

Convegno Nazionale
Matematica senza Frontiere
Lecce, 5-8 marzo 2003

Predicibilità, Impredicibilità e Modelli nelle Scienze Naturali

Francesco Paparella

Dipartimento di Matematica "E. de Giorgi" - Università di Lecce
francesco.paparella@unile.it

Sommario

L'impredicibilità di fenomeni naturali descritti da modelli matematici deterministici è causata dalla dipendenza sensibile alle condizioni iniziali. Con alcuni semplici esempi si intende illustrare come, per fenomeni che esibiscono più di una scala temporale caratteristica, e che sono descrivibili con modelli composti da sottosistemi accoppiati, le proprietà di predicibilità dipendono in maniera cruciale anche dalla scelta del margine di errore ammissibile nella previsione. Queste proprietà sono ben caratterizzate dal FSLE (*Finite Size Lyapunov Exponent*).

Un evidente paradosso si dispiega quasi quotidianamente ai nostri occhi ogni volta in cui si parla di mutamenti del clima e di meteorologia. Da una parte con gran forza e martellante assiduità, ci viene detto che la continua emissione nell'atmosfera di gas serra sta ineluttabilmente provocando un riscaldamento globale, i cui nefasti effetti sono stati previsti fino ad oltre il 2100; dall'altra, con quasi altrettanta religiosa fiducia, si sente ripetere che le previsioni meteorologiche tendono ad avere un alto margine di errore non appena si tenta di estenderle a periodi superiori ai due o tre giorni, e che esse sono del tutto inattendibili se le si estende a periodi superiori alle due settimane.

Qual è, dunque, la differenza tra previsioni *climatologiche*, e previsioni *meteorologiche*? Che cosa rende, all'interno del medesimo sistema fisico, alcuni aspetti molto più predicibili di altri? Sebbene in questo articolo si parlerà quasi solo di meteorologia e di climatologia, questo dilemma si ripete in molte altre situazioni. Infatti, non solo nelle scienze fisiche, ma anche in biologia ed in economia, esistono molti esempi di sistemi la cui evoluzione temporale è scarsamente predicibile, anche nel caso in cui essi siano governati da leggi esprimibili matematicamente sotto forma di equazioni differenziali per le quali esistono teoremi di esistenza ed unicità delle soluzioni. La teoria che spiega come equazioni formalmente deterministiche possono generare soluzioni impredicibili è la celeberrima *teoria del caos*. Tuttavia, solo una interpretazione particolarmente *naïve* e semplicistica dei suoi risultati può far credere che nulla di attendibile possa essere detto riguardo

all'evoluzione a lungo termine di un sistema dinamico. Molti dei sistemi caratterizzati dall'essere imprevedibili in forma dettagliata spesso mostrano delle caratteristiche generali il cui andamento può essere affidabilmente estrapolato su periodi medio-lunghi.

Finora, per introdurre velocemente l'argomento senza appesantire troppo il discorso, si è intenzionalmente evitato di definire con precisione i concetti a cui si è accennato. In effetti, le storture dell'approccio *naïve* sono spesso dovute ad una certa disattenzione nei riguardi di alcuni dettagli cruciali. Per rendere evidente questo problema, sosterrò, provocatoriamente, la seguente tesi:

Il tempo meteorologico è uno dei fenomeni più predicibili conosciuti in natura.

Per illustrare questa asserzione è utile dare uno sguardo alla figura 1, dove

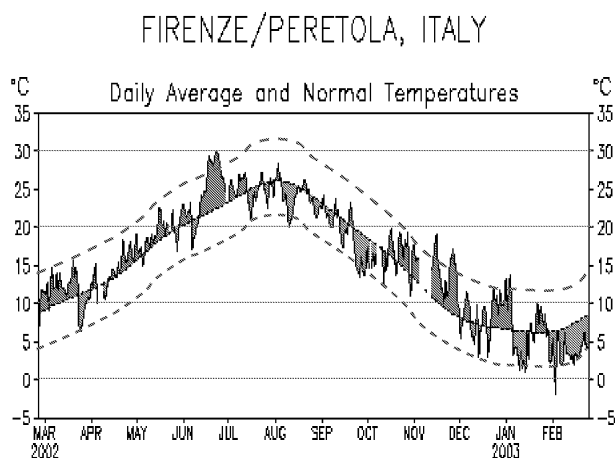


Figura 1: Temperatura media giornaliera registrata a Firenze-Peretola da Marzo 2002 a Marzo 2003. La linea nera con andamento regolare è la media climatologica, le aree rosse e blu indicano i periodi in cui la temperatura è stata, rispettivamente, superiore o inferiore alla media. Le linee verdi tratteggiate delimitano il margine di errore di $\pm 5^\circ\text{C}$ rispetto alla media.

è riportata la temperatura rilevata a Firenze-Peretola da Marzo 2002 a Marzo 2003 [1]. È evidente che, se si accetta un margine di errore di $\pm 5^\circ\text{C}$ rispetto alla media, l'andamento della temperatura è stato prevedibilissimo. Per esempio, la previsione “la temperatura media giornaliera in Agosto a Firenze-Peretola sarà di 25°C ” si è rivelata pienamente azzeccata nel 2002. Naturalmente Firenze non è un caso eccezionale.

In quasi ogni altra parte del mondo le temperature giornaliere non si discostano mai troppo dalle medie stagionali. Né si devono considerare inutili le sia pure grossolane indicazioni fornite dalle medie climatologiche. Esse,

ad esempio, sono alla base di molte scelte progettuali compiute da architetti ed ingegneri prima di costruire edifici, ponti e strade. È interessante notare che, sulla scala naturale delle temperature (la scala di Kelvin, che parte da $-273\text{ }^{\circ}\text{C}$) una incertezza di $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ rappresenta un potenziale errore di circa il 3%. Sebbene questo intervallo di temperature sia sufficiente a fare la differenza tra una piacevole giornata tiepida ed una insopportabile giornata d'afa, si deve riconoscere che in molte altre discipline, dall'astronomia, alla geologia, all'ecologia, è ben raro riuscire a fare delle predizioni con una accuratezza migliore del 3%. Da questo punto di vista, si potrebbe concludere che gli imprevedibili fenomeni meteorologici sono minime fluttuazioni intorno ad andamenti medi (il ciclo annuale, in questo caso) molto ben determinati.

Il messaggio chiave di questo esempio è che, per quantificare la predicibilità di un qualunque fenomeno, è necessario stabilire il margine di incertezza accettabile entro il quale la previsione può essere considerata valida, cioè rappresentativa di ciò che effettivamente si verifica (o meno) in realtà. Alla luce di ciò, ha poco senso parlare di fenomeni predicibili o imprevedibili *di per sé*; la predicibilità dipende in modo cruciale anche dalla scelta del margine d'errore.

Per definire formalmente come si valuta la predicibilità di un sistema fisico (o biologico, o economico) è necessario innanzitutto definire un modello matematico che lo descriva. In una larga maggioranza di situazioni il modello può assumere la forma di sistema dinamico, costituito dall'insieme Ω di tutti gli stati che il sistema può assumere, detto *spazio delle fasi*, e da una *regola di evoluzione* che determina come lo stato del sistema cambia nel tempo (cfr. p.es. [2]). Per *stato* del sistema si intende un vettore $\mathbf{x}(t)$ contenente in una sequenza ordinata i valori di tutte le variabili rilevanti. La regola di evoluzione è usualmente data sotto forma di equazione differenziale ordinaria

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

dove \mathbf{F} è una funzione vettoriale tale che l'equazione (1) soddisfi i criteri per l'esistenza e l'unicità delle soluzioni nel dominio Ω . A questa forma si possono ricondurre facilmente anche i sistemi dinamici non autonomi (ovvero quelli in cui \mathbf{F} dipende esplicitamente dal tempo). Anche i sistemi dinamici definiti da una equazione differenziale alle derivate parziali possono essere formalmente ricondotti alla forma (1), purché si accetti di lavorare con vettori di stato di dimensione infinita. Una ulteriore categoria di sistemi dinamici è data dalle mappe (sistemi dinamici a tempo discreto), per le quali la regola di evoluzione assume la forma

$$\mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_n)). \tag{2}$$

In questo caso lo stato del sistema è definito solo ai tempi $\{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$. Ciò che accomuna questi modi diversi (ma largamente equivalenti) di costruire dei modelli matematici della realtà, è la loro natura *deterministica*:

conoscendo con esattezza infinita lo stato del sistema ad un istante dato, le equazioni (1) o (2) determinano univocamente lo stato del sistema ad ogni istante successivo. L'impredicibilità dei sistemi dinamici non è intrinseca al sistema, ma è causata da errori ed approssimazioni nella determinazione delle condizioni iniziali¹.

Definiamo *orbita* di \mathbf{x}_0 la sequenza temporale degli stati che il sistema assume se si usa \mathbf{x}_0 come condizione iniziale. Per una vastissima classe di sistemi dinamici (i sistemi dinamici dissipativi) si trova che il moto asintotico delle orbite per $t \rightarrow \infty$ è confinato su di un sottinsieme di misura nulla dello spazio delle fasi, detto *attrattore*. La predicibilità di un sistema dinamico è riconducibile a quanto velocemente si separano orbite distinte, inizialmente vicine, ed appartenenti allo stesso attrattore. Infatti, detta $\delta(0)$ (cfr. figura 2) la separazione iniziale fra due punti dello spazio delle fasi, \mathbf{x}_0 e $\mathbf{x}_0 + \delta(0)$, si

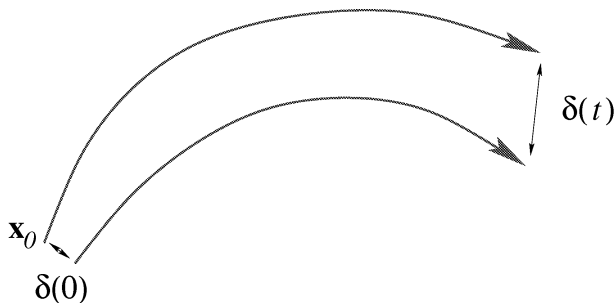


Figura 2: Due orbite nello spazio delle fasi, una originata dalla condizione iniziale \mathbf{x}_0 , l'altra originata da $\mathbf{x}_0 + \delta(0)$. Le proprietà di predicibilità di un sistema dinamico dipendono da quanto rapidamente si separano orbite inizialmente vicine nello spazio delle fasi.

trova che la separazione $\delta(t)$ fra le loro orbite ha un andamento esponenziale

$$\|\delta(t)\| \approx \|\delta(0)\| e^{\lambda t} \quad (3)$$

se si sceglie $\delta(0)$ di modulo sufficientemente piccolo. L'esponente λ è detto esponente di Lyapunov e può essere stimato tramite il seguente limite

$$\lambda = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \|\delta(0)\| \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta(t)\|}{\|\delta(0)\|}. \quad (4)$$

¹Esiste un'altra vasta classe di modelli matematici, i *sistemi stocastici*, in cui l'indeterminazione degli stati futuri è intrinseca al modello: la conoscenza dello stato del sistema al tempo presente determina solo la probabilità che un certo stato si presenti in futuro, ma non lo determina con certezza. La discussione delle proprietà di predicibilità dei modelli stocastici si discosta in parte da quanto stiamo per esporre, ed è al di fuori dello scopo di questo articolo.

Si può dimostrare che il valore di λ non dipende dalla particolare scelta della condizione iniziale, ma che esso è un numero che caratterizza un intero attrattore [3] (questa proprietà è spesso nota come *proprietà ergodica* degli attrattori).

L'impredicibilità scaturisce nel caso, assai comune, in cui si trovi $\lambda > 0$. Si dice, allora, che il sistema dinamico esibisce una *dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali*. Infatti, poiché non si può individuare sperimentalmente lo stato del sistema ad un dato istante, ma si può solo dire che esso giace entro una distanza dallo stato misurato pari al margine di errore della misura, ne consegue che l'orbita calcolata usando lo stato misurato come condizione iniziale divergerà esponenzialmente dall'orbita effettivamente seguita dal sistema reale. L'esponente di Lyapunov quantifica la rapidità di questa divergenza, ed è spesso utile introdurre il tempo di Lyapunov

$$T_\lambda = \frac{1}{\lambda}. \tag{5}$$

Nel caso dei più semplici sistemi dinamici che esibiscono dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali, non è errato identificare in T_λ il tempo tipico di predicibilità. Tuttavia generalizzare questa assunzione può essere fuorviante. Ancora una volta l'atmosfera terrestre fornisce un buon controesempio. Infatti, da un lato le previsioni meteorologiche sono sufficientemente affidabili su tempi scala dell'ordine dei tre giorni, dall'altro il tempo di Lyapunov per l'atmosfera è dell'ordine del secondo.

Siamo ricaduti nello stesso paradosso illustrato poco sopra, la cui soluzione, ancora una volta, consiste nell'ammettere che il tempo di predicibilità dipende anche dal margine di incertezza delle misure.

Riconsiderando l'espressione (4) si noterà che essa è formalmente valida per separazioni iniziali $\delta(0)$ infinitesimali. Nulla garantisce che, se le separazioni iniziali $\delta(0)$ sono finite, la divergenza delle orbite sia ben caratterizzata da λ .

Il concetto di esponente di Lyapunov è stato recentemente generalizzato dal prof. Angelo Vulpiani e dai suoi collaboratori, in modo da ottenere delle stime del tempo di predicibilità valide anche per separazioni iniziali non infinitesimali [4, 5]. A questo scopo si introduce il tempo $T_r(\mathbf{x}, \delta)$ necessario affinché la coppia di orbite aventi come condizioni iniziali \mathbf{x} ed $\mathbf{x} + \delta$ sia separata da una distanza pari a $r \|\delta\|$, dove r è una costante maggiore dell'unità². Quindi si definisce l'esponente di Lyapunov a scala finita (FSLE, *Finite Size Lyapunov Exponent*) come

$$\lambda_\delta = \left\langle \frac{1}{T_r(\mathbf{x}(t), \delta)} \right\rangle \log(r) \tag{6}$$

dove le parentesi angolari indicano una media temporale estesa su di un intervallo di tempo infinito (ancora una volta la proprietà ergodica degli

²È una scelta comune porre $r = 2$; $T_2(\mathbf{x}, \delta)$ è detto *tempo di raddoppio dell'errore*.

attrattori garantisce che il risultato è indipendente dalla scelta della condizione iniziale dalla quale parte l'orbita $\mathbf{x}(t)$). Il valore numerico di λ_δ può dipendere dall'orientazione del vettore δ nello spazio delle fasi. In tal caso è spesso utile riformulare la definizione (6) imponendo che δ sia scelto giacente lungo la direzione che rende massimo λ_δ . Con questa ulteriore richiesta si può dimostrare che, se il sistema dinamico ammette un esponente di Lyapunov positivo, il FSLE si riconduce ad esso nel limite $\delta \rightarrow 0$.

Pertanto, l'FSLE quantifica il tipico tempo necessario affinché una perturbazione di magnitudine $\|\delta\|$ cresca di un fattore r e quindi, coerentemente con quanto avevamo intuito in precedenza, quantifica la predicibilità tenendo in conto sia della dinamica del sistema che del margine di incertezza imposto dalle misure (o scelto dall'osservatore).

Il FSLE si rivela particolarmente efficace per quantificare la predicibilità di sistemi dinamici composti da più sottosistemi accoppiati, come illustrato nel seguente esempio. Consideriamo la mappa $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= [(1 - \varepsilon) e^{\lambda_s} x_n + \varepsilon \cos(2\pi(x_n + y_n))] \bmod 1 \\ y_{n+1} &= [(1 - \varepsilon) e^{\lambda_f} y_n + \varepsilon \cos(2\pi(x_n + y_n))] \bmod 1 \end{aligned} \quad (7)$$

composta accoppiando due mappe del tipo

$$x_{n+1} = e^{\lambda_m} x_n \bmod 1 \quad (8)$$

tramite il parametro ε (i risultati che esporremo non dipendono in modo cruciale dalla forma funzionale del termine di accoppiamento, che qui è scelto essere una funzione trigonometrica). Si può dimostrare analiticamente che l'esponente di Lyapunov della mappa (8) è dato dalla costante λ_m . Pertanto, il sistema dinamico (7) è dominato da due distinte scale temporali, una data da λ_s^{-1} , l'altra da λ_f^{-1} . Poiché nel seguito sceglieremo $\lambda_s < \lambda_f$, chiameremo *lenta* la variabile x e *veloce* la variabile y . Anche se perturbata dalla presenza del sottosistema veloce, ci aspettiamo che la dinamica lenta descritta dalla variabile x sia maggiormente predicibile di quella descritta da y .

Procedendo al calcolo del FSLE per il sistema dinamico (7) si ottiene il risultato riportato in figura 3. Per $\|\delta\| < \varepsilon$ il FSLE approssima l'esponente di Lyapunov del sottosistema veloce. Per $\|\delta\| > \varepsilon$ il FSLE approssima l'esponente di Lyapunov del sottosistema lento. Le implicazioni di questo fatto sono profonde: se ci si accontenta di un margine di incertezza non inferiore a ε , i tempi di predicibilità sono determinati dal solo sottosistema lento, mentre il sottosistema veloce gioca il ruolo di un rumore che, in ogni caso, rimane sotto la soglia dell'incertezza sperimentale. Ciò suggerisce che, entro i medesimi margini di incertezza, la semplice mappa (8), posto $\lambda_m = \lambda_s$, sia un buon modello per rappresentare e prevedere la fenomenologia descritta dal sistema dinamico composto dalle mappe accoppiate (7).

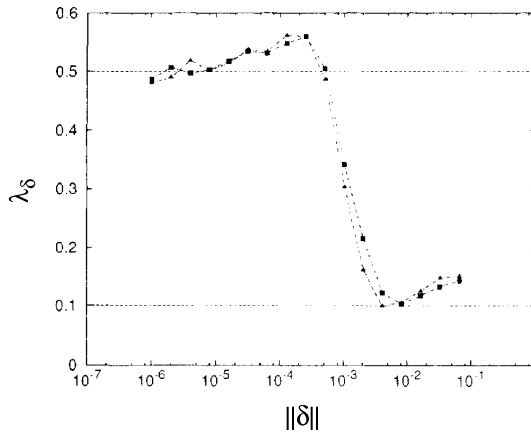


Figura 3: FSLE calcolato utilizzando le mappe accoppiate (7) con $\lambda_s = 0.1$, $\lambda_f = 0.5$, $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$. Le distanze nello spazio delle fasi sono state calcolate con la norma euclidea per la curva con i quadrati, e con la norma assoluta per la curva con i triangoli.

L'idea che alcuni fenomeni naturali siano caratterizzati da una gerarchia di scale temporali (e spaziali) non è nuova, e si è rivelata particolarmente utile in ambiti dove l'analisi teorica si scontra con notevoli difficoltà, come, per esempio, la teoria della turbolenza. Non nuova è anche l'idea che sia possibile costruire modelli semplificati che descrivono solo un limitato intervallo di scale di una fenomenologia più vasta. Questo è ciò che succede in tutti i modelli meteorologici: lungi dal descrivere i moti dell'aria fino alle loro più piccole scale (che sono dell'ordine del centimetro e del secondo) la descrizione, anche nel caso dei modelli più grandi e dettagliati, si ferma a scale dell'ordine dei 10 km e della mezz'ora. Tutta la dinamica delle scale più piccole è riassunta da *parametrizzazioni*: equazioni semplificate che approssimano la fenomenologia delle piccole scale, pur dipendendo esplicitamente dalle sole variabili "lente".

L'introduzione del FSLE fornisce un ulteriore supporto a queste linee di pensiero. Al tempo stesso è un monito contro la tendenza, sempre più marcata negli ultimi anni, alla eccessiva complicazione dei modelli. Con l'aumento della potenza dei calcolatori elettronici è possibile costruire e gestire modelli matematici estremamente complicati, contenenti un vastissimo numero di variabili e composti da molti sottosistemi distinti ed accoppiati fra loro in modo intricato. Ad esempio, un tipico modello operativo di previsione meteorologica può contenere 10^7 variabili, ed è formato da un codice idrodinamico accoppiato a modelli per la turbolenza, per la fisica dei cambiamenti di fase e per il trasporto radiativo.

Se questo sforzo è volto al tentativo di ottenere un sempre maggiore dettaglio tramite l'inclusione esplicita nel modello di scale via via più piccole e più veloci, è bene essere coscienti che ad esse è associata una progressiva

(potenzialmente drastica) riduzione del tempo di predicibilità. Nel caso meteorologico, l'orizzonte di attendibilità di tre giorni, facilmente raggiungibile quando si parla di fenomeni che hanno la scala temporale e spaziale di una tipica perturbazione (la mesoscala dei meteorologi), si riduce a poche ore se si desidera il livello di dettaglio necessario a prevedere fenomeni a scala locale, quali un temporale estivo. Ancor peggio, non è affatto garantito che l'inclusione esplicita delle piccole scale nel modello migliori la predicibilità delle grandi scale: modelli climatici molto dettagliati non sono necessariamente più attendibili di modelli climatici relativamente semplici.

In conclusione, non si può che reiterare che il concetto di predicibilità è vuoto se non si specifica il margine di errore accettabile, e, così facendo, una scala di grandezza nello spazio delle fasi associata ai fenomeni da predire. Il FSLE è un buon estimatore della predicibilità per fenomeni la cui dinamica è caratterizzata da più di una scala caratteristica, e quindi potenzialmente hanno tempi di predicibilità fortemente dipendenti dal margine di errore.

Riferimenti bibliografici

- [1] Dati NOAA / Climate Prediction Center;
http://www.cpc.noaa.gov/products/global_monitoring/temperature/global_temp_accum.html
- [2] J. Guckenheimer e P. Holmes: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields*, Springer-Verlag, Heidelberg, (1983).
- [3] D. Rouelle: *Chaotic Evolution and Strange Attractors*, Cambridge University Press, Cambridge, (1989).
- [4] E. Aurell, G. Boffetta, A. Crisanti, G. Paladin, A. Vulpiani: *Growth of noninfinitesimal perturbations in turbulence*, Phys. Rev. Lett., **77**(7), (1996) 1262.
- [5] G. Boffetta, A. Crisanti, F. Paparella, A. Provenzale, A. Vulpiani: *Slow and fast dynamics in coupled systems: a time series analysis view*, Physica D, **116**, (1998) 301.