbf{C}$*, in simboli* $A \cong_{\mathbf{C}} B$*, o semplicemente* $A \cong B$*, se esiste* $f : A \to B$ *che sia un isomorfismo.*

La relazione di isomorfismo è una relazione di equivalenza nella classe degli oggetti della categoria.

PROPOSIZIONE 1.3.2. *Siano* $\mathbf{C}$ *una categoria e* $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{C}$ *una sua sottocategoria. Se* $A, B \in |\mathbf{D}|$*, allora*

$$A \cong_{\mathbf{D}} B \;\Rightarrow\; A \cong_{\mathbf{C}} B.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue, ovviamente, dalla Proposizione 1.2.10. □

L' implicazione inversa non è sempre verificata, come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO 1.3.3. Sia $\mathbf{C}$ la categoria pre-ordinata con oggetti $\{\bot, a, b, \top\}$ e relazione tale che $\bot \leq a \leq b \leq a \leq \top$, e sia $\mathbf{D}$ la sottocategoria (ordinata) individuata dalla relazione $\bot \leq a \leq b \leq \top$. a e b sono isomorfi in $\mathbf{C}$ ma non in $\mathbf{D}$.

DEFINIZIONE 1.3.4. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria e sia* $A \in |\mathbf{C}|$. A *si dice* ***oggetto iniziale*** *in* $\mathbf{C}$ *se* $\forall X \in |\mathbf{C}|$, $|\mathbf{C}(A, X)| = 1$.

PROPOSIZIONE 1.3.5. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria.*

(1) *Se* A *e* B *sono oggetti iniziali allora* $A \cong B$ *(ovviamente c'è un unico isomorfismo da* A *in* B*).*
(2) *Se* A *è un oggetto iniziale, allora* $\forall A' \in |\mathbf{C}|$ *tale che* $A' \cong A$ *risulta* A' *oggetto iniziale.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Se A e B sono oggetti iniziali allora $\exists| h : A \to B$ ed $\exists| k : B \to A$ e componendo si ottiene $k \circ h : A \to A$ e $h \circ k : B \to B$, ma poiché 1_A e 1_B sono per ipotesi gli unici morfismi da A in sè e da B in sè, si ha $k \circ h = 1_A$ e $h \circ k = 1_B$, ovvero h è un isomorfismo da A in B.

(2) Sia $A' \in |\mathbf{C}|$ tale che $A' \cong A$, allora $\exists| h : A' \to A$ isomorfismo. Per ipotesi, $\forall B \in |\mathbf{C}|$, $\exists| f : A \to B$; da ciò segue che $f \circ h : A' \to B$ è l'unico morfismo da A' in B, infatti preso $g : A' \to B$ si ha $g \circ h^{-1} : A \to B$ e quindi $g \circ h^{-1} = f$ ovvero $g = f \circ h$. □

DEFINIZIONE 1.3.6. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria e sia* $A \in |\mathbf{C}|$. A *è detto* ***oggetto finale*** *o* ***terminale*** *se* $\forall X \in |\mathbf{C}|$, $|\mathbf{C}(X, A)| = 1$.

PROPOSIZIONE 1.3.7. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria.*

(1) *Se* A *e* B *sono oggetti finali allora* $A \cong B$ *(ovviamente c'è un unico isomorfismo da* A *in* B*).*
(2) *Se* A *è un oggetto finale, allora* $\forall B \in |\mathbf{C}|$ *tale che* $B \cong A$ *risulta* B *oggetto finale.*

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione della Proposizione 1.3.5. □

Definizione 1.3.8. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria e sia* $A \in |\mathbf{C}|$. A *si dice* ***oggetto zero*** *se* A *è sia oggetto iniziale che finale.*

Proposizione 1.3.9. *L'eventuale oggetto zero in una categoria è unico a meno di isomorfismi.*

Dimostrazione. Segue dalle proposizioni 1.3.5 e 1.3.7. □

Esempio 1.3.10. (a) In **Set**, $\emptyset$ è l'unico oggetto iniziale ed i singoletti sono gli unici oggetti finali, quindi non esiste oggetto zero.

(b) In **SGrp** l'unico oggetto iniziale è il semigruppo vuoto e i semigruppi con un solo elemento (in realtà si tratta di monoidi), sono gli unici oggetti finali e pertanto non esiste oggetto zero.

(c) In **Grp** ogni gruppo avente per sostegno il singoletto formato dall'elemento neutro è oggetto iniziale e finale, ovvero oggetto zero.

(d) In **Top** lo spazio topologico vuoto è l'unico oggetto iniziale, gli spazi topologici con un solo punto sono gli unici oggetti finali e quindi **Top** non ammette oggetto zero.

(e) In **pTop** ogni spazio topologico avente un solo punto, che ovviamente è anche il punto particolare fissato nello spazio, è oggetto iniziale e finale e quindi è oggetto zero.

(f) In **Vec** uno spazio vettoriale nullo è oggetto iniziale e oggetto finale, quindi è oggetto zero.

(g) In **Rng** e in **Field** non esistono oggetto iniziale e finale e quindi neanche oggetto zero. Infatti, da ogni oggetto in se stesso ci sono sempre gli omomorfismi identico e nullo che sono distinti tra loro.

Definizione 1.3.11. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria. Se esiste* $Z \in |\mathbf{C}|$ *che sia oggetto zero in* $\mathbf{C}$, *allora* $\forall A, B \in |\mathbf{C}|$

$$\exists | f : A \to Z \text{ ed } \exists | g : Z \to B$$

e l'applicazione composta

$$h = g \circ f : A \to B$$

è detta ***morfismo zero*** *o* ***nullo*** *da* A *in* B.

Dall'unicità di f e g segue che il morfismo nullo h è univocamente determinato, una volta fissato l'oggetto zero.

Inoltre, esso non dipende dall'oggetto zero considerato. Infatti, se Z e Z' sono due oggetti zero di $\mathbf{C}$, allora Z e Z' sono isomorfi; sia $h : Z \to Z'$ l'isomorfismo. Poiché Z' è oggetto zero $\exists | f' : A \to Z'$ ed $\exists | g' : Z' \to B$. In questo modo si costruiscono i seguenti diagrammi commutativi:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & B \\ & Z' \arrow[ur, "g'"'] & \end{tikzcd}$$

da cui si ricava che $g \circ f = (g' \circ h) \circ f = g' \circ (h \circ f) = g' \circ f'$.

1.4. Sottooggetti ed Oggetti Quoziente

DEFINIZIONE 1.4.1. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria. Se* $A \in |\mathbf{C}|$, *si dice* ***sottooggetto*** *di* A *ogni coppia* (X, φ), *con* $X \in |\mathbf{C}|$ *e* $\varphi : X \to A$ *monomorfismo.*

ESEMPIO 1.4.2. (a) In **Set** se A è un insieme, i sottooggetti di A sono coppie (X, φ), con $\varphi : X \to A$ funzione iniettiva.

Evidentemente, ogni sottoinsieme di A è un sottooggetto di A, accoppiato con la funzione inclusione.

(b) In **Vec**, **SGrp**, **Mon**, **Grp**, **Rng**, i sottospazi lineari, i sottosemigruppi, i sottomonoidi, i sottogruppi, i sottoanelli, con la corrispondente funzione inclusione sono ovviamente sottooggetti della struttura che li contiene.

DEFINIZIONE 1.4.3. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria e siano* (X, φ) *e* (Y, ψ) *sottooggetti di un oggetto* A *di* $\mathbf{C}$. *Si dice che:*

(1) (X, φ) *e* (Y, ψ) *sono* ***isomorfi***, *e si indica con* $(X, \varphi) \approx (Y, \psi)$, *se* $\exists f : X \to Y$ *isomorfismo tale che* $\varphi = \psi \circ f$.
(2) (X, φ) *è* ***più piccolo di*** (Y, ψ), *e si denota con* $(X, \varphi) \leq (Y, \psi)$, *se esiste un morfismo* $f : X \to Y$ *tale che* $\varphi = \psi \circ f$.

Il morfismo f considerato in (2) è chiaramente un monomorfismo, come si deduce dalla Proposizione 1.2.8 (3).

Si ha allora la seguente caratterizzazione.

PROPOSIZIONE 1.4.4. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria ed* $A \in |\mathbf{C}|$.

I sottooggetti (X, φ), (Y, ψ) *di* A *sono isomorfi sse* $(X, \varphi) \leq (Y, \psi) \leq (X, \varphi)$.

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Ovvia.
"$\Leftarrow$" Poiché per ipotesi $(X, \varphi) \leq (Y, \psi) \leq (X, \varphi)$ allora

$$\exists f : X \to Y \text{ t.c. } \varphi = \psi \circ f$$

e

$$\exists g : Y \to X \text{ t.c. } \psi = \varphi \circ g$$

da cui, essendo φ e ψ dei monomorfismi si ha

$$\varphi \circ 1_X = \varphi = \psi \circ f = (\varphi \circ g) \circ f = \varphi \circ (g \circ f) \ \Rightarrow \ 1_X = g \circ f$$

e

$$\psi \circ 1_Y = \psi = \varphi \circ g = (\psi \circ f) \circ g = \psi \circ (f \circ g) \ \Rightarrow \ 1_Y = f \circ g$$

ovvero f è un isomorfismo e $f^{-1} = g$. □

OSSERVAZIONE 1.4.5. 1. La relazione di isomorfismo $\approx$ è una relazione di equivalenza.

2. La relazione $\leq$ è di pre-ordine, ma non è, in genere, antisimmetrica.

3. Se B è un insieme, sia $\mathcal{P}(B)$ l'insieme delle parti di B, ovvero l'insieme di tutti i sottoinsiemi di B e sia $\mathcal{S}(B)$ la classe di tutti i sottooggetti di B in **Set**. Ovviamente, poiché esiste almeno (B, i_B) sottooggetto di B, $\mathcal{S}(B) \neq \emptyset$. Sia

$$H : \mathcal{S}(B) \to \mathcal{P}(B)$$

l'applicazione definita $\forall (A, \varphi) \in \mathcal{S}(B)$ da

$$H(A, \varphi) = \varphi^{\rightarrow}(A).$$

Allora si verificano facilmente le seguenti proprietà:

(1) $(A, \varphi) \approx (A', \varphi') \Leftrightarrow H(A, \varphi) = H(A', \varphi')$.
(2) $(A, \varphi) \leq (A', \varphi') \Leftrightarrow H(A, \varphi) \subseteq H(A', \varphi')$.

Pertanto, da (1) segue che l'insieme quoziente $\mathcal{S}(B)/\approx$ è in corrispondenza bigettiva con $\mathcal{P}(B)$, e da (2) discende che tale corrispondenza conserva e riflette l'ordine.

DEFINIZIONE 1.4.6. *Sia* **C** *una categoria e sia* $B \in |\mathbf{C}|$. *Un* ***oggetto quoziente*** *di* B *è una coppia* (π, A), *dove* $A \in |\mathbf{C}|$ *e* $\pi : B \to A$ *è un epimorfismo.*

DEFINIZIONE 1.4.7. *Se* **C** *è una categoria,* $B \in |\mathbf{C}|$ *e* (π, A), (π', A') *sono due oggetti quoziente di* B, *allora*

(1) (π, A) *e* (π', A') *si dicono isomorfi se* $\exists f : A \to A'$ *isomorfismo tale che* $\pi' = f \circ \pi$.
(2) (π, A) *è più grande di* (π', A'), *in simboli* $(\pi, A) \geq (\pi', A')$, *se esiste un morfismo* $f : A \to A'$ *tale che* $\pi' = f \circ \pi$.

Il morfismo f considerato in (2) è chiaramente un epimorfismo, come si deduce dalla Proposizione 1.2.8 (4).

OSSERVAZIONE 1.4.8. Sia A un insieme e siano $\mathbf{E}(A)$ l'insieme di tutte le relazioni di equivalenza su A e $\mathcal{K}(A)$ l'insieme di tutti gli oggetti quoziente su A in **Set**. Sia, inoltre,

$$H : \mathcal{K}(A) \to \mathbf{E}(A)$$

l'applicazione definita $\forall (\pi, B) \in \mathcal{K}(A)$, da

$$H(\pi, B) = \{(x, y) \in A \times A | \pi(x) = \pi(y)\}.$$

Allora

(1) (π, B) e (π', B') sono isomorfi $\Leftrightarrow H(\pi, B) = H(\pi', B')$.
(2) $(\pi, B) \geq (\pi', B') \Leftrightarrow H(\pi, B) \subseteq H(\pi', B')$.

Quindi da (1) discende che ogni classe di equivalenza di oggetti quoziente di A è univocamente associata ad una relazione di equivalenza su A con una corrispondenza bigettiva che, per (2), conserva e riflette l'ordine.

ESEMPIO 1.4.9. (a) In costruzioni algebriche come **Vec**, **SGrp**, **Mon**, **Grp**, **Rng**, le classi di equivalenza rispetto alla relazione di isomorfismo di oggetti quoziente di un oggetto A corrispondono bigettivamente alle relazioni di congruenza su A, ovvero alle relazioni di equivalenza sull'insieme sostegno di S che sono compatibili con le operazioni.

(b) In **Top** le classi di equivalenza rispetto alla relazione di isomorfismo di oggetti quoziente di un oggetto sono poste in corrispondenza bigettiva con l'insieme di tutte le relazioni di equivalenza sul loro insieme sostegno.

1.5. Dualità

DEFINIZIONE 1.5.1. *L'**opposta**, $\mathbf{C}^{op}$, di una categoria $\mathbf{C}$ ha la stessa classe di oggetti di $\mathbf{C}$ e la stessa classe di morfismi di $\mathbf{C}$, ma in modo tale che*

$$\mathbf{C}^{op}(A, B) = \mathbf{C}(B, A),\ \forall A, B \in |\mathbf{C}|.$$

Per ogni morfismo $\varphi \in \mathbf{C}^{op}(A, B)$, si indica con φ^{op} lo stesso morfismo come elemento di $\mathbf{C}(A, B)$; si pone cioè

$$\varphi \in \mathbf{C}^{op}(A, B) \ \Leftrightarrow\ \varphi^{op} \in \mathbf{C}(B, A).$$

Ovviamente, la composizione in $\mathbf{C}^{op}$ è definita da

$$\varphi \in \mathbf{C}^{op}(A, B), \psi \in \mathbf{C}^{op}(B, C) \ \Rightarrow\ (\psi \circ \varphi)^{op} = \varphi^{op} \circ \psi^{op}$$

ed il morfismo identico 1_A di A in $\mathbf{C}^{op}$ è tale che

$$(1_A)^{op} = 1_A.$$

ESEMPIO 1.5.2. (a) Sia $\mathbf{C} = (X, \leq)$ una categoria pre-ordinata, allora $\forall x, y \in X$, $|\mathbf{C}^{op}(x, y)| = 1 \Leftrightarrow x \geq y$.

Quindi la categoria opposta di $\mathbf{C}$ è

$$\mathbf{C}^{op} = (X, \geq).$$

(b) Sia $\mathbf{C} = (M, \bullet)$ una categoria monoide con oggetto A. Se $a, b \in M = \mathbf{C}(A, A) = \mathbf{C}^{op}(A, A)$, allora la composizione di a con b in $\mathbf{C}^{op}$ è determinata da

$$a \bullet' b = b^{op} \bullet a^{op} = b \bullet a.$$

Osserviamo che per ogni categoria $\mathbf{C}$ si ha $(\mathbf{C}^{op})^{op} = \mathbf{C}$, quindi ogni categoria è duale di un'altra categoria.

Più esplicitamente si ha la seguente uguaglianza tra conglomerati (che si tratti di conglomerati è anche ribadito nel paragrafo 1.7)

$$\{\mathbf{C} | \mathbf{C} \text{ è una categoria}\} = \{\mathbf{D} | \exists \mathbf{C} \text{ categoria } : \mathbf{D} = \mathbf{C}^{op}\}.$$

Di qualsiasi concetto, proprietà, proposizione, enunciato, $\mathcal{P}$, in una categoria $\mathbf{C}$ si possono formulare concetto, proprietà, proposizione, enunciato **duale**, $\mathcal{P}^{op}$, ottenuti sostituendo ogni morfismo con il suo opposto, quindi scambiando, per ogni morfismo, il dominio con il codominio.

Ad esempio il concetto di dominio di un morfismo ("A è dominio di un morfismo in $\mathbf{C}$ se $\exists B \in |\mathbf{C}|$ ed $\exists f \in \mathbf{C}(A, B)$") ha come concetto duale quello di codominio ("A è codominio di un morfismo in $\mathbf{C}$ se $\exists B \in |\mathbf{C}|$ ed $\exists g \in \mathbf{C}(B, A)$").

Un concetto $\mathcal{P}$ si dice **autoduale** se $\mathcal{P}^{op} = \mathcal{P}$.

Il concetto di morfismo identità è autoduale.

I concetti duali di sezione e monomorfismo sono quelli di retrazione ed epimorfismo. I concetti di isomorfismo e bimorfismo sono autoduali.

Il concetto duale di sottooggetto è quello di oggetto quoziente; il concetto duale di oggetto iniziale è quello di oggetto finale. Il concetto di oggetto zero è quindi autoduale.

Spesso il concetto duale $\mathcal{P}^{op}$ di un concetto $\mathcal{P}$ si denota anche mediante co-$\mathcal{P}$.

Data una proprietà $\mathcal{P}$ in $\mathbf{C}$, la proprietà duale $\mathcal{P}^{op}$ è verificata in $\mathbf{C}$ se e solo se la proprietà $\mathcal{P}$ è verificata in $\mathbf{C}^{op}$.

Si ha quindi il seguente

Principio di dualità per le categorie.
Se una proprietà $\mathcal{P}$ è verificata in ogni categoria, allora la proprietà duale $\mathcal{P}^{op}$ è verificata in ogni categoria.

Le proprietà considerate nelle categorie hanno quindi due formulazioni tra loro duali. Verificare una delle due in tutte le categorie, equivale a verificare l'altra, sempre in tutte le categorie.

1.6. Funtori

DEFINIZIONE 1.6.1. *Siano $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ due categorie.*
*Un **funtore** da $\mathbf{C}$ in $\mathbf{D}$, indicato con*

$$F : \mathbf{C} \to \mathbf{D} \text{ o } \mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D}$$

è una coppia di funzioni, generalmente indicate con lo stesso simbolo,

$$F \equiv (F : |\mathbf{C}| \to |\mathbf{D}|, F : \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{D}))$$

che verifichi le seguenti proprietà :

(1) *se* $A, A' \in |\mathbf{C}|$ *ed* $f \in \mathbf{C}(A, A')$, *allora*

$$F(f) \in \mathbf{D}\big(F(A), F(A')\big).$$

(2) *se* $A, A', A'' \in |\mathbf{C}|$, $f \in \mathbf{C}(A, A')$ *e* $g \in \mathbf{C}(A', A'')$, *allora*

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

(3) $F(1_A) = 1_{F(A)}$, $\forall A \in |\mathbf{C}|$.

PROPOSIZIONE 1.6.2. *Se* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *e* $G : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *sono funtori allora si ottiene un funtore*

$$G \circ F : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$$

ponendo $\forall A \in |\mathbf{A}|$ *e* $\forall f \in \mathbf{A}(A, A')$

$$(G \circ F)(A) = G\big(F(A)\big)$$

$$(G \circ F)(f) = G\big(F(f)\big) \in \mathbf{C}\big(G(F(A)), G(F(A'))\big).$$

□

ESEMPIO 1.6.3. (a) Per ogni categoria $\mathbf{C}$ si può definire il *funtore identico* di $\mathbf{C}$

$$1_{\mathbf{C}} \equiv \big(i_{|\mathbf{C}|}, i_{\mathcal{M}or(\mathbf{C})}\big).$$

(b) Se $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{C}$, si definisce *funtore inclusione* di $\mathbf{D}$ in $\mathbf{C}$, il funtore

$$J : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$$

che associa ad ogni oggetto di $\mathbf{D}$ il medesimo oggetto in $\mathbf{C}$ ed ad ogni morfismo in $\mathbf{D}$ il medesimo morfismo in $\mathbf{C}$.

(c) Se $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ sono due categorie e $D \in |\mathbf{D}|$, il *funtore costante* con valore D è il funtore che ad ogni oggetto di $\mathbf{C}$ associa D ed ad ogni morfismo fra due oggetti in $\mathbf{C}$ associa il morfismo identico dell'oggetto D.

(d) Se $\mathbf{C}$ è una categoria concreta, le corrispondenze già descritte in 1.1.8, che ad ogni oggetto A e ad ogni morfismo f di $\mathbf{C}$ associano rispettivamente $u(A)$ ed $u(f)$, determinano un funtore

$$U : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$$

detto *funtore dimentico.*

(e) Le corrispondenze che ad ogni spazio topologico puntato associano il suo gruppo fondamentale e ad ogni funzione continua fra due spazi topologici puntati associano l'omomorfismo indotto fra i rispettivi gruppi fondamentali, definiscono un funtore $\Pi_1 : \mathbf{pTop} \to \mathbf{Ab}$ detto *funtore omotopia.*

Un analogo funtore può essere definito su $\mathbf{hTop}$, poiché funzioni omotope determinano lo stesso omomorfismo.

(f) Le corrispondenze che ad ogni spazio topologico (X, τ) associano il suo n-simo gruppo di omologia singolare $H_n(X,\tau)$, con $n \in \mathbb{N}$, e ad ogni funzione continua fra due spazi topologici associano l'omomorfismo indotto fra i rispettivi gruppi di omologia singolare definiscono un funtore H_n : **Top** $\to$ **Ab**, detto n-simo *funtore omologia*, che può anche essere definito su **hTop**.

(g) Le corrispondenze

$$X \in |\mathbf{Set}| \;\longmapsto\; \to(X) = \mathcal{P}(X) = \{A | A \subseteq X\},$$

e

$$f \in \mathbf{Set}(X,T) \;\longmapsto\; \to(f) = f^{\to} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(T)$$

con $f^{\to}(A) = \{f(x) | x \in A\}$, $\forall A \in \mathcal{P}(X)$, definiscono un funtore

$$\to : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$$

detto *funtore powerset diretto.*

DEFINIZIONE 1.6.4. *Siano* **C** *e* **D** *due categorie. Una coppia di applicazioni*

$$F \equiv \big(F : |\mathbf{C}| \to |\mathbf{D}|, F : \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{D})\big)$$

che verifichi:

(1)$'$ *se* $A, A' \in |\mathbf{C}|$, $f \in \mathbf{C}(A, A')$, *allora*

$$F(f) \in \mathbf{D}\big(F(A'), F(A)\big)$$

(2)$'$ *se* $A, A', A'' \in |\mathbf{C}|$, $f \in \mathbf{C}(A, A')$ *e* $g \in \mathbf{C}(A', A'')$, *allora*

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$$

e (3), *come in* 1.6.1, *è detto* ***funtore controvariante.***

ESEMPIO 1.6.5. (a) Le corrispondenze

$$X \in |\mathbf{Set}| \;\longmapsto\; \leftarrow(X) = \mathcal{P}(X),$$

e

$$f \in \mathbf{Set}(X,T) \;\longmapsto\; \leftarrow(f) = f^{\leftarrow} : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(X)$$

con $f^{\leftarrow}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$, $\forall B \in \mathcal{P}(T)$, definiscono un funtore controvariante

$$\leftarrow : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$$

detto *funtore powerset inverso.*

(b) Le corrispondenze che associano ad ogni

$$V \in \mathbf{Vec} \;\longmapsto\; *(V) = V^*$$

dove V^* è lo spazio vettoriale duale di V, e ad ogni

$$f \in \mathbf{Vec}(V,W) \;\longmapsto\; *(f) = f^* \in \mathbf{Vec}(W^*, V^*)$$

con $f^*(g) = g \circ f$, $\forall g \in W^*$, definiscono un funtore controvariante

$$* : \mathbf{Vec} \to \mathbf{Vec}$$

detto *funtore dualità* per gli spazi vettoriali.

PROPOSIZIONE 1.6.6. *Ogni funtore conserva sezioni, retrazioni e quindi isomorfismi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un funtore e sia $f \in \mathbf{C}(A, B)$ una sezione; per ipotesi esiste $g \in \mathbf{C}(B, A)$ tale che $g \circ f = 1_A$ e dalla compatibilità dei funtori con la composizione segue che $F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(1_A) = 1_{F(A)}$, ovvero $F(f) \in \mathbf{D}\big(F(A), F(B)\big)$ è una sezione.

La dimostrazione è analoga per retrazioni e quindi per isomorfismi. □

OSSERVAZIONE 1.6.7. 1. La proposizione 1.6.6 ha un'interessante conseguenza; essa, infatti, può essere utilizzata per verificare che alcuni oggetti in una categoria non sono isomorfi. Ad esempio, mediante il funtore omotopia si può provare che due spazi topologici non sono omeomorfi (anzi nemmeno omotopicamente equivalenti), mostrando che i loro gruppi fondamentali non sono isomorfi.

2. Non è detto che un funtore $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ rifletta isomorfismi, ovvero se $F(f)$ è un isomorfismo, non è detto che f lo sia. Ad esempio, sia $U : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ il funtore dimentico. Se consideriamo l'applicazione identica $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ essa è un'applicazione continua dallo spazio topologico dato da $\mathbb{R}$ con la topologia discreta nello spazio topologico dato da $\mathbb{R}$ con la topologia naturale, ma non è un omeomorfismo, ovvero non è un isomorfismo fra i due spazi topologici pensati come oggetti di **Top**, ma, evidentemente, $U(i) = i$ è un isomorfismo in **Set**.

DEFINIZIONE 1.6.8. *Sia* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *un funtore.*

*F si dice **pieno** se,* $\forall A, B \in |\mathbf{C}|$, $F_{|\mathbf{C}(A,B)} : \mathbf{C}(A, B) \to \mathbf{D}\big(F(A), F(B)\big)$ *è suriettiva.*

*F si dice **fedele** se,* $\forall A, B \in |\mathbf{C}|$, $F_{|\mathbf{C}(A,B)} : \mathbf{C}(A, B) \to \mathbf{D}\big(F(A), F(B)\big)$ *è iniettiva.*

*F si dice **immersione** se* $F : \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{D})$ *è iniettiva.*

*F si dice **rappresentativo** (o **denso**) se* $\forall B \in |\mathbf{D}|$ $\exists A \in |\mathbf{C}|$ *tale che* $F(A) \cong B$.

OSSERVAZIONE 1.6.9. 1. Ovviamente, se un funtore è un'immersione allora è anche fedele.

Il funtore dimentico $U : \mathbf{Vec} \to \mathbf{Set}$ è fedele, ma non è né pieno, né denso, né un'immersione.

Il funtore dimentico $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}_0$ è fedele e denso ma non è né pieno, né un'immersione, avendo indicato con $\mathbf{Set}_0$ la sottocategoria piena di **Set** costituita dagli insiemi non vuoti.

Il funtore dimentico $U : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ è fedele e denso, ma non è né pieno, né un'immersione.

Il funtore dimentico $U : \mathbf{Field} \to \mathbf{Set}$ è fedele ma non è né pieno, né denso e non é un'immersione.

2. I funtori inclusione sono immersioni. Inoltre, se la sottocategoria è piena allora il funtore inclusione è pieno.

Il funtore inclusione $J : \mathbf{Haus} \to \mathbf{Top}$ della categoria degli spazi di Hausdorff è un'immersione, quindi è fedele, ed inoltre è pieno, ma non è denso.

PROPOSIZIONE 1.6.10. *Se $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ è un funtore, allora valgono le seguenti proprietà:*

(1) *Se F è fedele $\Rightarrow$ F riflette monomorfismi, epimorfismi e bimorfismi.*
(2) *Se F è fedele e pieno $\Rightarrow$ F riflette sezioni, retrazioni ed isomorfismi.*
(3) *Se F è fedele, pieno e denso $\Rightarrow$ F conserva monomorfismi, epimorfismi, bimorfismi.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Verifichiamo che se F è un funtore fedele allora F riflette epimorfismi.

Sia $f \in \mathbf{C}(A, B)$, tale che $F(f) \in \mathbf{D}\big(F(A), F(B)\big)$ sia un epimorfismo e siano $f', g' \in \mathbf{C}(B, C)$ tali che $f' \circ f = g' \circ f$. Allora applicando F, essendo $F(f)$ un epimorfismo, si ha

$$\begin{aligned} F(f' \circ f) = F(g' \circ f) &\Rightarrow F(f') \circ F(f) = F(g') \circ F(f) \\ &\Rightarrow F(f') = F(g') \end{aligned}$$

da cui poiché F è fedele si ricava $f' = g'$, ovvero f è un epimorfismo.

Le altre verifiche si eseguono analogamante.

(2) Se F è fedele e pieno verifichiamo che esso riflette sezioni.

Sia $f \in \mathbf{C}(A, B)$ tale che $F(f) : F(A) \to F(B)$ sia una sezione, allora esiste $g' : F(B) \to F(A)$ tale che $g' \circ F(f) = 1_{F(A)}$. Poiché per ipotesi F è pieno allora esiste $f' \in \mathbf{C}(B, A)$ tale che $F(f') = g'$ e si ha $F(1_A) = 1_{F(A)} = g' \circ F(f) = F(f') \circ F(f) = F(f' \circ f)$ ed essendo F fedele segue che $f' \circ f = 1_A$, ovvero f è una sezione.

La dimostrazione negli altri casi è analoga.

(3) Se F è fedele, pieno e denso, dimostriamo che F conserva epimorfismi.

Siano $f \in \mathbf{C}(A, B)$ un epimorfismo e $h', g' \in \mathbf{D}\big(F(B), C'\big)$ tali che $g' \circ F(f) = h' \circ F(f)$. Poiché per ipotesi F è denso allora $\exists C \in |\mathbf{C}|$ tale che $F(C) \cong C'$ e sia $\varphi : C' \to F(C)$ un isomorfismo; allora $\varphi \circ g', \varphi \circ h' \in \mathbf{D}(F(B), F(C))$ e poiché F è pieno esistono $g, h \in \mathbf{C}(B, C)$ tali che $F(g) = \varphi \circ g'$, $F(h) = \varphi \circ h'$, da cui $g' = \varphi^{-1} \circ F(g)$ e $h' = \varphi^{-1} \circ F(h)$. Pertanto si ha $\varphi^{-1} \circ F(g) \circ F(f) = g' \circ F(f) = h' \circ F(f) = \varphi^{-1} \circ F(h) \circ F(f) \Rightarrow F(g) \circ F(f) = F(h) \circ F(f) \Rightarrow F(g \circ f) = F(h \circ f)$ ed essendo F fedele risulta $g \circ f = h \circ f$ quindi essendo f un epimorfismo $g = h$ da cui

$$F(g) = F(h) \Rightarrow \varphi \circ g' = \varphi \circ h' \Rightarrow g' = h'.$$

Quindi $F(f)$ è un epimorfismo.

Le altre verifiche sono analoghe. $\square$

LEMMA 1.6.11. *Sia $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un funtore.*
Se $F : \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{D})$ è una bigezione allora $F : |\mathbf{C}| \to |\mathbf{D}|$ è una bigezione.

DIMOSTRAZIONE. $F : |\mathbf{C}| \to |\mathbf{D}|$ iniettiva: se $A, B \in |\mathbf{C}|$ ed $F(A) = F(B)$, allora poiché $F : \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{D})$ è una bigezione si ha

$$1_{F(A)} = 1_{F(B)} \;\Rightarrow F(1_A) = F(1_B) \;\Rightarrow 1_A = 1_B \;\Rightarrow A = B.$$

$F : |\mathbf{C}| \to |\mathbf{D}|$ suriettiva: se $A' \in |\mathbf{D}|$ allora $1_{A'} \in \mathcal{M}or(\mathbf{D})$ quindi $\exists f \in \mathcal{M}or(\mathbf{C})$, $f : A \to B$, tale che $1_{A'} = F(f) : F(A) \to F(B)$ quindi $F(A) = A'$. $\square$

PROPOSIZIONE 1.6.12. *Se $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ è un funtore allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(*i*) *$F : \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{D})$ è una bigezione.*
(*ii*) *$F : |\mathbf{C}| \to |\mathbf{D}|$ è una bigezione ed il funtore F è fedele e pieno.*

DIMOSTRAZIONE. "$(i) \Rightarrow (ii)$" Se $F : \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{D})$ è una bigezione, allora $\forall A, B \in |\mathbf{C}|$, $F_{|\mathbf{C}(A,B)} : \mathbf{C}(A,B) \to \mathbf{D}\big(F(A), F(B)\big)$ è una bigezione, ovvero F è fedele e pieno, e per 1.6.11 segue la tesi.

"$(ii) \Rightarrow (i)$" $F : \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{D})$ iniettiva: siano $f \in \mathbf{C}(A,B)$ e $g \in \mathbf{C}(C,D)$ tali che $F(f) = F(g)$; allora $F(A) = F(C)$ e $F(B) = F(D)$ quindi per l'ipotesi $A = C$ e $B = D$. Allora $f, g \in \mathbf{C}(A,B)$ con $F(f) = F(g)$ ed essendo per ipotesi il funtore F fedele segue che $f = g$.

$F : \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{D})$ suriettiva: Sia $f' \in \mathcal{M}or(\mathbf{D})$, $f' : A' \to B'$. Poiché $F : |\mathbf{C}| \to |\mathbf{D}|$ è una bigezione esistono $A, B \in |\mathbf{C}|$ tali che $F(A) = A'$ ed $F(B) = B'$ ed $f' \in \mathbf{D}\big(F(A), F(B)\big)$, quindi essendo F pieno esiste $f \in \mathbf{C}(A,B)$, tale che $F(f) = f'$. $\square$

DEFINIZIONE 1.6.13. *Un funtore $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ è un* ***isomorfismo*** *se esiste un funtore $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ tale che*

$$G \circ F = 1_{\mathbf{C}} \quad e \quad F \circ G = 1_{\mathbf{D}}.$$

Due categorie $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ si dicono ***isomorfe****, in simboli $\mathbf{C} \cong \mathbf{D}$, se esiste $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ isomorfismo.*

OSSERVAZIONE 1.6.14. 1. Ovviamente il funtore $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ della Definizione 1.6.13, univocamente determinato da F e generalmente indicato con F^{-1}, è esso stesso un isomorfismo.

2. Nella classe di tutte le categorie la relazione di isomorfismo è una relazione di equivalenza; categorie fra loro isomorfe sono considerate sostanzialmente la stessa.

3. Dalla Proposizione 1.6.12 segue che un funtore $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ è un isomorfismo se e solo se $F : \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{D})$ è una bigezione o equivalentemente se e solo se $F : |\mathbf{C}| \to |\mathbf{D}|$ è una bigezione ed il funtore F è fedele e pieno.

ESEMPIO 1.6.15. Se K è un anello commutativo unitario, indichiamo con K-**Mod** la categoria concreta avente per oggetti i K moduli (sinistri) e per morfismi omomorfismi di K-moduli. Osserviamo che se K è un campo allora un K-modulo è uno spazio vettoriale su K; pertanto $\mathbf{Vec} \subseteq K$-**Mod**. Inoltre, se $K = \mathbb{Z}$ si ha $\mathbb{Z}$-**Mod** $\cong$**Ab**. Infatti ogni gruppo abeliano G è uno $\mathbb{Z}$-modulo con l'operazione definita, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in G$, da

$$|k|x = \underbrace{x + x \cdots + x}_{|k|} \text{ e } (-k)x = -(kx)$$

ed i morfismi tra due gruppi G ed H sono esattamente le funzioni che sono anche morfismi di $\mathbb{Z}$-moduli tra G ed H.

La precedente Osservazione 1.6.14 (3.) mostra che $\mathbb{Z}$-**Mod** $\cong$**Ab**.

PROPOSIZIONE 1.6.16. *Siano* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *e* $G : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ *due funtori, allora valgono le seguenti proprietà:*

(1) *Se* F *e* G *sono isomorfismi* (*immersioni, fedeli, pieni, rispettivamente*) *allora* $G \circ F$ *è un isomorfismo* (*immersione, fedele, pieno, rispettivamente*)*.*
(2) *Se* $G \circ F$ *è un'immersione* (*fedele, rispettivamente*) *allora* F *è un'immersione* (*fedele, rispettivamente*)*.*
(3) *Se* $G \circ F$ *è pieno allora* G *è pieno.*

DIMOSTRAZIONE. Le verifiche di (1), (2) e (3) seguono immediate da proprietà elementari delle funzioni tra classi. □

1.7. Categorie di Categorie

Dalle proprietà dei funtori segue che essi agiscono come morfismi fra categorie; infatti, tra essi ha senso fare la composizione che, come visto in 1.6.1, è ancora un funtore e tale operazione è associativa, ed inoltre i funtori identici si comportano rispetto ad essa come le identità.

Queste osservazioni suggeriscono l'idea di considerare la "categoria delle categorie" per definire la quale però è necessario ovviare a due difficoltà intrinseche in una costruzione di questo tipo: innanzitutto poiché le categorie costituiscono un conglomerato, che contiene in effetti tutte le classi (si pensi alle categorie dell'Esempio 1.1.3 (o)), non si può realizzare una classe avente per oggetti tutte le categorie; inoltre, date due categorie, non è affatto vero che tutti i funtori dalla prima alla seconda categoria formino un insieme, come esplicitamente richiesto nella definizione di categoria. Questi problemi si superano se si restringe l'attenzione alle categorie piccole, nelle quali non solo la classe degli oggetti, ma anche la classe dei morfismi sono insiemi.

DEFINIZIONE 1.7.1. *La categoria* **Cat** *delle categorie piccole ha come oggetti tutte le categorie piccole, come morfismi fra due oggetti tutti i funtori tra di essi, come identità i funtori identici e come composizione l'usuale composizione fra funtori.*

OSSERVAZIONE 1.7.2. 1. Che **Cat** sia una categoria segue immediatamente dalle seguenti osservazioni:

(a) Poiché in ogni categoria piccola $\mathbf{C}$ si ha che $Ob(\mathbf{C})$ e $\mathcal{M}or(\mathbf{C})$ sono insiemi, tutte le categorie piccole formano una classe, in quanto gli elementi che costituiscono una generica categoria piccola si scelgono nella classe degli insiemi.

(b) Per lo stesso motivo, per ogni coppia di categorie piccole tutti i funtori dalla prima nella seconda categoria formano un insieme e l'unione di tutti questi insiemi è evidentemente una classe.

2. **Cat** non è una categoria piccola; infatti poiché ogni insieme è una categoria, come visto in 1.1.3 (o), si costruisce un'immersione piena da **Set** in **Cat**, e **Set** non è piccola.

DEFINIZIONE 1.7.3. *Si chiama* ***quasi categoria*** *una coppia*

$$\mathcal{A} = (\mathcal{O}, \mathcal{M})$$

tale che

- *$\mathcal{O}$ sia un conglomerato, i cui elementi sono chiamati oggetti.*
- *Per ogni coppia di oggetti (A, B), $\mathcal{A}(A, B)$ è una classe chiamata la classe di tutti i morfismi da A in B denotati con $f : A \to B$, le classi $\mathcal{M}(A, B)$ sono a due a due disgiunte e la loro unione dà il conglomerato $\mathcal{M}$.*
- *Esiste una legge di composizione parziale*

$$\circ : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$$

che soddisfa le seguenti condizioni: se $f \in \mathbf{C}(A, B)$, $g \in \mathbf{C}(B, C)$, esiste

$$\circ(f, g) = g \circ f \in \mathbf{C}(A, C).$$

Inoltre "$\circ$" è associativa, ovvero se $f \in \mathbf{C}(A, B)$, $g \in \mathbf{C}(B, C)$, $h \in \mathbf{C}(C, D)$, allora

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

- *Per ogni $A \in \mathcal{O}$ esiste $1_A \in \mathcal{A}(A, A)$, detto morfismo identico (o identità) di A, tale che per ogni $f : A \to B$ e $g : C \to A$ risulta*

$$f \circ 1_A = f \text{ ed } 1_A \circ g = g.$$

Definizione 1.7.4. *La quasi-categoria* **CAT** *di tutte le categorie ha per oggetti tutte le categorie, per morfismi fra due oggetti tutti i funtori dalla prima nella seconda categoria, come identità i funtori identici e come composizione l'usuale composizione fra funtori che deriva dalla Proposizione 1.6.2.*

Osservazione 1.7.5. 1. Ogni categoria è una quasi-categoria.

2. Poiché $\mathbf{CAT}(\mathbf{Set}, \mathbf{Set})$ non è un insieme, allora **CAT** è una quasi-categoria ma non è una categoria. Peraltro $|\mathbf{CAT}|$ è un conglomerato ma non una classe.

3. Virtualmente ogni concetto espresso per le categorie può essere riformulato per le quasi-categorie così che ad esempio si può parlare di funtori fra quasi-categorie, quasi-categorie piccole, discrete ecc$\cdot\cdots$. Molti di questi concetti sono espressi per le categorie piuttosto che per le quasi-categorie, in quanto oggetti di studio sono soprattutto le categorie; in alcuni casi tuttavia esprimere alcuni concetti in termini di quasi-categorie permette di facilitarne la formulazione, come ad esempio nel caso degli isomorfismi fra categorie che sono tutti e soli gli isomorfismi in **CAT**.

1.8. Trasformazioni Naturali

Definizione 1.8.1. *Siano F e G funtori da una categoria $\mathbf{C}$ in una categoria $\mathbf{D}$.*

Una ***trasformazione naturale***

$$\eta : F \to G,$$

è una funzione

$$\eta : |\mathbf{C}| \to \mathcal{M}or(\mathbf{D}),$$

ovvero, se si pone $\eta(A) = \eta_A$, una famiglia di morfismi

$$\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathbf{C}|}$$

che verifica le seguenti condizioni:

(1) $\forall A \in |\mathbf{C}|$, $\eta_A \in \mathbf{D}\big(F(A), G(A)\big)$.

(2) $\forall f \in \mathbf{C}(A, B)$ *è commutativo il seguente diagramma:*

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \overset{\eta_A}{\to} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & /\!/\!/ & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & \overset{\eta_B}{\to} & G(B) \end{array}$$

Più esplicitamente una trasformazione naturale la indicheremo con

$$\begin{array}{c} \mathbf{C} \overset{F}{\to} \mathbf{D} \\ \downarrow \eta \\ \mathbf{C} \overset{G}{\to} \mathbf{D} \end{array}$$

Si chiama ***trasformazione naturale identica*** *del funtore* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *in se stesso la trasformazione naturale* $\iota_F = (1_{F(A)})_{A\in|\mathbf{C}|}$.

Una trasformazione naturale $\eta = (\eta_A)_{A\in|\mathbf{C}|}$ *è un* ***isomorfismo naturale****, se* $\forall A \in |\mathbf{C}|$,

$$\eta_A : F(A) \to G(A)$$

è un isomorfismo.

I funtori F *e* G *si dicono* ***naturalmente isomorfi****, e si scrive* $F \cong G$*, se esiste* $\eta : F \to G$ *isomorfismo naturale.*

In tal caso, i morfismi inversi η_A^{-1} *definiscono l'isomorfismo naturale inverso di* η, $\eta^{-1} : G \to F$.

DEFINIZIONE 1.8.2. *Un funtore* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *si dice* ***equivalenza*** *se esiste* $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *tale che* $F \circ G \cong 1_{\mathbf{D}}$ *e* $G \circ F \cong 1_{\mathbf{C}}$.

$\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *si dicono* ***equivalenti*** *se esiste un'equivalenza* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$.

ESEMPIO 1.8.3. (a) La trasformazione naturale identica di un funtore F in se stesso è un isomorfismo naturale.

(b) Le corrispondenze che associano ad ogni

$$V \in |\mathbf{Vec}| \longmapsto **(V) = V^{**}$$

dove V^{**} è lo spazio vettoriale biduale di V, e ad ogni

$$f \in \mathbf{Vec}(V,W) \longmapsto **(f) = f^{**} : V^{**} \to W^{**}$$

dove $\forall\ \alpha \in V^{**}$, $f^{**}(\alpha) : W^* \to K$ è tale che $\forall\ \vartheta^* \in W^*$,

$$f^{**}(\alpha)(\vartheta^*) = (\alpha \circ f^*)(\vartheta^*) = \alpha(f^*(\vartheta^*)) = \alpha(\vartheta^* \circ f) \in K$$

definiscono un funtore

$$** \ : \ \mathbf{Vec} \ \to \ \mathbf{Vec}$$

detto funtore *biduale.*

Si verifica che il funtore biduale è naturalmente isomorfo al funtore identico, $** \cong 1_{\mathbf{Vec}}$ mediante l'isomorfismo naturale

$$\begin{array}{c} \mathbf{Vec} \overset{1_{\mathbf{Vec}}}{\to} \mathbf{Vec} \\ \downarrow \eta \\ \mathbf{Vec} \overset{**}{\to} \mathbf{Vec} \end{array}$$

definito $\forall V \in |\mathbf{Vec}|$ da

$$\eta_V : V = 1_{\mathbf{Vec}}(V) \to V^{**} = **(V)$$

che ad ogni $\vec{x} \in V$ associa $\eta_V(\vec{x}) = x^{**} : V^* \to K$ tale che $x^{**}(\vartheta^*) = \vartheta^*(\vec{x})$, $\forall\ \vartheta^* \in V^*$.

In effetti si verifica che η_V è un isomorfismo, $\forall V \in |\mathbf{Vec}|$ ed inoltre $\forall V, W \in |\mathbf{Vec}|$ e $\forall f \in \mathbf{Vec}(V,W)$ è commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V & \overset{\eta_V}{\to} & V^{**} \\ f \downarrow & /\!/\!/ & \downarrow f^{**} \\ W & \overset{\eta_W}{\to} & W^{**} \end{array}$$

Infatti, $\forall \vec{x} \in V$, $\forall \vartheta^* \in W^*$ si ha

$$\begin{aligned}\big((f^{**} \circ \eta_V)(\vec{x})\big)(\vartheta^*) &= \big(f^{**}(\eta_V(\vec{x}))\big)(\vartheta^*) \\ &= \big(\eta_V(\vec{x}) \circ f^*\big)(\vartheta^*) \\ &= \eta_V(\vec{x})(f^*(\vartheta^*)) \\ &= \eta_V(\vec{x})(\vartheta^* \circ f) \\ &= (\vartheta^* \circ f)(\vec{x}) \\ &= \vartheta^*(f(\vec{x})) \\ &= \big(\eta_W(f(\vec{x}))\big)(\vartheta^*) \\ &= \big((\eta_W \circ f)(\vec{x})\big)(\vartheta^*).\end{aligned}$$

Definizione 1.8.4. *Se $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, $G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $H : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ sono dei funtori e*

$$\begin{array}{c}\mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D} \\ \downarrow \eta \\ \mathbf{C} \xrightarrow{G} \mathbf{D} \\ \downarrow \varepsilon \\ \mathbf{C} \xrightarrow{H} \mathbf{D}\end{array}$$

sono trasformazioni naturali, si definisce ***composizione*** *delle trasformazioni naturali η ed ε, la trasformazione naturale $\varepsilon \circ \eta = \big((\varepsilon \circ \eta)_A\big)_{A \in |\mathbf{C}|}$ definita $\forall A \in |\mathbf{C}|$ da*

$$(\varepsilon \circ \eta)_A = \varepsilon_A \circ \eta_A : F(A) \to H(A).$$

Che la famiglia di morfismi $\varepsilon \circ \eta = \big((\varepsilon \circ \eta)_A\big)_{A \in |\mathbf{C}|}$ sia una trasformazione naturale si verifica osservando che $\forall f \in \mathbf{C}(A, A')$, il diagramma esterno

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(A') \\ \eta_A \downarrow & /\!/\!/ & \downarrow \eta_{A'} \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(A') \\ \varepsilon_A \downarrow & /\!/\!/ & \downarrow \varepsilon_{A'} \\ H(A) & \xrightarrow{H(f)} & H(A') \end{array}$$

è commutativo poiché lo sono i diagrammi parziali.

Osservazione 1.8.5. Si verificano facilmente le seguenti proprietà:
1. La composizione di trasformazioni naturali è associativa.
2. Ogni isomorfismo naturale identico è neutro rispetto alla composizione di trasformazioni naturali.

Da tali proprietà segue che fissate due categorie $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, si definisce una quasi categoria avente per oggetti tutti i funtori da $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, che costituiscono una classe, per morfismi fra due oggetti-funtori le trasformazioni naturali fra i funtori considerati, che costituiscono anch'essi una classe per ogni fissata coppia di funtori. La legge di composizione è la composizione di trasformazioni naturali e le identità sono gli isomorfismi naturali identici. Tale quasi categoria è detta, impropriamente, *categoria dei funtori.*

DEFINIZIONE 1.8.6. *Siano* $F, G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $H, K : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *dei funtori e siano*

$$\eta : F \to G \quad e \quad \delta : H \to K$$

trasformazioni naturali.

Si dice ***prodotto*** *o* $*$*-composizione delle trasformazioni naturali* δ *ed* η *la trasformazione naturale*

$$\begin{array}{c} \mathcal{A} \overset{H \circ F}{\to} \mathbf{C} \\ \quad\;\; \downarrow \delta * \eta \\ \mathcal{A} \overset{K \circ G}{\to} \mathbf{C} \end{array}$$

definita $\forall A \in |\mathbf{A}|$ *da*

$$(\delta * \eta)_A = K(\eta_A) \circ \delta_{F(A)} \tag{1}$$

o equivalentemente

$$(\delta * \eta)_A = \delta_{G(A)} \circ H(\eta_A). \tag{2}$$

L'equivalenza delle espressioni (1) e (2) discende dal fatto che $\forall A \in |\mathbf{A}|$, $\eta_A : F(A) \to G(A)$ è un morfismo in $\mathbf{B}$ ed essendo $\delta : H \to K$ una trasformazione naturale si ha la commutatività del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} H\big(F(A)\big) & \overset{\delta_{F(A)}}{\to} & K\big(F(A)\big) \\ \mathrm{H}(\eta_A) \downarrow & /\!/\!/ & \downarrow \mathrm{K}(\eta_A) \\ H\big(G(A)\big) & \overset{\delta_{G(A)}}{\to} & K\big(G(A)\big). \end{array}$$

Per provare che $\delta * \eta = \big((\delta * \eta)_A\big)_{A \in |\mathcal{A}|}$ è una trasformazione naturale, consideriamo un generico morfismo $f \in \mathbf{A}(A, A')$ e verifichiamo che il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} H\big(F(A)\big) & \overset{H(F(f))}{\to} & H\big(F(A')\big) \\ (\delta * \eta)_A \downarrow & /\!/\!/ & \downarrow (\delta * \eta)_{A'} \\ K\big(G(A)\big) & \overset{K(G(f))}{\to} & K\big(G(A')\big) \end{array}$$

è commutativo. Infatti:

$$\begin{aligned} K\big(G(f)\big) \circ (\delta * \eta)_A &= K\big(G(f)\big) \circ K(\eta_A) \circ \delta_{F(A)} \\ &= K\big(G(f) \circ \eta_A\big) \circ \delta_{F(A)} = (*) \end{aligned}$$

e per la commutatività del seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \overset{F(f)}{\to} & F(A') \\ \eta_A \downarrow & /\!/\!/ & \downarrow \eta_{A'} \\ G(A) & \overset{G(f)}{\to} & G(A') \end{array}$$

si ha

$$(*) = K\big(\eta_{A'} \circ F(f)\big) \circ \delta_{F(A)} = K(\eta_{A'}) \circ K\big(F(f)\big) \circ \delta_{F(A)} = (**)$$

per la commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccc} H\big(F(A)\big) & \overset{H(F(f))}{\rightarrow} & H\big(F(A')\big) \\ \delta_{F(A)} \downarrow & /// & \downarrow \delta_{F(A')} \\ K\big(F(A)\big) & \overset{K(F(f))}{\rightarrow} & K\big(F(A')\big) \end{array}$$

$$(**) = K(\eta_{A'}) \circ \delta_{F(A')} \circ H\big(F(f)\big) = (\delta * \eta)_{A'} \circ H\big(F(f)\big)$$

ovvero la tesi.

PROPOSIZIONE 1.8.7. *Se* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *è un funtore allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(*i*) F *è pieno, fedele e denso.*
(*ii*) F *è un'equivalenza.*
(*iii*) *Esiste un funtore* $G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ *ed esistono due isomorfismi naturali* $\eta : 1_{\mathbf{A}} \to G \circ F$, $\varepsilon : F \circ G \to 1_{\mathbf{B}}$ *tali che*

$$F \overset{1_F * \eta}{\rightarrow} F \circ G \circ F \overset{\varepsilon * 1_F}{\rightarrow} F = F \overset{1_F}{\rightarrow} F,$$

e

$$G \overset{\eta * 1_G}{\rightarrow} G \circ F \circ G \overset{1_G * \varepsilon}{\rightarrow} G = G \overset{1_G}{\rightarrow} G.$$

DIMOSTRAZIONE. "$(iii) \Rightarrow (ii)$" Ovvio.

"$(ii) \Rightarrow (i)$" Per ipotesi esistono un funtore $G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ ed esistono due isomorfismi naturali $\eta : 1_{\mathbf{A}} \to G \circ F$, $\varepsilon : F \circ G \to 1_{\mathbf{B}}$.

Siano $f, g \in \mathbf{A}(A, A')$ tali che $F(f) = F(g)$, allora, dalla commutatività dei seguenti diagrammi

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{\eta_A}{\rightarrow} & G\big(F(A)\big) \\ f \downarrow & /// & \downarrow G(F(f)) \\ A' & \overset{\eta_{A'}}{\rightarrow} & G\big(F(A')\big) \end{array}$$

ed

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{\eta_A}{\rightarrow} & G\big(F(A)\big) \\ g \downarrow & /// & \downarrow G(F(g)) \\ A' & \overset{\eta_{A'}}{\rightarrow} & G\big(F(A')\big) \end{array}$$

segue che

$$F(f) = F(g) \;\Rightarrow\; \eta_{A'} \circ f = \eta_{A'} \circ g \;\Rightarrow\; f = g$$

ovvero si ha che F è fedele.

Analogamente si prova che G è fedele.

Sia, ora, $B \in |\mathbf{B}|$ e sia $A = G(B)$. Poiché ε è un isomorfismo naturale si ha che $\varepsilon_B : F(A) = F\big(G(B)\big) \to B$ è un isomorfismo, da cui segue che F è denso.

Siano, $A, A' \in |\mathbf{A}|$ e $g : F(A) \to F(A')$, allora

$$A \overset{\eta_A}{\to} G\big(F(A)\big) \overset{G(g)}{\to} G\big(F(A')\big) \overset{\eta_{A'}^{-1}}{\to} A'.$$

Posto

$$f = \eta_{A'}^{-1} \circ G(g) \circ \eta_A : A \to A'$$

poiché η è un isomorfismo naturale si ha

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{\eta_A}{\to} & G\big(F(A)\big) \\ f \downarrow & /\!/\!/ & \downarrow G(F(f)) \\ A' & \overset{\eta_{A'}}{\to} & G\big(F(A')\big) \end{array}$$

da cui poiché G è fedele si ha

$$\begin{aligned} G\big(F(f)\big) \circ \eta_A = \eta_{A'} \circ \eta_{A'}^{-1} \circ G(g) \circ \eta_A \Rightarrow\ & G\big(F(f)\big) = G(g) \\ \Rightarrow\ & F(f) = g \end{aligned}$$

ovvero F è pieno.

"$(i) \Rightarrow (iii)$" Sia $\mathbf{E}$ una classe rappresentativa degli oggetti di $\mathbf{A}$.

Poiché F è denso, $\forall B \in |\mathbf{B}|\ \exists A \in |\mathbf{A}|$ tale che $F(A) \cong B$. Sia $G(B)$ l'unico oggetto di $\mathbf{E}$ per il quale $A \cong G(B)$, allora $B \cong F(A) \cong F\big(G(B)\big)$. Si ottiene così

$$G : |\mathbf{B}| \to |\mathbf{A}|.$$

Scegliamo, inoltre, $\forall B \in |\mathbf{B}|$, un isomorfismo $\epsilon_B : F\big(G(B)\big) \to B$. Sia, ora, $g : B \to B'$ un morfismo in $\mathbf{B}$; considerato

$$\epsilon_{B'}^{-1} \circ g \circ \epsilon_B : F\big(G(B)\big) \to F\big(G(B')\big)$$

in $\mathbf{B}$, poiché F è fedele e pieno, $\exists| f : G(B) \to G(B')$ tale che $F(f) = \epsilon_{B'}^{-1} \circ g \circ \epsilon_B$. Posto $G(g) = f$ otteniamo

$$G : \mathcal{M}or(\mathbf{B}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{A}).$$

Osserviamo che $\forall g \in \mathbf{B}(B, B')$ si ha $F\big(G(g)\big) = \epsilon_{B'}^{-1} \circ g \circ \epsilon_B$.

G è un funtore da $\mathbf{B}$ in $\mathbf{A}$, infatti:

- $\forall B, B' \in |\mathbf{B}|$, $\forall g : B \to B'$ risulta $G(g) : G(B) \to G(B')$.
- $\forall B \in |\mathbf{B}|$,

$$F(G(1_B)) = \epsilon_B^{-1} \circ 1_B \circ \epsilon_B = 1_{F(G(B))} = F(1_{G(B)})$$

da cui, essendo F fedele, si ottiene $G(1_B) = 1_{G(B)}$.

- $\forall g \in \mathbf{B}(B, B')$, $\forall g' \in \mathbf{B}(B', B'')$ si ha

$$\begin{aligned} F\big(G(g' \circ g)\big) &= \epsilon_{B''}^{-1} \circ g' \circ g \circ \epsilon_B \\ &= (\epsilon_{B''}^{-1} \circ g' \circ \epsilon_{B'}) \circ (\epsilon_{B'}^{-1} \circ g \circ \epsilon_B) \\ &= F\big(G(g')\big) \circ F\big(G(g)\big) \\ &= F\big(G(g') \circ G(g)\big) \end{aligned}$$

da cui, poiché F è fedele, si ottiene $G(g' \circ g) = G(g') \circ G(g)$.

Inoltre $\epsilon = (\epsilon_B)_{B \in |\mathbf{B}|}$ è una trasformazione naturale da $F \circ G$ in $1_{\mathbf{B}}$, infatti $\forall g \in \mathbf{B}(B, B')$ si ha che il diagramma seguente

$$\begin{tikzcd} F\big(G(B)\big) \arrow[r, "\epsilon_B"] \arrow[d, "F(G(g))"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & B \arrow[d, "g"] \\ F\big(G(B')\big) \arrow[r, "\epsilon_{B'}"] & B' \end{tikzcd}$$

è commutativo in quanto, per definizione, $F\big(G(g)\big) = \epsilon_{B'}^{-1} \circ g \circ \epsilon_B$.

Sia, ora, $A \in |\mathbf{A}|$. Poiché $\epsilon_{F(A)} : F\big(G(F(A))\big) \to F(A)$ è un isomorfismo, allora si ha $\epsilon_{F(A)}^{-1} : F(A) \to F\big(G(F(A))\big)$ ed essendo F fedele e pieno, si ha che $\exists | \eta_A : A \to G\big(F(A)\big)$ isomorfismo tale che $F(\eta_A) = \epsilon_{F(A)}^{-1}$.

Proviamo che $\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathbf{A}|}$ è un isomorfismo naturale da $1_{\mathbf{A}}$ in $G \circ F$. Sia, quindi, $f \in \mathbf{A}(A, A')$; poiché ϵ è un isomorfismo naturale risulta

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\epsilon_{F(A)}^{-1}"] \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & F\big(G(F(A))\big) \arrow[d, "F(G(F(f)))"] \\ F(A') \arrow[r, "\epsilon_{F(A')}^{-1}"] & F\big(G(F(A'))\big) \end{tikzcd}$$

da cui, essendo $F(\eta_A) = \epsilon_{F(A)}^{-1}$ risulta $F(\eta_{A'} \circ f) = F\big(G(F(f)) \circ \eta_A\big)$ e quindi, essendo F fedele si ha $\eta_{A'} \circ f = G\big(F(f)\big) \circ \eta_A$, ovvero si ha il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & G\big(F(A)\big) \arrow[d, "G(F(f))"] \\ A' \arrow[r, "\eta_{A'}"] & G\big(F(A')\big) \end{tikzcd}$$

cioè η è un isomorfismo naturale.

Infine si ha

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "1_{\mathbf{A}}"] \arrow[d, "\eta"'] & \mathbf{A} \arrow[r, "F"] & \mathbf{B} \arrow[d, "1_F"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "G \circ F"] & \mathbf{A} \arrow[r, "F"] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

quindi si può costruire $1_F * \eta : F \to F \circ G \circ F$ e in particolare se $A \in |\mathbf{A}|$, dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \stackrel{1_{F(A)}}{\rightarrow} & F(A) \\ {\scriptstyle F(\eta_A)} \downarrow & /// & \downarrow {\scriptstyle F(\eta_A)} \\ F\big(G(F(A))\big) & \stackrel{1_{F(G(F(A)))}}{\rightarrow} & F\big(G(F(A))\big) \end{array}$$

si ha $(1_F * \eta)_A = F(\eta_A) \circ 1_{F(A)} : F(A) \to F\big(G(F(A))\big)$.

D'altra parte si ha

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} \stackrel{F}{\rightarrow} & \mathbf{B} & \stackrel{F \circ G}{\rightarrow} \mathbf{B} \\ & {\scriptstyle 1_F}\downarrow & \downarrow {\scriptstyle \epsilon} \\ \mathbf{A} \stackrel{F}{\rightarrow} & \mathbf{B} & \stackrel{1_{\mathbf{B}}}{\rightarrow} \mathbf{B} \end{array}$$

quindi si può costruire $\epsilon * 1_F : F \circ G \circ F \to F$ e in particolare, se $A \in |\mathbf{A}|$, dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} F\big(G(F(A))\big) & \stackrel{\epsilon_{F(A)}}{\rightarrow} & F(A) \\ {\scriptstyle 1_{F(G(F(A)))}} \downarrow & /// & \downarrow {\scriptstyle 1_{F(A)}} \\ F\big(G(F(A))\big) & \stackrel{\epsilon_{F(A)}}{\rightarrow} & F(A) \end{array}$$

si ha $(\epsilon * 1_F)_A = 1_{F(A)} \circ \epsilon_{F(A)} = (\epsilon^{-1}_{F(A)} \circ 1_{F(A)})^{-1} = (F(\eta_A) \circ 1_{F(A)})^{-1}$ da cui $F \stackrel{1_F * \eta}{\rightarrow} F \circ G \circ F \stackrel{\epsilon * 1_F}{\rightarrow} F = F \stackrel{1_F}{\rightarrow} F$.

Analogamente $G \stackrel{\eta * 1_G}{\rightarrow} G \circ F \circ G \stackrel{1_G * \epsilon}{\rightarrow} G = G \stackrel{1_G}{\rightarrow} G$.

□

Esempio 1.8.8. Fissato un campo $\mathbb{K}$, la categoria degli spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{K}$ è equivalente alla categoria delle matrici $\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}$ mediante il funtore

$$F : \mathbf{Vecf} \to \mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}$$

definito $\forall V \in |\mathbf{Vecf}|$ e $\forall f \in \mathbf{Vecf}(V, W)$ ponendo, dopo aver fissato una base in ogni spazio vettoriale,

$$F(V) = dim(V) \ \text{ ed } \ F(f) = M(f)$$

dove $M(f)$ è la matrice associata ad f rispetto a due basi fissate rispettivamente in V e W.

Osservazione 1.8.9. Una equivalenza F tra due categorie $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, essendo un funtore fedele, pieno e denso conserva e riflette le principali proprietà dei morfismi.

Per questo si considerano proprietà categoriali quelle che sono invarianti per equivalenze.

Definizione 1.8.10. *Se $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ e $G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ sono due funtori, si dice che F è* ***aggiunto a sinistra*** *di G o che G è* ***aggiunto a destra*** *di F o che F e G formano un'****aggiunzione****, e si scrive*

$$F \dashv G$$

se esistono

$$\eta : 1_{\mathbf{A}} \to G \circ F$$
$$\varepsilon : F \circ G \to 1_{\mathbf{B}}$$

trasformazioni naturali tali che

$$F \overset{1_F * \eta}{\to} F \circ G \circ F \overset{\varepsilon * 1_F}{\to} F = F \overset{1_F}{\to} F,$$

e

$$G \overset{\eta * 1_G}{\to} G \circ F \circ G \overset{1_G * \varepsilon}{\to} G = G \overset{1_G}{\to} G.$$

η e ε sono dette, rispettivamente, ***unità*** *e* ***counità*** *dell'aggiunzione.*

Esempio 1.8.11. Se $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ sono categorie ordinate allora

$F : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ è un funtore $\Leftrightarrow F : X \to Y$ è isotona.

"$\Rightarrow$" Siano $(x, x') \in \leq$ cioè $x \leq x'$. Poiché F è un funtore si ha che $(F(x), F(x')) \in \leq$, ovvero $F(x) \leq F(x')$ cioè $F : X \to Y$ è isotona.

"$\Leftarrow$" Ovviamente $F : X \to Y$, essendo isotona, individua univocamente una funzione $F : \leq \to \leq'$ con cui costituisce una coppia di funzioni che rappresenta un funtore $F : (X, \leq) \to (Y, \leq)$.

Se $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ sono categorie ordinate e $F : X \to Y$ e $G : X \to Y$ sono funtori da $(X, \leq)$ in $(Y, \leq)$, allora affinchè esista una trasformazione naturale da F in G è necessario e sufficiente che $\forall x \in X$ esista un morfismo in $(Y, \leq)$ da $F(x)$ in $G(x)$, cioè risulti

$$F(x) \leq G(x).$$

Le condizioni della proprietà (2) delle trasformazioni naturali, infatti, sono automaticamente verificate poiché pongono dei vincoli sui risultati della composizione, che però in questo caso sono univocamente determinati.

Se $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ sono categorie ordinate e $F : X \to Y$ e $G : Y \to X$ sono funtori da $(X, \leq)$ in $(Y, \leq)$ e da $(Y, \leq)$ in $(X, \leq)$ rispettivamente, allora la relazione $F \dashv G$ equivale, semplicemente, al verificarsi delle seguenti relazioni:

$$\textbf{(ADI)} \quad x \leq G(F(x)), \ \forall x \in X$$
$$\textbf{(ADII)} \quad F(G(y)) \leq y, \ \forall y \in Y$$

dette **disuguaglianze di aggiunzione**.

Esempio 1.8.12. Siano A e B insiemi ed $f : A \to B$ un'applicazione da A in B e siano

$$f^{\to} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$$

ed

$$f^{\leftarrow} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$$

rispettivamente gli operatori powerset diretto ed inverso associati ad f, definiti rispettivamente negli esempi 1.6.3 (g) ed 1.6.5 (a).

$f^{\to} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ è un'applicazione isotona fra gli insiemi ordinati $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ e $(\mathcal{P}(B), \subseteq)$, così come $f^{\leftarrow} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ è un'applicazione isotona da $(\mathcal{P}(B), \subseteq)$ in $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$.

Inoltre, poiché
$$X \subseteq f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(X)), \ \forall X \subseteq A$$
ed
$$Y \supseteq f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(Y)), \ \forall Y \subseteq B$$
ovvero si verificano (**ADI**) ed (**ADII**), allora
$$f^{\rightarrow} \dashv f^{\leftarrow}.$$

Vedremo in seguito ulteriori proprietà di questi operatori che saranno anche considerati in contesti molto più generali.