Convegno Nazionale
Matematica senza Frontiere
Lecce, 5-8 marzo 2003

Il ruolo delle tecnologie informatiche nella formazione matematica degli studenti liceali

Andrea Laforgia
Dipartimento di Matematica - Università di Roma 3
laforgia@mat.uniroma3.it

1 Introduzione

Il nuovo ordinamento didattico universitario, vigente su tutto il territorio nazionale, ha determinato cambiamenti radicali nei singoli corsi di studio. In molti di questi, specialmente quelli di Ingegneria e di Economia, dove la matematica è solitamente definita "di servizio", non vi è più, a differenza del passato, la possibilità di contribuire neppure marginalmente, alla formazione delle figure professionali. Le poche ore a disposizione, consentono al docente soltanto una trattazione superficiale degli argomenti. E se qualche ostinato docente si sofferma, per esempio, sul concetto di limite, cioè sul concetto chiave di tutta l'Analisi matematica, perché ritiene essenziale puntualizzarne alcuni aspetti, questa sua iniziativa ha inevitabili conseguenze sulla trattazione degli argomenti successivi.
Un'analisi abbastanza dettagliata su questi problemi è stata fatta in due convegni organizzati in collaborazione tra Mathesis e Pristem, in giugno e in settembre 2002, rispettivamente a Pugnochiuso e a Tropea. Durante i lavori di questi due convegni è stato illustrato lo stato dei corsi di servizio in diverse facoltà (prevalentemente Ingegneria, Economia, Architettura, Agraria...) ed è emersa una situazione abbastanza omogenea nelle sedi considerate: i tagli al numero dei corsi di matematica in queste facoltà, è analogo in tutte le sedi, senza sostanziali differenze tra università pubblica e privata, tra nord e sud del paese, tra facoltà giovani e meno giovani. La cosa che emerge da queste analisi e che più preoccupa, comunque, non è tanto il taglio al numero complessivo delle ore, quanto la scelta "politica" adottata: la matematica non partecipa più alla formazione complessiva dell'ingegnere, dell'economista, dell'architetto, del biologo, ...
Alle nuove figure professionali che si formeranno col 3+2 (tre anni per il conseguimento della laurea di primo livello, più due anni per quella di secondo livello), serviranno soltanto alcune superficiali conoscenze di matematica, meglio se correlate a una certa versatilità nell'uso del computer. Noi siamo fermamente convinti che, alla lunga, queste scelte produrranno danni irreparabili alla cultura, all'arte e alla formazione umana e professionale dell'uomo di domani. Anche la cultura umanistica risentirà sensibilmente

della scarso interesse verso la matematica, oggi manifestato dai responsabili di questa scelta. Si, perché la matematica partecipa eccome alla formazione umanistica dell'uomo. Qui basterà citare il fatto, ormai pienamente acquisito, che il linguaggio specifico della matematica fornisce un contributo insostituibile alla formazione linguistica; oppure ricordare la strettissima correlazione tra l'evoluzione scientifica e quella della condizione umana.
Comunque sia, non c'è dubbio che questi cambiamenti inducano forti scosse al complessivo impianto educativo. Queste si riflettono immediatamente nella scuola e portano perciò a richiedere, in tempi brevi, trasformazioni radicali nei metodi e nei contenuti.

2 I possibili cambiamenti

Ma è giusto che l'insegnamento della matematica nella scuola secondaria, di cui qui specificatamente ci occupiamo, debba risentire della nuova normativa universitaria? E in ogni caso, cosa va cambiato e cosa va mantenuto nell'attuale insegnamento della matematica? Diciamo intanto cosa non va fatto. No ha alcun senso, a nostro giudizio, modificare, come oggi sta avvenendo, la prova di matematica alla maturità scientifica. In generale siamo convinti che non ha alcun senso cambiare la struttura di un esame, come quello di maturità, se tale cambiamento non è sorretto da modifiche sostanziali all'attività didattica svolta in classe. Sarebbe un po' come indossare un abito logoro, scarpe rotte, maglia e calzini bucati, e soffermarsi in un'accurata scelta del cappello, con il coinvolgimento di tutti i membri della famiglia, cercando di capire se quello a larghe falde è preferibile alla coppola, quando non si capisce neppure a cosa il cappello vada abbinato.
Non ha senso neppure la retorica discussione: calcolatrici si, calcolatrici no, all'esame di maturità. Ciò che occorre, invece, è pensare a una complessiva ristrutturazione dei corsi di matematica (non solo dei programmi), nelle scuole medie superiori. Fatto questo sarà naturale stabilire quali requisiti vadano richiesti al giovane maturando, così come altrettanto naturale sarà decidere se, per valutare le competenze raggiunte, è necessario o meno, l'uso di un qualsiasi strumento elettronico. A tale proposito, nelle scuole di ogni ordine e grado, auspichiamo un'impostazione dell'insegnamento della matematica che tenga conto delle notevoli potenzialità dello strumento elettronico. Questa scelta comporterà necessariamente l'uso delle calcolatrici, anche di quelle programmabili, nell'insegnamento della matematica e conseguentemente anche nell'esame di maturità.
Siamo insomma per un radicale cambiamento dell'insegnamento della matematica e auspichiamo l'introduzione del computer in ogni classe di ogni scuola. Ma siamo contrari, fortemente contrari, all'uso che, prevalentemente, finora s'è fatto del computer a scuola. Su questo aspetto che riteniamo essenziale dell'attività didattica, la nostra posizione sarà chiaramente illu-

strata nel paragrafo quattro.

3 Gli insegnanti e le possibili scelte didattiche

Condizioni di lavoro fortemente disagiate; a scuola tanto al mattino quanto al pomeriggio per attività spesso per niente edificanti; mancanza assoluta di servizi; stipendi inadeguati; impossibilità di produrre cultura; risorse e finanziamenti troppo spesso promessi e mai effettivamente elargiti; mortificante burocrazia ministeriale e delle direzioni generali; scelte determinate spesso da funzionari che conoscono la suola soltanto per averla frequentata qualche decennio fa, talvolta anche con scarso profitto, ma di fatto completamente estranei ai problemi della scuola e al dibattito culturale in corso; immeritata e mortificante assenza di prestigio dei docenti nella società. Sono questi soltanto alcuni dei problemi che toccano direttamente gli insegnanti e che andrebbero risolti per creare almeno le premesse di un cambiamento che dovrà essere necessariamente radicale, del sistema scolastico.
La scuola non è stata risparmiata da un generale processo involutivo che ha coinvolto l'intera società. Nella scuola ormai i bisogni sono prodotti dal marketing dell'industria e subito fatti propri da solerti docenti "al passo coi tempi". Sofisticate apparecchiature sono parcheggiate e soltanto raramente utilizzate. Esse diventano assai spesso obsolete, superate da nuovi e più efficienti prodotti che l'industria con insistenza impone. Raffinati strumenti elettronici perennemente in sosta nei locali scolastici, dove fanno bella mostra di sé, si rinnovano con gravissimo danno all'economia generale del sistema scolastico e all'intera attività didattica per niente toccata dalla pur notevole potenzialità educativa dello strumento elettronico. I danni prodotti all'intero impianto pedagogico sono gravi e ormai irreparabili.
Ogni scuola va ormai attrezzandosi per offrire ai giovani utenti, differenti attività formative. E qui ancora s'insinua il virus del superfluo e dell'effimero. Nelle scuole si organizzano laboratori extracurricolari con contenuti spesso fortemente distanti dai saperi consolidati ed essenziali che la scuola è demandata a trasmettere attraverso criteri rigorosi e sistematici. Queste attività collaterali sono legate il più delle volte, a temi non centrali, secondari e marginali della cultura, neppure di quella locale che andrebbe invece potenziata e valorizzata. L'effimero nella Scuola è spesso sostenuto in prima persona dai presidi, pardon, "dirigenti scolastici", che fanno a gara con i loro colleghi di altre scuole nel lodare le attività extracurricolari delle rispettive scuole, nelle forme più lusinghiere. In molte città essi arrivano perfino a tappezzare i muri cittadini con manifesti accattivanti. Il loro comportamento ricorda a volte quello degli agenti immobiliari che esaltano il valore di appartamenti che, in realtà, sono poco più che tuguri, o ancor di più, di quegli imbonitori televisivi che decantano i meravigliosi pregi di materassi, tappeti, affettatutto e creme miracolose.
Da questo clima di esaltazione del superfluo non è rimasta estranea nep-

pure l'ultima commissione insediatasi per conto del Ministero della Pubblica Istruzione al fine di fissare i principi essenziali connessi con il riordino dei cicli e di formulare proposte di nuovi curricoli. Le raffinatissime menti della commissione sono anch'esse cadute nella trappola dello spontaneismo, dell'effimero e del superfluo. Riferendoci ancora una volta alla matematica osserviamo che i bei programmi della Scuola media, sapientemente redatti nel 1979, ma ancora attualissimi e che tutto il mondo ancora oggi ci invidia, stanno per essere soppiantati da temi vaghi e imprecisi, dai quali non si evince neppure quali debbano essere i principi e le finalità dell'insegnamento della matematica, né su quali cardini esso debba poggiarsi.
L'acquisizione del metodo scientifico da parte dell'alunno, obiettivo qualificante ed essenziale del processo educativo, secondo le indicazioni generali enunciate nei programmi della Scuola media del 1979, raggiungibile, come giustamente precisa l'estensore, "*attraverso un'attività sperimentale stimolante che possa indirizzare alla sistematicità, grazie alla progressiva maturazione dei processi astrattivi; l'impegno degli allievi in momenti operativi, indagini e riflessioni opportunamente guidati e integrati dall'insegnante, ...*", cardini solidi sui quali l'insegnamento della matematica nella scuola dell'obbligo si poggia, sono ora sostituiti da ovvie affermazioni di principio, più o meno simili a quelle che ciascuno può ascoltare dalle mamme in attesa dei propri figli all'uscita della scuola: "*le singole scuole devono capire da che ambiente vengono gli alunni, cosa hanno bisogno di imparare*", oppure "*il linguaggio scientifico, sempre più essenziale" (si noti il sempre più), "per l'acquisizione di una corretta capacità di giudizio*", e ancora "*gli aspetti ludici possono parimenti fornire situazioni di apprendimento significative per gli allievi e contribuire all'immagine di una matematica dal volto umano*". Come a dire: la matematica è disumana e perciò è opportuno darle almeno una cornice gradevole.
Invitiamo il lettore a mettere a confronto in modo sistematico, le indicazioni generali, gli obiettivi, i suggerimenti metodologici, ... che appaiono nei programmi del 1979, con le corrispondenti indicazioni fornite dalla recente proposta dei nuovi curricoli. Egli potrà constatare da sé l'altissimo valore educativo e la solidità scientifica e pedagogica dei primi e, nello stesso tempo, la fragilità e la precarietà complessive dei secondi.
Se la commissione e il ministro non apporteranno a questi ultimi sostanziali modifiche, allora ci permettiamo di suggerire agli insegnanti di disattendere qualsiasi indicazione metodologica e di continuare, il più possibile, ad affrontare i temi della matematica nella scuola dell'obbligo, cosìcome hanno fatto fino ad oggi, attenendosi ai programmi del '79. La società intera sarà loro grata e si eviterà un po' di effimero.

4 I computer e la matematica

Le considerazioni sviluppate in questo paragrafo sono opportunamente riprese dai lavori citati in Bibliografia.
Nelle avvertenze ai programmi d'insegnamento viene insistentemente raccomandato ai docenti di porre la massima attenzione alla cosiddetta concettualizzazione delle nozioni e quindi di tenere una condotta didattica capace di realizzare una mobilitazione del pensiero profondo; quindi di porre attenzione alla massima partecipazione degli alunni nella costituzione del patrimonio cognitivo; quindi la sostituzione del tradizionale metodo astratto-sequenziale, sistematico e addestrativo, con uno stile meno informativo, più propositivo, aperto e confidenziale nel quale trovino posto: l'osservazione, l'intuizione, il senso comune, l'ipotesi e l'errore, l'autocorrezione, la discussione, la deduzione, etc...
Generalmente questo orientamento si concretizza nella formula. Insegnamento per problemi (POLYA).

La matematica, scienza esatta per eccellenza, deve oggi ampliare nella scuola i propri metodi al fine di rendere possibili il dominio razionale degli errori e la gestione dei margini di indeterminatezza ragionevolmente prestabiliti, insegnando a sostituire alla ricerca di punti numerici, la gestione degli intorni (intervalli, dischi, sfere), più in generale insiemi aperti.
Imparare a adoperare numeri, per meglio dire intervalli numerici, esige di saper padroneggiare le disuguaglianze.
L'esigenza di una pratica precoce delle disuguaglianze, nonché delle approssimazioni, degli errori, e di valutazioni di tipo probabilistico, è presente nei programmi di matematica del '79 della scuola media italiana.
Occorre tenere in classe un'attività perfettamente integrata e funzionalmente coerente e subordinata alle strategie generali autonomamente definite dall'insegnante e da questi gestite con intelligente ricerca di nuove frontiere.

Vi sono antichi debiti da pagare: funzioni che non è mai stato possibile prendere in considerazione nonostante che appartenessero a campi di applicazione abbastanza vicini all'esperienza tecnico-scientifica, economica, ... comune; problemi non traducibili in equazioni , ma abbordabili mediante strategie empiriche; formule di quadratura; formule di approssimazione; formule iterative talvolta accennate in teoria, ma mai applicate effettivamente.
I nuovi strumenti rappresentano un mezzo per andare avanti, per progredire nel livello, nella qualità e nel risultato del lavoro didattico. Tale progresso è realizzabile soltanto a condizione che l'elaborazione elettronica dei dati acquisti i caratteri di una naturale espansione della condotta didattica, di momento necessario, un tipo di attività capace di produrre effettivamente risultati culturalmente più avanzati, non altrimenti ottenibili.

Nella fase di matematizzazione un momento fondamentale è costituito dalla costruzione del modello chiamato a interpretare matematicamente la realtà in oggetto nei suoi vari aspetti. L'esempio che segue si riferisce a una situazione in cui il problema originale si traduce in un'equazione di secondo grado.

4.1 Problema

Una discoteca ha una media giornaliera di 400 frequentatori con un costo del biglietto d'entrata pari a 2.00 E. Si stima che a ogni diminuzione di 10 c del prezzo del biglietto, la media giornaliera dei visitatori aumenta di 40 persone. A quale prezzo bisogna fissare il biglietto d'entrata affinché l'incasso giornaliero cresca di 100 E? E quale sarà in media il numero dei frequentatori con il nuovo prezzo del biglietto?
Sia x il numero di riduzioni di 10 centesimi del prezzo del biglietto affinché si abbia l'incasso desiderato.
Risulta
$2.00 - 0.10x$, nuovo prezzo del biglietto in euro;
$40x$, la crescita attesa dei visitatori;
$400 + 40x$, il numero dei visitatori attesi con il nuovo prezzo del biglietto.
Incasso desiderato: Incasso attuale $+100E = 2.00 \times 400 + 100 = 900E$. Dunque:

$$\begin{gathered}900 = (2.00 - 0.10x)(400 + 40x);\\ 900 = 800 + 40x - 4x^2;\\ x^2 - 10x + 25 = 0;\\ (x - 5)^2 = 0;\\ x = 5.\end{gathered}$$

In conclusione occorre diminuire il prezzo del biglietto di $5 \times 10\text{cent} = 50\text{cent}$ e quindi fissare il nuovo prezzo del biglietto a 1.50 E.
In corrispondenza di questo nuovo prezzo si avrà un'attesa giornaliera di:

$$400 + 40x = 600 \text{ frequentatori.}$$

Abbiamo visto precedentemente che l'uso intelligente del calcolatore nelle classi consente di affrontare problemi non altrimenti abbordabili. Ma l'uso ragionevolmente precoce della calcolatrice nelle scuole medie contribuisce alla formazione del giovane o rischia di apportare, come forse i più credono, ulteriori impoverimenti alle capacità di calcolo degli allievi? La nostra posizione a riguardo è chiarita con il seguente esempio.
Durante la soluzione di un problema si ha la necessità di eseguire la seguente moltiplicazione

$$34.91 \times 0.28.$$

Vi sono sostanzialmente due possibilità: una è quella di eseguire il calcolo secondo le note regole

$$\begin{array}{r} 3491 \\ 28 \\ \hline 27928 \\ 6982 \\ \hline 9.7748 \end{array}$$

L'altra è quella di affidarsi alla macchinetta che esegue immediatamente

$$34.91 \times 0.28 = 9.7748$$

Una terza via che noi proponiamo consiste nell'affidare il calcolo alla macchinetta, ma solo dopo aver annotato da qualche parte che deve risultare

$$34.91 \times 0.28 < 35 \times 0.3 = 10.5$$

Ricordiamo che già nei programmi di matematica del 1979 è previsto che gli alunni acquisiscano competenze su:
ordine di grandezza;
esercizi di calcolo esatto e di calcolo approssimato;
approssimazioni successive di un numero reale;
uso del calcolatore tascabile;
semplici disequazioni di primo grado.

Esempio

Qual è il più piccolo valore del parametro a tale che la disequazione sia soddisfatta per ogni valore positivo di x?

$$ax + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{7} \tag{1}$$

Soluzione

Si possono subito escludere i valori negativi di a. Si ha infatti che se $a < 0$, risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(ax + \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

e certamente la (1) non potrebbe essere soddisfatta per ogni $x > 0$. Analogamente non potrà essere $a = 0$ perché in tal caso la (1) si ridurrebbe a:

$$\frac{1}{x} \geq 2\sqrt{7}$$

che, per esempio, non è soddisfatta per $x = 1$, mentre la traccia impone che la (1) sia soddisfatta per ogni $x > 0$. Dunque deve essere $a > 0$. Osserviamo che la (1) è equivalente a:

$$ax^2 - 2\sqrt{7}x + 1 \geq 0 \tag{2}$$

Per orientarsi nel ragionamento che segue, lo studente osservi che la funzione a primo membro è rappresentata da una parabola con la concavità verso l'alto. Calcoliamo le radici del polinomio di secondo grado:

$$x_{1/2} = \frac{\sqrt{7} \pm \sqrt{7-a}}{a}$$

Chiaramente quando $a > 7$ i valori di $x_{1/2}$ sono complessi; la funzione $ax^2 - 2\sqrt{7}x + 1$ non ha intersezioni con l'asse delle ascisse e la (2) è soddisfatta per ogni valore positivo di x. Il valore più piccolo di a è perciò $a = 7$. Per tale valore di a risulta $x_1 = x_2$, $7x^2 - 2\sqrt{7}x + 1 = \sqrt{7}(x-1)^2 \geq 0$, per ogni valore della x. Dunque il richiesto valore è $a = 7$.

Esempio

Mostrare che l'equazione:

$$\int_1^x \frac{3^t}{3+t} dt = -x$$

ammette sull'intervallo (0,1) una e una sola radice. Dopo aver verificato che su tale intervallo è applicabile il metodo di Newton per il calcolo delle radici approssimate, fornire una valutazione di tale radice.

Soluzione

Posto

$$y(x) = \int_1^x \frac{3^t}{3+t} dt + x$$

risulta:

$$\begin{aligned} y(0) &= \int_1^0 \frac{3^t}{3+t} dt = -\int_0^1 \frac{3^t}{3+t} dt < 0; \\ y(1) &= 1 + \int_1^1 \frac{3^t}{3+t} dt = 1 > 0 \end{aligned}$$

Dunque y, che è continua su $[0,1]$, assume in 0 e 1 valori di segno discorde e perciò esiste almeno una radice dell'equazione. Inoltre, essendo

$$y'(x) = 1 + \frac{3^x}{3+x} > 0,$$

La radice è unica. Calcoliamo la derivata seconda di y:

$$y''(x) = \frac{3^x \log 3(3+x) - 3^x}{(3+x)^2} = \frac{3^x(x \log 3 + \log 27 - 1)}{(3+x)^2} > 0$$

Mettendo in atto il procedimento iterativo di Newton si ha la prima approssimazione:

$$x_1 = x_0 - \frac{y(x_0)}{y'(x_0)},$$

che nel nostro caso dà:

$$x_1 = 1 - \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$$

Naturalmente il computer consente di mettere in atto un numero arbitrario di iterazioni.
Se l'uso del computer in classe va condizionato e reso subalterno a progetti e attività coerenti liberamente scelti dal docente, come va considerato il software matematico avanzatissimo che ormai ci consente di calcolare limiti, derivate, integrali, di studiare e disegnare il grafico di funzioni, ecc semplicemente con un clic del mouse? Ha senso, oggi, tanto per intenderci, mantenere in classe una condotta didattica addestrativa che fornisca le regole per il calcolo dei limiti, per disegnare il grafico delle funzioni, per operare negli integrali la giusta sostituzione che riduce l'integrale di partenza a uno più facilmente calcolabile? E se questa attività non ha più senso, qual è il giusto approccio didattico del docente? In altre parole con cosa vanno sostituiti questi argomenti che occupano oggi buona parte dei corsi di Analisi matematica? È complesso rispondere rigorosamente e definitivamente a queste questioni. Non si può comunque fare a meno di ricordare, ancora una volta, che il software esistente non è stato quasi mai prodotto per finalità di tipo didattico e che solo recentemente si può rilevare una certa attenzione su queste tematiche. Generalmente nelle scuole si adoperano strumenti e software appositamente concepito e realizzato per altri scopi, spesso assai lontani al mondo della scuola. Non è accaduto, per intenderci, ciò che è accaduto per esempio per la medicina. Per particolari diagnosi s'è creato lo strumento per eseguire la TAC, che tra l'altro è bene ricordarlo, si basa su procedimenti matematici strettamente correlati con le trasformate integrali. Nella scuola gli strumenti arrivano preconfezionati, per quello che sono. La loro esistenza non né determinata da precise richieste didattiche. Insomma i termini della questione sono capovolti. Questi sono gli strumenti di cui disponiamo, vediamo qual è l'uso più qualificante che ne possiamo fare. Per concludere ritengo le scelte didattiche debbano tenere conto del software e degli strumenti esistenti, ma allo stesso tempo, debbano ugualmente conservare un approccio rigoroso e sistematico sugli argomenti trattati e sulle applicazioni, in modo da favorire in ogni caso la comprensione di quello che si fa. Occorre insomma che si continui il più possibile a ragionare con la testa e non con le dita. Questi e altri problemi saranno oggetto di discussione nel prossimo congresso di Otranto, settembre 2003.

Riferimenti bibliografici

[1] A.Laforgia - È tempo di numeri - *Periodico di matematiche*, serie 6, vol. 63, 2-3, 1987.

[2] A.Laforgia - Semantica e logistica nell'insegnamento matematico - *Periodico di matematiche*, serie 6, vol. 66, 2, 1990

[3] A.Laforgia - Prospettive evolutive dell'insegnamento matematico - *Periodico di matematiche*, serie 6, vol. 67, 3, 1991.