CAPITOLO 2

METODO VARIAZIONALE PER OPERATORI IN FORMA DI DIVERGENZA

Nel corso di questo capitolo saremo interessati allo studio del seguente operatore in forma di divergenza

$$\begin{aligned} Au &= \sum_{i,j=1}^{N} D_i(a_{ij}D_j u) + \sum_{i=1}^{N} b_i\, D_i u + c\, u \\ &= \operatorname{div}(a\,\nabla u) + b\cdot\nabla u + c\, u \end{aligned} \tag{2.1}$$

e al problema di Dirichlet ad esso connesso

$$\begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

nelle ipotesi che Ω sia un aperto di $\mathbb{R}^N$ e i coefficienti $a_{ij} \in C^1_b(\overline{\Omega})$ mentre $b_i,\ c \in C_b(\overline{\Omega})$. Assumiamo anche che A sia uniformemente ellittico, cioè che esista una costante $\nu_0 > 0$ tale che

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu_0|\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N\ ,\ \forall x \in \Omega \tag{2.3}$$

Notiamo che la regolarità dei coefficienti del secondo ordine fa sì che A si possa riscrivere in forma di non divergenza. Una **soluzione** di (2.2) è una funzione $u \in H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$ che soddisfa l'equazione differenziale. L'obiettivo di questo capitolo è mostrare che è possibile ottenere una siffatta soluzione regolarizzandone una debole. Il metodo usato è noto come *metodo variazionale* e può essere sintetizzato nel modo seguente:

1) si definisce una soluzione debole, attraverso l'introduzione di forme quadratiche;
2) se ne dimostrano esistenza e unicità, con il teorema di Lax-Milgram;
3) si regolarizza la soluzione ottenuta mediante il metodo delle traslazioni di L. Nirenberg, provando separatamente regolarità all'interno e regolarità fino al bordo in un aperto regolare di $\mathbb{R}^N$. Infine si stabiliscono risultati di regolarità di ordine superiore, grazie alla quale è possibile pervenire ad una soluzione classica del problema.

2.1 Esistenza e unicità della soluzione debole: teorema di Lax-Milgram

Siano $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tale che $Au = f$; moltiplicando ambo i membri di questa equazione per un'arbitraria funzione test $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e integrando per parti, risulta

$$\begin{aligned}\int_\Omega Au\,\varphi &= \int_\Omega \sum_{i=1}^N D_i\Big(\sum_{j=1}^N a_{ij} D_j u\Big)\varphi + \int_\Omega \sum_{i=1}^N b_i\, D_i u\,\varphi + \int_\Omega c\,u\,\varphi \\ &= \int_\Omega -\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, D_i u\, D_j\varphi + \sum_{i=1}^N b_i\, D_i u\,\varphi + c\,u\,\varphi \\ &= \int_\Omega f\,\varphi.\end{aligned}$$

Questo calcolo è alla base della seguente definizione.

Definizione 2.1.1 *Chiamiamo* **soluzione debole** *o* **variazionale** *del problema di Dirichlet (2.2) una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che*

$$\int_\Omega -\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, D_i u\, D_j\varphi + \sum_{i=1}^N b_i\, D_i u\,\varphi + c\,u\,\varphi = \int_\Omega f\,\varphi \tag{2.4}$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ (o, equivalentemente per densità, per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$).

La scelta dello spazio funzionale $H_0^1(\Omega)$ (più ampio rispetto ad $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$), è sufficiente per dare senso a (2.4), visto che sono coinvolte solo derivate prime di u. Il conto precedente ha infatti mostrato che un ordine di derivazione è stato "scaricato" da u sulle funzioni test. Nulla impedirebbe di scaricare due ordini di derivazione: questo vorrebbe dire considerare una soluzione del problema nel senso delle distribuzioni che è solo L^2; tuttavia, trovare una soluzione in $H_0^1(\Omega)$, come vedremo, è abbastanza facile; ciò giustifica in primo luogo la nostra scelta. Inoltre, una funzione di $H_0^1(\Omega)$

verifica automaticamente le condizioni al bordo di Dirichlet, per cui basta che sia soddisfatta (2.4) perchè sia risolto (debolmente) l'intero problema (per altri esempi di condizioni al bordo si veda l'Esercizio 2.1.5). Osserviamo che se una soluzione debole u appartiene anche ad $H^2(\Omega)$, allora reintegrando per parti in (2.4) risulta $Au = f$ q.o. In realtà, questo è proprio quello che succede quando il dominio è abbastanza regolare.

Introducendo nello spazio di Hilbert $H_0^1(\Omega)$ la forma bilineare

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, D_i u\, D_j v - \sum_{i=1}^N b_i\, D_i u\, v - c\, u\, v \right) \tag{2.5}$$

si vede che

$$u \text{ è soluzione debole di (2.2)} \iff \forall v \in H_0^1(\Omega)\ :\ a(u,v) = -(f,v)$$

avendo denotato con $(\cdot,\cdot)$ il prodotto scalare di L^2.
L'approccio variazionale è ora basato sul seguente teorema.

Teorema 2.1.2 (Lax-Milgram) *Siano H uno spazio di Hilbert e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineare* **continua** *e* **coerciva** *su H, cioè tale che valgano rispettivamente*

a) esiste $M > 0$ tale che $|a(u,v)| \leq M\|u\|\,\|v\| \qquad \forall u,v \in H$;

b) esiste $\alpha > 0$ tale che $a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2 \qquad \forall u \in H$;

Allora, per ogni $f \in H'$, con H' duale topologico di H, esiste un unico $u \in H$, tale che

$$a(u,v) = f(v) \qquad \forall\, v \in H.$$

Inoltre $\|u\| \leq \alpha^{-1}\|f\|$.

DIM. Sia u un elemento fissato in H; allora $a(u,\cdot)$ definisce un funzionale lineare continuo su H. Pertanto, il teorema di rappresentazione di Riesz-Frechét assicura che esiste un unico $w \in H$ tale che $a(u,v) = (v,w)_H$ per ogni $v \in H$. Siccome w è univocamente determinato da u, è ben posto il seguente operatore

$$\begin{aligned} S:\quad & H \longrightarrow H \\ & u \longmapsto Su := w. \end{aligned}$$

S è lineare e, siccome risulta

$$|(v,Su)_H| = |a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\| \qquad \forall\, v \in H\ ,$$

prendendo $v = Su$, si ottiene che $\|Su\| \leq M\|u\|$, cioè S è continuo. Inoltre, poichè a è coerciva, per ogni $u \in H$ si ha

$$\alpha\|u\|^2 \leq a(u,u) = |a(u,u)| = |(u,Su)_H| \leq \|u\|\|Su\|$$

da cui si ottiene che $\|Su\| \geq \alpha\|u\|$.
Quest'ultima disuguaglianza dimostra che S è iniettivo e che ha rango chiuso; se proviamo che $Rg(S)$ è denso potremo concludere che S è suriettivo. Sia $z \in Rg(S)^{\perp}$. Allora $(z, Su)_H = 0$ per ogni $u \in H$; se in particolare $u = z$, si ha $\alpha\|z\|^2 \leq a(z,z) = |(z, Sz)_H| = 0$, da cui segue che $z = 0$. Quindi S è un isomorfismo.

Sia adesso $f \in H'$. Per il teorema di Riesz-Frechét, esiste un unico $w \in H$ tale che $f(v) = (v,w)_H$, per ogni $v \in H$. Posto $u = S^{-1}w$, risulta

$$f(v) = (v,w)_H = (v, Su)_H = a(u,v)$$

con $\|u\| \leq \alpha^{-1}\|w\| = \alpha^{-1}\|f\|$. □

Osservazione 2.1.3 Se nel teorema di Lax-Milgram si assume che la forma a sia anche simmetrica ($a(u,v) = a(v,u)$), allora a è un nuovo prodotto scalare su H (equivalente a quello dato) e il Teorema di Lax-Milgram non è altro che una riformulazione del Teorema di Riesz-Frechét.

Ci proponiamo, ora, di far vedere che la forma definita in (2.5) è continua e **debolmente coerciva**, cioè è tale che $a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2_{H^1} + \lambda_0 \|u\|^2_{L^2}$ per ogni $u \in H^1_0(\Omega)$ e per opportune costanti $\alpha > 0$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. A tale scopo cominciamo ad osservare che, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, risulta

$$\left|\sum_{i=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^N |a_{ij}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^N |a_{ij}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} |\xi| \, ,$$

e quindi

$$\left|\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\right| \leq \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N |a_{ij}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} |\xi||\xi_j| \leq \left(\sum_{i,j=1}^N |a_{ij}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} |\xi|^2 \, .$$

Posto $L = \sup_{x\in\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^N |a_{ij}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ si ha allora

$$\left|\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\right| \leq L|\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \, , \; \forall x \in \Omega \, .$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^N b_i(x)\, D_i u(x)\right| &\leq \left(\sum_{i=1}^N |b_i(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N |D_i u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^N |b_i(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} |\nabla u(x)| \end{aligned}$$

e quindi, posto $K = \sup_{x\in\Omega} \Big(\sum_{i=1}^{N} |b_i(x)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$, risulta

$$\begin{aligned}\Big| \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\, D_i u(x)\, u(x) \Big| &\le \int_\Omega K\, |\nabla u(x)||u(x)| = \int_\Omega K\, \sqrt{\varepsilon}\, |\nabla u(x)| \frac{|u(x)|}{\sqrt{\varepsilon}} \\ &\le \frac{K^2\varepsilon}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Omega |u(x)|^2 \,,\end{aligned}$$

avendo usato la disuguaglianza $a\, b \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ nell'ultimo passaggio. Prendendo $\varepsilon = \nu_0/K^2$, si ha

$$\Big| \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\, D_i u(x)\, u(x) \Big| \le \frac{\nu_0}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + \frac{K^2}{2\nu_0} \int_\Omega |u(x)|^2 \,.$$

Pertanto, per ogni $u \in H^1_0(\Omega)$, vale

$$\begin{aligned}a(u,u) \;&=\; \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\, D_i u\, D_j u - \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} b_i\, D_i u\, u - \int_\Omega c\, u^2 \\ &\ge\; \nu_0 \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 - \frac{\nu_0}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 - \frac{K^2}{2\nu_0} \int_\Omega |u(x)|^2 \\ &\quad - \sup_{x\in\Omega} c \int_\Omega |u(x)|^2.\end{aligned}$$

Ponendo $\lambda_0 = \dfrac{K^2}{2\nu_0} + \sup_{x\in\Omega} c + \dfrac{\nu_0}{2}$, si ottiene in definitiva

$$a(u,u) \ge \frac{\nu_0}{2} \|u\|^2_{H_1} - \lambda_0 \|u\|^2_{L^2}$$

che dimostra che a è debolmente coerciva in L^2.

Usando le precedenti disuguaglianze e quella di Hölder, si prova che a è anche continua. Infatti, se $u, v \in H^1_0(\Omega)$ allora

$$\begin{aligned}|a(u,v)| \;&=\; \Big| \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\, D_i u\, D_j v - \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} b_i\, D_i u\, v - \int_\Omega c\, u\, v \Big| \\ &\le L \int_\Omega |\nabla u||\nabla v| + \int_\Omega K\, |\nabla u||v| + \|c\|_\infty \int_\Omega |u||v| \\ &\le L\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} + K\, \|\nabla u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \|c\|_\infty \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\ &\le M\, \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}\end{aligned}$$

Per riferimenti futuri, ricordiamo che

$$
\begin{aligned}
K &= \sup_{x\in\Omega}\Big(\sum_{i=1}^{N}|b_i(x)|^2\Big)^{\frac12}\\
L &= \sup_{x\in\Omega}\Big(\sum_{i,j=1}^{N}|a_{ij}(x)|^2\Big)^{\frac12}\\
\lambda_0 &= \frac{K^2}{2\nu_0}+\sup_{x\in\Omega}c+\frac{\nu_0}{2}.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Teorema 2.1.4 *Assumendo valida la notazione precedente, per ogni $\lambda\in\mathbb{R}$ con $\lambda\ge\lambda_0$ e per ogni $f\in L^2(\Omega)$ esiste un'unica $u\in H_0^1(\Omega)$ tale che*

$$\lambda\,(u,v)+a(u,v)=(f,v),\quad \forall\, v\in H_0^1(\Omega)$$

(cioè u è soluzione debole di $\lambda u-Au=f$). Inoltre, se $\lambda>\lambda_0$ si ha

$$\|u\|_{L^2}\le\frac{1}{\lambda-\lambda_0}\|f\|_{L^2},\qquad \|\nabla u\|_{L^2}\le\sqrt{\frac{2}{\nu_0(\lambda-\lambda_0)}}\|f\|_{L^2}. \tag{2.7}$$

DIM. Siano $\lambda\in\mathbb{R}$, con $\lambda\ge\lambda_0$ e $f\in L^2(\Omega)$. Consideriamo su $H_0^1(\Omega)$ la forma $\widetilde{a}(u,v)=a(u,v)+\lambda(u,v)$, dove a è definita da (2.5). Siccome a è continua, anche $\widetilde{a}$ lo è. Inoltre

$$\widetilde{a}(u,u)=a(u,u)+\lambda\,\|u\|_{L^2}^2\ge\frac{\nu_0}{2}\|u\|_{H^1}^2+(\lambda-\lambda_0)\|u\|_{L^2}^2\ge\frac{\nu_0}{2}\|u\|_{H^1}^2 \tag{2.8}$$

cioè $\widetilde{a}$ è coerciva su $H_0^1(\Omega)$. Applicando il teorema di Lax-Milgram relativamente al funzionale $v\mapsto\int_\Omega f\,v$, otteniamo che esiste un'unica $u\in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$a(u,v)+\lambda(u,v)=\int_\Omega f\,v\qquad \forall v\in H_0^1(\Omega)\ .$$

Proviamo ora le stime (2.7). Prendendo $u=v$ nell'uguaglianza precedente e usando la (2.8) risulta

$$\|f\|_{L^2}\,\|u\|_{L^2}\ge\int_\Omega f\,u=\lambda\int_\Omega|u|^2+a(u,u)\ge\frac{\nu_0}{2}\|u\|_{H^1}^2+(\lambda-\lambda_0)\|u\|_{L^2}^2$$

da cui si ricavano

$$(\lambda-\lambda_0)\|u\|_{L^2}^2\le\|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}\Longrightarrow\|u\|_{L^2}\le\frac{\|f\|_{L^2}}{\lambda-\lambda_0}$$

e

$$\frac{\nu_0}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2\le\frac{\nu_0}{2}\|u\|_{H^1}^2\le\|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}\le\frac{\|f\|_{L^2}^2}{\lambda-\lambda_0}.$$

$\square$

Il teorema precedente assicura così di poter risolvere, almeno in senso debole, l'equazione $\lambda u - Au = f$, quando λ è abbastanza grande. E' bene notare che questa restrizione su λ è parzialmente un problema legato alla tecnica dimostrativa, perchè il valore λ_0 trovato non è ottimale, e parzialmente una difficoltà intrinseca che non è possibile superare.

Per esempio, il problema unidimensionale

$$\begin{cases} \lambda u - u'' = 0 & \text{in } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

in corrispondenza di $\lambda_n = -n^2\pi^2$, non ammette un'unica soluzione, dato che accanto alla soluzione nulla ci sono anche le autofunzioni $\sin(n\pi x)$. Se invece $\lambda \geq 0$, allora l'unica soluzione è quella banale. In generale, la situazione può anche essere peggiore, nel senso che i valori di λ per cui non vi è risolubilità (o unicità) possono non essere solo un'infinità numerabile come nel caso considerato.

Esercizio 2.1.5 Siano Ω un aperto limitato di classe C^1 di $\mathbb{R}^N$ e $f \in L^2(\Omega)$. Denotata con ν la normale esterna unitaria a $\partial\Omega$, provare che

(a) se $u \in H^2(\Omega)$ soddisfa

$$-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\,v \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)$$

allora $\Delta u = f$ e $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su $\partial\Omega$ (la restrizione a $\partial\Omega$ è chiaramente tramite un operatore di traccia);

(b) se $u \in H^2(\Omega)$ soddisfa

$$a(u,v) = -\int_\Omega f\,v \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)$$

(con a definita da (2.5)), allora $Au = f$ e $\dfrac{\partial u}{\partial \nu^*} = 0$ su $\partial\Omega$, dove $\nu_i^* = \sum_{j=1}^N a_{ij}\nu_j$, $i = 1, ..., N$, è la cosiddetta *conormale*.

2.2 Regolarizzazione delle soluzioni deboli

Cominciamo con questa sezione a studiare la regolarità della soluzione debole ottenuta con il teorema di Lax-Milgram.

Relativamente all'operatore A definito in (2.1), introduciamo le seguenti costanti:

$$\begin{aligned} M_0 &= \max_{i,j}\{\|a_{ij}\|_\infty,\ \|b_i\|_\infty,\ \|c\|_\infty\} \\ N_0 &= \max_{i,j} \|\nabla a_{ij}\|_\infty. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Abbiamo provato che se $\lambda \geq \lambda_0$, con λ_0 definito in (2.6), allora l'equazione $\lambda u - Au = f \in L^2(\Omega)$ ammette un'unica soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$. Se ora inglobiamo $\lambda\, u$ nella parte di ordine zero dell'operatore, allora possiamo considerare u soluzione debole di $-Au = f$, ossia

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, D_i u\, D_j v - \sum_{i=1}^N b_i\, D_i u\, v - c\, u\, v \right) = \int_\Omega f\, v \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Posto $g := f + c\, u + \sum_{i=1}^N b_i\, D_i u \in L^2(\Omega)$ la precedente uguaglianza diventa

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, D_i u\, D_j v = \int_\Omega g\, v \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

2.2.1 Regolarità all'interno

Come anticipato all'inizio del capitolo, il metodo che useremo per regolarizzare la soluzione debole è basato sui quozienti differenziali.

Se $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $h \in \mathbb{R}^N$, $h \neq 0$, chiamiamo **quoziente differenziale** l'espressione

$$(D_h u)(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|}.$$

È immediato verificare che per ogni $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} (D_h u)\, v\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u\, D_{-h} v\, dx. \tag{2.10}$$

Se $u \in L^2(\Omega)$ e ω è un aperto a chiusura compatta contenuta in Ω, allora ha senso considerare $D_h u(x)$ per $x \in \omega$ e $|h| < \mathrm{dist}(\omega, \partial\Omega)$.

Il prossimo lemma mostra una caratterizzazione degli spazi di Sobolev in termini di quozienti differenziali.

Lemma 2.2.1 *Sia $u \in L^2(\Omega)$. Sono equivalenti le seguenti proprietà:*

(i) $u \in H^1(\Omega)$;

(ii) esiste $C > 0$ tale che per ogni ω aperto a chiusura compatta contenuta in Ω (brevemente $\omega \subset\subset \Omega$) e per ogni $h \in \mathbb{R}^N$ con $|h| < dist(\omega, \partial\Omega)$ risulta

$$\|D_h u\|_{L^2(\omega)} \leq C.$$

In tal caso si può prendere $C = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$.

DIM.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Supponiamo inizialmente che $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Preso $h \in \mathbb{R}^N$, poniamo $v(t) := u(x+th)$, con $t \in \mathbb{R}$. Allora

$$u(x+h) - u(x) = v(1) - v(0) = \int_0^1 v'(t)\,dt = \int_0^1 h \cdot \nabla u(x+th)\,dt\,.$$

Di conseguenza,

$$|u(x+h) - u(x)|^2 \le |h|^2 \int_0^1 |\nabla u(x+th)|^2\,dt$$

e, integrando su ω

$$\begin{aligned}\int_\omega |u(x+h)-u(x)|^2\,dx &\le |h|^2 \int_\omega dx \int_0^1 |\nabla u(x+th)|^2\,dt \\ &= |h|^2 \int_0^1 dt \int_\omega |\nabla u(x+th)|^2\,dx \\ &= |h|^2 \int_0^1 dt \int_{\omega+th} |\nabla u(y)|^2\,dy\,.\end{aligned}$$

Se $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$, allora esiste sicuramente un aperto ω' tale che per ogni $t \in [0,1]$ si abbia $\omega + th \subset \omega' \subset\subset \Omega$; dunque

$$\|D_h u\|^2_{L^2(\omega)} \le \|\nabla u\|_{L^2(\omega')} \le \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.11}$$

Se $u \in H^1(\Omega)$, allora esiste una successione $(u_n)_n \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $u_n \to u$ in $L^2(\Omega)$ e $\nabla u_n \to \nabla u$ in $L^2(\omega')$, per ogni $\omega' \subset\subset \Omega$. Applicando (2.11) a tutte le u_n e passando al limite si ottiene la (ii).
$(ii) \Rightarrow (i)$ Sia $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$; consideriamo un aperto ω tale che supp$\varphi \subset \omega \subset\subset \Omega$ e sia $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$. Allora

$$\left|\int_\Omega [u(x+h)-u(x)]\varphi(x)\,dx\right| = \left|\int_\Omega u(y)[\varphi(y-h)-\varphi(y)]\,dy\right| \le C|h|\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ne segue che

$$\left|\int_\Omega u(y)\frac{\varphi(y-h)-\varphi(y)}{|h|}\,dy\right| \le C\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Preso $h = te_i$, quando $t \to 0$ si ottiene, per convergenza dominata

$$\left|\int_\Omega u(x)\,D_i\varphi(x)\,dx\right| \le C\|\varphi\|_{L^2(\Omega)},$$

sicchè $\varphi \mapsto \displaystyle\int_\Omega u\,D_i\varphi$ definisce un funzionale lineare e continuo su $C_0^\infty(\Omega)$, munito della norma $\|\cdot\|_{L^2}$. Per densità tale funzionale può essere esteso a tutto $L^2(\Omega)$ e applicando il Teorema di Riesz, si determina un'unica funzione $v_i \in L^2(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega u\, D_i\varphi = \int_\Omega v_i\varphi \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Ne segue che esiste la derivata parziale di u rispetto a x_i nel senso delle distribuzioni ed è data da $-v_i$, con $\|v_i\|_{L^2} \le C$. Siccome i è arbitrario, si ottiene che $u \in H^1(\Omega)$, che è la nostra tesi. $\square$

Osservazione 2.2.2 Lo stesso risultato vale con $1 < p < \infty$ e si dimostra esattamente allo stesso modo.

Esercizio 2.2.3 Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, allora, posto $h = te_i$, con $1 \le i \le N$, risulta che $D_h u$ converge all'i-sima derivata parziale debole di u per $t \to 0$ in $L^p(\omega)$, per ogni $\omega \subset\subset \Omega$.

Il Lemma seguente è il passo fondamentale per ottenere regolarità all'interno.

Lemma 2.2.4 *Sia $u \in H^1(B_R)$ tale che*

$$\int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, D_i u\, D_j v = \int_{B_R} g\, v \qquad \forall\, v \in C_0^\infty(B_R)$$

con $g \in L^2(B_R)$. Allora $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(B_R)$ e per ogni $r < R$ esiste una costante $C = C(r, R, \nu_0, M_0, N_0)$ tale che

$$\|D^2 u\|_{L^2(B_r)} \le K(\|u\|_{H^1(B_R)} + \|g\|_{L^2(B_R)}).$$

DIM. Sia $r < R$ fissato e consideriamo $\eta \in C_0^\infty(B_R)$ tale che supp$\eta \subseteq B_{\frac{R+r}{2}}$, $0 \le \eta \le 1$ e $\eta \equiv 1$ su B_r. Allora $\eta\, u \in H_0^1(B_R)$ e per ogni $v \in C_0^\infty(B_R)$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, D_i(\eta\, u) D_j v &= \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, u\, D_i\eta\, D_j v + \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, \eta\, D_i u\, D_j v \\
&= \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, u\, D_i\eta\, D_j v + \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i u D_j(\eta v) \\
&\quad - \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, v\, D_i u\, D_j\eta \\
&= \int_{B_R} g\,\eta\, v - \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, v\, D_i u\, D_j \eta \\
&\quad - \int_{B_R} \sum_{j=1}^N D_j\left(\sum_{i=1}^N a_{ij}\, D_i\eta\, u\right) v = \int_{B_R} \phi\, v
\end{aligned} \tag{2.12}$$

dove

$$\phi = g\,\eta - \sum_{i,j=1}^{N} D_j(a_{ij}\,D_i\eta\,u) - \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\,D_iu\,D_j\eta.$$

Naturalmente $\phi \in L^2(B_R)$ e

$$\|\phi\|_{L^2(B_R)} \leq \|g\|_{L^2(B_R)} + C(r,R,M_0,N_0)\,\|u\|_{H^1(B_R)}. \tag{2.13}$$

Sia $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $|h| < \dfrac{R-r}{4}$. Poniamo $z := \eta u$ e $v := D_{-h}D_hz$. La scelta di h fa si che $v \in H_0^1(B_R)$ (perchè il suo supporto è compatto e contenuto in B_R), per cui v è una funzione test che può essere inserita in (2.12). Da questa segue che

$$\int_{B_R} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\,D_iz\,D_j(D_{-h}\,D_hz) = \int_{B_R} \phi\,(D_{-h}D_hz).$$

Siccome il quoziente differenziale e la derivata commutano, per la proprietà (2.10) si ha:

$$\int_{B_R} \sum_{i,j=1}^{N} D_h(a_{ij}\,D_iz)\,D_j(D_hz) = \int_{B_R} \phi\,(D_{-h}D_hz).$$

Tenendo conto che

$$\begin{aligned} D_h(a_{ij}\,D_iz)(x) &= D_ha_{ij}(x)\,D_iz(x) + a_{ij}(x+h)\,D_h(D_iz)(x) \\ &= D_ha_{ij}(x)\,D_iz(x) + a_{ij}(x+h)\,D_i(D_hz)(x) \end{aligned}$$

si deduce successivamente

$$\int_{B_R} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x+h)\,D_i(D_hz)(x)\,D_j(D_hz)(x) =$$
$$-\int_{B_R} \sum_{i,j=1}^{N} D_ha_{ij}(x)\,D_iz(x)\,D_j(D_hz)(x) + \int_{B_R} \phi(x)\,(D_{-h}D_hz)(x).$$

Grazie alla condizione di ellitticità, possiamo stimare il primo membro dal basso ottenendo

$$\begin{aligned}
\nu_0 \int_{B_R} |D_h \nabla z|^2 &\leq \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x+h)\, D_i(D_h z)(x)\, D_j(D_h z)(x) \\
&= -\int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N D_h a_{ij}(x)\, D_i z(x)\, D_j(D_h z)(x) \\
&\quad + \int_{B_R} \phi(x)\, (D_{-h} D_h z)(x) \\
&\leq C(N_0)\, \|\nabla z\|_{L^2(B_R)} \|\nabla D_h z\|_{L^2(B_{R'})} \\
&\quad + \|\phi\|_{L^2(B_R)} \|D_{-h} D_h z\|_{L^2(B_{R'})}
\end{aligned}$$

dove R' è un opportuno raggio strettamente minore di R, la cui esistenza è garantita dalla scelta di h. Applicando il Lemma 2.2.1, si ha che $\|D_{-h} D_h z\|_{L^2(B_{R'})} \leq \|\nabla D_h z\|_{L^2(B_R)}$ e quindi

$$\begin{aligned}
\nu_0 \|D_h \nabla z\|^2_{L^2(B_R)} &\leq C(N_0)\, \|z\|_{H^1(B_R)} \|\nabla D_h z\|_{L^2(B_R)} \\
&\quad + \|\phi\|_{L^2(B_R)} \|\nabla D_h z\|_{L^2(B_R)}.
\end{aligned}$$

Dividendo per $\|\nabla D_h z\|_{L^2(B_R)}$ e applicando ancora il Lemma 2.2.1, si deduce che $\nabla z \in H^1(B_R)$, ossia $z \in H^2(B_R)$ e inoltre

$$\|D^2 z\|_{L^2(B_R)} \leq \frac{C(N_0)}{\nu_0} \|z\|_{H^1(B_R)} + \frac{1}{\nu_0} \|\phi\|_{L^2(B_R)}.$$

A questo punto, siccome $u \equiv z$ su B_r, abbiamo che $u \in H^2(B_r)$ e , ricordando la stima (2.13),

$$\|D^2 u\|_{L^2(B_r)} \leq C\left(\|u\|_{H^1(B_R)} + \|g\|_{L^2(B_R)}\right)$$

con $C = C(r, R, \nu_0, M_0, N_0)$. □

Segue ora facilmente il seguente teorema di regolarità interna in una palla. Non è possibile dedurre regolarità fino al bordo perchè non stiamo richiedendo alcuna condizione al contorno (si ricordi l'Osservazione 1.3.6).

Teorema 2.2.5 *Sia $u \in H^1(B_R)$ soluzione debole di $-Au = f \in L^2(B_R)$. Allora $u \in H^2_{loc}(B_R)$ e per ogni $r < R$ esiste $C = C(r, R, \nu_0, M_0, N_0)$ tale che*

$$\|u\|_{H^2(B_r)} \leq C(\|u\|_{H^1(B_R)} + \|f\|_{L^2(B_R)}).$$

DIM. Basta applicare il lemma precedente con $g = f + c\,u + \sum_{i=1}^N b_i\, D_i u$ che è in $L^2(B_R)$. □

Una conseguenza della tecnica usata è la regolarità globale nell'intero spazio.

Teorema 2.2.6 *Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ soluzione debole di $-Au = f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Allora $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ ed esiste $C = C(\nu_0, M_0, N_0)$ tale che*

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} \leq C\,(\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}).$$

DIM. E' sufficiente ripetere la dimostrazione del Lemma 2.2.4 senza introdurre il cut-off η e la funzione z, ponendo $v = D_{-h}D_h u$. □

Osservazione 2.2.7 Ricordando le stime del Teorema 2.1.4 e usando il teorema precedente, si può maggiorare direttamente $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ con $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, a meno di una costante moltiplicativa, se $\lambda u - Au = f$, con $\lambda > \lambda_0$.

2.2.2 Partizioni dell'unità

Prima di passare al caso di regolarità interna in un aperto arbitrario Ω, ci occorrono dei risultati tecnici preliminari.

Lemma 2.2.8 *Siano K e Ω sottoinsiemi rispettivamente compatto e aperto di $\mathbb{R}^N$, con $K \subseteq \Omega$. Allora esiste $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che $0 \leq \phi \leq 1$ e $\phi \equiv 1$ su K.*

DIM. Sia $r < \frac{1}{2}\text{dist}(K, \partial\Omega)$. Poniamo $K_r := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \text{dist}(x, K) \leq r\}$. Per costruzione, K è un compatto contenuto in Ω. Presa $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che supp$\eta \subset B_1(0)$, $0 \leq \eta \leq 1$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \eta = 1$, sia $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$ la successione di mollificatori corrispondente. Se $\varepsilon < r$, la funzione $\phi = \eta_\varepsilon * \chi_{K_r}$ soddista le condizioni dell'enunciato. □

Lemma 2.2.9 *Siano K un compatto di $\mathbb{R}^N$ e $\{U_i\}_{i=1^r}$ un ricoprimento aperto di K. Allora, per ogni $i = 1, \dots, r$, esiste un aperto $V_i \subset\subset U_i$ (a chiusura compatta in U_i) tale che $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} V_i$.*

DIM. Per ogni $x \in K$, esiste $i \in \{1, \dots, r\}$ tale che $x \in U_i$; inoltre, siccome U_i è aperto, esiste un intorno sferico di x, B_x, a chiusura contenuta in U_i. Chiaramente, $\{B_x\}_{x \in K}$ è un ricoprimento aperto di K da cui, come conseguenza dell'ipotesi di compattezza, se ne può estrarre uno finito $\{B_{x_j}\}_{j=1}^{s}$. A questo punto, posto

$$V_i := \bigcup \{B_{x_j} \mid B_{x_j} \subseteq U_i\} \qquad \forall\, i = 1, \dots, r$$

risulta che ogni V_i è un aperto con $\overline{V_i} \subseteq U_i$ e, siccome $\bigcup_{i=1}^{r} V_i = \bigcup_{j=1}^{s} B_{x_j}$, $\{V_i\}$ è un ricoprimento di K. □

Lemma 2.2.10 (Partizione dell'unità) *Siano dati un compatto K di $\mathbb{R}^N$ e $\{U_i\}_{i=1}^r$, ricoprimento aperto finito di K. Allora esistono delle funzioni $\theta_1, \dots, \theta_r$ di classe C^∞, verificanti le seguenti proprietà*

(1) supp $\theta_i \subseteq U_i$,

(2) $0 \leq \theta_i \leq 1$,

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^r \theta_i(x) = 1,$ *in un intorno di* K.

Chiamiamo l'insieme $\{\theta_1, \dots, \theta_r\}$ *una* **partizione dell'unità (di classe $\mathbf{C}^\infty$)** *subordinata al ricoprimento* $\{U_i\}_{i=1}^r$.

DIM. Il Lemma 2.2.9, applicato due volte, assicura la possibilità di costruire a partire dal primo ricoprimento $\{U_i\}_{i=1}^r$, altri due ricoprimenti di K, $\{V_i\}_{i=1}^r$ e $\{W_i\}_{i=1}^r$, tali che $W_i \subset\subset V_i \subset\subset U_i$. Fissato un indice $i \in \{1, \dots, r\}$, poniamo $d_i := \min\{\text{dist}(W_i, V_i), \text{dist}(V_i, U_i)\}$. Sia $\eta_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, positiva, con supp $\eta_i \subseteq B_{\frac{d_i}{2}}(0)$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \eta_i = 1$.

Se $\psi_i := \eta_i * \chi_{V_i}$, allora $\psi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e supp$\psi_i \subseteq$ supp$\eta_i +$ suppχ_{V_i} $= \overline{B}_{\frac{d_i}{2}}(0) + \overline{V_i} = \left\{x \in \mathbb{R}^N | \text{dist}(x, \overline{V_i}) \leq \dfrac{d_i}{2}\right\} \subseteq U_i$. Inoltre, preso $x \in W_i$, risulta

$$\psi_i(x) = \int_{\overline{B}_{\frac{d_i}{2}}(0)} \chi_{V_i}(x-y)\, \eta_i(y)\, dy = 1$$

grazie alla scelta di d_i.

Siccome $\displaystyle\sum_{i=1}^r \psi_i \geq 1$ su $W := \displaystyle\bigcup_{j=1}^r W_j$, per continuità si avrà $\displaystyle\sum_{i=1}^r \psi_i \geq \frac{1}{2}$ su un certo intorno aperto $\widetilde{W}$ di W. A questo punto, poniamo

$$\theta_i(x) = \frac{\psi_i(x)\, \eta(x)}{\sum_{j=1}^r \psi_j(x)},$$

dove $\eta \in C_0^\infty(\widetilde{W})$ con $\eta \equiv 1$ su W. E' immediato verificare ora che le funzioni $\{\theta_1, \dots, \theta_r\}$ soddisfano le proprietà richieste. $\square$

Facciamo a questo punto alcune precisazioni sullo spazio $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$. E' chiaro che

$L^p_{\text{loc}}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile $|\ u_{|K} \in L^p(K)$ per ogni K compatto $\subset \Omega\}$.

Per descrivere $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, ci sono invece due possibilità

$$\{u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) \mid D_i u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)\,,\ \forall\, i\}, \tag{2.14}$$

dove $D_i u$ denota l'i-esima derivata distribuzionale di u oppure

$$\{u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) \mid u_{|\Omega'} \in W^{1,p}(\Omega'),\ \forall\, \Omega' \subset\subset \Omega\}.$$

Evidentemente il primo insieme è contenuto nel secondo, poichè $D_i(u_{|\Omega'}) = (D_i u)_{|\Omega'}$. Un argomento basato sulle partizioni dell'unità mostra che vale anche l'altra inclusione.

Lemma 2.2.11 *Sia $\Omega = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j$, con $\{\Omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ aperti. Se $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ è tale che $u|_{\Omega_j} \in W^{1,p}(\Omega_j)$ per ogni j, allora $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ così come definito in (2.14).*

DIM. Si tratta di far vedere che le derivate distribuzionali di u sono funzioni localmente p-sommabili. Consideriamo $D_1 u$. Per ipotesi, per ogni j esiste $v_j \in L^p(\Omega_j)$ tale che $v_j = D_1(u|_{\Omega_j})$. Proviamo che $v_i = v_j$ q.o. su $\Omega_i \cap \Omega_j$ (se quest'intersezione è non vuota): per ogni $\phi \in C^\infty_0(\Omega_i \cap \Omega_j)$ risulta

$$\int_{\Omega_i\cap\Omega_j} v_i\, \phi = \int_{\Omega_i} v_i\, \phi = -\int_{\Omega_i} D_1\phi\, u = -\int_{\Omega_i\cap\Omega_j} D_1\phi\, u = \int_{\Omega_i\cap\Omega_j} v_j\, \phi$$

(avendo sintetizzato nell'ultimo passaggio gli stessi conti ripetuti con j al posto di i). Pertanto $v_i = v_j$ q.o. su $\Omega_i \cap \Omega_j$. E' così ben definita su Ω una funzione v tale che $v|_{\Omega_j} = v_j$ e l'obiettivo è provare che $v = D_1 u$. Se $\psi \in C^\infty_0(\Omega)$, indicato con K il suo supporto, per compattezza è possibile ricoprire K con un numero finito di aperti $\{\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_r}\}$ scelti tra quelli che ricoprono Ω. Se $\{\phi_1, \dots, \phi_r\}$ è una partizione dell'unità subordinata a $\{\Omega_{i_j}\}$, risulta $\sum_{i=1}^r \psi\, \phi_i = \psi$ e $\sum_{i=1}^r D_1(\psi\, \phi_i) = D_1\psi$, quindi

$$\begin{aligned}\int_\Omega u\, D_1\psi &= \sum_{j=1}^r \int_{\Omega_{i_j}} u\, D_1(\psi\, \phi_j) = -\sum_{j=1}^r \int_{\Omega_{i_j}} \psi\, \phi_j\, v = -\sum_{j=1}^r \int_\Omega \psi\, \phi_j\, v \\ &= -\int_\Omega \psi\, v\end{aligned}$$

il che completa la dimostrazione. $\square$

2.2.3 Regolarità all'interno (continuazione)

Riprendiamo ora la regolarità ellittica all'interno di un aperto arbitrario.

Proposizione 2.2.12 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ soluzione debole di $-Au = f$, con $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Allora $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

DIM. Sia $B_{2R}(x_0)$ una palla a chiusura compatta contenuta in Ω. Per ipotesi $u \in H^1(B_{2R}(x_0))$ e $f \in L^2(B_{2R}(x_0))$, per cui, applicando il Teorema

2.2.5, deduciamo che $u \in H^2(B_R(x_0))$. Sia ora Ω' un aperto a chiusura compatta in Ω e consideriamo un numero finito di palle $\{B_{R_i}(x_i)\}$ che ricoprono Ω' e tali che $\cup_i B_{2R_i}(x_i) \subset\subset \Omega$. Dal passo precedente abbiamo che $u \in H^2(B_{R_i}(x_i))$, per ogni i, e quindi, tenendo conto del Lemma 2.2.11, deduciamo che $u \in H^2_{\text{loc}}(\cup_i B_{R_i}(x_i))$ e pertanto $u \in H^2_{\text{loc}}(\Omega')$. Dall'arbitrarietà di Ω' segue la conclusione. $\square$

Il seguente corollario mostra che aumentando la regolarità dei coefficienti dell'operatore e del dato f, aumenta quella della soluzione: precisamente questa ha due ordini di regolarità in più rispetto a f (poichè l'operatore A è del secondo ordine).

Corollario 2.2.13 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$; supponiamo che $a_{ij} \in C^{k+1}(\Omega)$, b_i, $c \in C^k(\Omega)$ e che $f \in H^k_{\text{loc}}(\Omega)$. Allora se $u \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ è soluzione debole dell'equazione $-Au = f$, risulta $u \in H^{k+2}_{\text{loc}}(\Omega)$.*

DIM. Procediamo per induzione su k. Per $k = 0$, la tesi è vera grazie alla Proposizione 2.2.12. Supponiamola vera per k e proviamola per $k+1$. Assumiamo quindi che $a_{ij} \in C^{k+2}(\Omega)$, b_i, $c \in C^{k+1}(\Omega)$ e che $f \in H^{k+1}_{\text{loc}}(\Omega)$. La funzione u verifica per ipotesi

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, D_i u\, D_j \phi - \sum_{i=1}^N b_i\, D_i u\, \phi - c\, u\, \phi \right) = \int_\Omega f\, \phi$$

per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$; in particolare

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, D_i u\, D_j \phi = \int_\Omega g\, \phi \qquad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

con g data da $f + \displaystyle\sum_{i=1}^N b_i\, D_i u + c\, u$. Per ipotesi induttiva $u \in H^{k+2}_{\text{loc}}(\Omega)$, per cui $g \in H^{k+1}_{\text{loc}}(\Omega)$. Per provare la tesi, facciamo vedere che $\nabla u \in H^{k+2}_{\text{loc}}(\Omega)$. Mettiamo $D_r\phi$ al posto di ϕ nell'uguaglianza precedente e otteniamo

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, D_i u\, D_{jr} \phi = \int_\Omega g\, D_r \phi = -\int_\Omega (D_r g)\, \phi.$$

Integrando per parti si ha quindi

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega (D_r g)\,\phi &= -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N D_r(a_{ij}\,D_i u)\,D_j\phi \\
&= -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\,D_i(D_r u)\,D_j\phi - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N (D_r a_{ij})\,D_i u\,D_j\phi \\
&= -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\,D_i(D_r u)\,D_j\phi + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N D_j[D_r(a_{ij})\,D_i u]\,\phi \\
&= -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\,D_i(D_r u)\,D_j\phi + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N D_{jr}(a_{ij})\,D_i u\,\phi \\
&\quad + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N D_r a_{ij}\,D_{ij} u\,\phi.
\end{aligned}$$

Si trova così che $D_r u$ è a sua volta soluzione debole dell'equazione ellittica

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\,D_i(D_r u)\,D_j\phi = \int_\Omega \phi\left[D_r g + \sum_{i,j=1}^N D_{jr} a_{ij}\,D_i u + \sum_{i,j=1}^N D_r a_{ij}\,D_{ij} u\right]$$

dove la funzione in parentesi quadre è in $H^k_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Applicando allora l'ipotesi induttiva deduciamo che $D_r u \in H^{k+2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e quindi, data l'arbitrarietà di r, che $\nabla u \in H^{k+2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, cioè $u \in H^{k+3}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. □

Corollario 2.2.14 (Ipoellitticità) *Se a_{ij}, b_i, c sono di classe $C^\infty(\Omega)$ e anche il dato $f \in C^\infty(\Omega)$, allora $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ soluzione debole di $-Au = f$ è anch'essa di classe $C^\infty(\Omega)$.*

DIM. Basta usare le immersioni di Sobolev, giacchè $u \in H^k_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per ogni k. □

2.2.4 Regolarità fino al bordo

Di seguito, consideriamo come aperto la semipalla di centro l'origine e raggio R contenuta nel semispazio $\mathbb{R}^N_+ = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_N > 0\}$, denotata con B_R^+, e facciamo vedere che la soluzione debole del problema di Dirichlet con dato in L^2, è H^2 in una qualunque semipalla di raggio più piccolo. Il procedimento seguito consiste nell'usare il metodo dei quozienti differenziali per stimare le derivate tangenziali di $D_i u$ e l'equazione differenziale per ricavare l'ultima derivata $D_{NN} u$.

Lemma 2.2.15 *Sia* $u \in H_0^1(B_R^+)$ *soluzione debole dell'equazione* $-Au = f \in L^2(B_R^+)$. *Se* $r < R$ *allora esiste una costante* $C = C(r, R, \nu_0, M_0, N_0)$ *tale che per ogni* $i = 1, \ldots, N-1$ *si ha* $D_i u \in H^1(B_r^+)$ *e*

$$\|D_{ij}u\|_{L^2(B_r^+)} \le C\,(\|u\|_{H^1(B_R^+)} + \|f\|_{L^2(B_R^+)}) \qquad \forall\, j = 1, ..., N. \tag{2.15}$$

DIM. Identica a quella del Lemma 2.2.4, usando quozienti differenziali, come nel caso dell'intera palla, rispetto a traslazioni tangenziali $h = (h_1, ..., h_{N-1}, 0)$. Infatti lo spazio H_0^1 è invariante rispetto a tali traslazioni nel senso che

$$v \in H_0^1(B_r^+) \quad \Longrightarrow \quad D_h v \in H_0^1(B_R^+)$$

con $|h|$ sufficientemente piccolo. □

La stima di D_{NN} è ottenuta nella proposizione seguente.

Proposizione 2.2.16 *Sia* $u \in H_0^1(B_R^+)$ *soluzione debole dell'equazione* $-Au = f \in L^2(B_R^+)$. *Se* $r < R$ *allora* $u \in H^2(B_r^+)$ *e*

$$\|D^2 u\|_{L^2(B_r^+)} \le C\,(\|u\|_{H^1(B_R^+)} + \|f\|_{L^2(B_R^+)}), \tag{2.16}$$

dove $C = C(r, R, \nu_0, M_0, N_0)$.

DIM. Per la Proposizione 2.2.12, $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(B_R^+)$ e quindi $-Au = f$ q.o. Allora

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, D_{ij}u + \sum_{i=1}^N \beta_i\, D_i u + c\,u = -f \qquad \text{q.o.}$$

dove $\beta_i = b_i - \sum_{j=1}^N D_j a_{ij}$ e quindi

$$D_{NN}u = \frac{-\Big[\sum_{(i,j)\neq(N,N)} a_{ij}\, D_{ij}u + \sum_{i=1}^N \beta_i\, D_i u + c\,u + f\Big]}{a_{NN}}$$

Dalla condizione di ellitticità si ha che $a_{NN} \ge \nu_0$, per cui

$$|D_{NN}u| \le \frac{1}{\nu_0}\Big| \sum_{(i,j)\neq(N,N)} a_{ij}\, D_{ij}u + \sum_{i=1}^N \beta_i\, D_i u + c\,u + f\Big|.$$

La tesi segue subito dal Lemma 2.2.15. □

Segue ora un risultato di regolarità globale nel semispazio analogo a quello già visto in $\mathbb{R}^N$.

Proposizione 2.2.17 *Sia $u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$ soluzione debole di $-Au = f \in L^2(\mathbb{R}_+^N)$. Allora $u \in H^2(\mathbb{R}_+^N)$ ed esiste una costante $C = C(\nu_0, M_0, N_0)$ tale che*

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}_+^N)} \leq C\,(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)}).$$

DIM. Come per il Teorema 2.2.6 è sufficiente adattare (e semplificare) la dimostrazione del Lemma 2.2.15 e della Proposizione 2.2.16 al caso del semispazio. □

Definizione 2.2.18 *Se $T = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N = 0\} = \partial\mathbb{R}_+^N \equiv \mathbb{R}^{N-1}$, indichiamo con $H_T^1(B_R^+)$ la chiusura nella norma H^1 delle funzioni $u \in C^\infty(\overline{B}_R^+)$ nulle in un intorno di $T \cap \overline{B}_R^+$ (cioè nulle solo vicino al bordo piatto di $\overline{B}_R^+$).*

Osservazione 2.2.19 Se $u \in H_T^1(B_R^+)$ e $\eta \in C_0^\infty(B_{R_1})$ con $R_1 < R$, allora $\eta u \in H_0^1(B_R^+)$. Infatti, per definizione esiste una successione $(u_n) \subseteq C^\infty(\overline{B}_R^+)$ tale che $u_n = 0$ in un intorno di $T \cap \partial B_R^+$ e u_n converge a u in $H^1(B_R^+)$. Ne segue che $\eta u_n \in C_0^\infty(B_R^+)$ e chiaramente $\eta u_n \to \eta u$ in H^1.

Inoltre se h è un vettore tangenziale, cioè $h = (h_1, h_2, \cdots, h_{N-1}, 0)$ e $|h| < R - R_1$ allora il quoziente differenziale $D_h(\eta u)$ appartiene a $H_0^1(B_R^+)$, perchè $D_h(\eta u_n) \in C_0^\infty(B_R^+)$.

Teorema 2.2.20 *Sia $u \in H_T^1(B_R^+)$ soluzione debole dell'equazione $-Au = f$, con $f \in L^2(B_R^+)$. Allora per ogni $r < R$, $u \in H^2(B_r^+)$ ed esiste una costante $c = c(r, R, \nu_0, M_0, N_0)$ tale che*

$$\|D^2 u\|_{L^2(B_r^+)} \leq c\left(\|f\|_{L^2(B_R^+)} + \|u\|_{H^1(B_R^+)}\right).$$

DIM. Si procede come nel caso di $H_0^1(B_R^+)$ (Proposizione 2.2.16), tenendo conto dell'Osservazione 2.2.19. □

Lemma 2.2.21 *Sia $u \in H^2(B_r^+) \cap H_T^1(B_R^+)$, con $r < R$. Allora per ogni $i \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$ si ha che $D_i u \in H_T^1(B_r^+)$.*

DIM. Sia $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $\eta \equiv 1$ in B_r e supp $\eta \subset B_{\frac{r+R}{2}}$. Allora $z = \eta u \in H_0^1(B_R^+)$. Inoltre, se $h = te_i$, con $1 \leq i \leq N-1$, per l'Osservazione 2.2.19, si ha che $D_h z \in H_0^1(B_R^+)$, per h sufficientemente piccolo e $D_h z \to D_i z$ in norma H^1, per $t \to 0$ (cfr Esercizio 2.2.3). Ne segue che $D_i z \in H_0^1(B_R^+)$ e siccome $z \equiv u$ in B_r, $D_i u \in H_T^1(B_r^+)$. □

Teorema 2.2.22 *Sia $u \in H_T^1(B_R^+)$ soluzione debole dell'equazione $-Au = f$. Supponiamo inoltre che $a_{ij} \in C^{k+1}(\overline{B}_R^+)$, $b_i, c \in C^k(\overline{B}_R^+)$ e $f \in H^k(B_R^+)$. Allora $u \in H^{k+2}(B_r^+)$ per ogni $r < R$.*

DIM. Procediamo per induzione su k.

Il caso $k = 0$ è provato dal Teorema 2.2.20. Assumiamo che la tesi sia vera per k e proviamola per $k+1$. Supponiamo pertanto che $a_{ij} \in C^{k+2}(\overline{B_R^+})$, $b_i, c \in C^{k+1}(\overline{B_R^+})$ e $f \in H^{k+1}(B_R^+)$. Per ipotesi induttiva $u \in H^{k+2}(B_r^+)$ per ogni $r < R$. Sia ora $s \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$ e consideriamo la derivata tangenziale $D_s u$. Per il Lemma 2.2.21 $D_s u \in H_T^1(B_r^+)$, $r < R$, e derivando l'equazione rispetto a x_s risulta

$$\int_{B_r^+} \sum_{i,j} a_{ij} D_i(D_s u) D_j \phi = \int_{B_r^+} v\phi \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(B_r^+)$$

dove $v = D_s(f + cu + \sum_i b_i D_i u) + \sum_{i,j}(D_{js} a_{ij}) D_i u + \sum_{i,j}(D_s a_{ij}) D_{ij} u$ (cf Corollario 2.2.13). Siccome $v \in H^k(B_r^+)$, applicando l'ipotesi induttiva a $D_s u$ deduciamo che $D_s u \in H^{k+2}(B_r^+)$.

Per come è stato scelto s, resta la derivata rispetto a x_N di ordine $k+3$: $D_N^{k+3} u$. Per questa, basta derivare $k+1$ volte l'equazione rispetto a x_N e ricavare $D_N^{k+3} u$. Si trova così $D_N^{k+3} u$ espressa in funzione di tutte le altre derivate, già stimate; da qui la tesi. □

Corollario 2.2.23 *Se a_{ij}, b_i, c, $f \in C^\infty(\overline{B_R^+})$, allora $u \in C^\infty(\overline{B_r^+})$ per ogni $r < R$.*

Corollario 2.2.24 *Sia Ω un aperto limitato di classe C^{k+2}, oppure $\Omega = \mathbb{R}^N$, oppure $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Se $a_{ij} \in C^{k+1}(\overline{\Omega}), b_i \in C^k(\overline{\Omega}), c \in C^k(\overline{\Omega}), f \in H^k(\Omega)$ allora $u \in H^{k+2}(\Omega)$.*

DIM. Per $\Omega = \mathbb{R}^N$ basta iterare il Teorema 2.2.6.

Per $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ si ripete lo stesso argomento del Teorema 2.2.22 senza fare alcun troncamento.

Per Ω aperto limitato di classe C^{k+2} si procede mediante carte locali e partizioni dell'unità. □

Corollario 2.2.25 *Supponiamo che $u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$ sia soluzione debole dell'equazione $\lambda u - \Delta u = f$, con $\lambda > 0$. Se $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^N)$ è a supporto compatto in $\mathbb{R}^N$ allora $u \in H^k(\mathbb{R}_+^N)$, per ogni k. In particolare $u \in C_b^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+^N)$.*

Lo studio della regolarità delle soluzioni deboli in semipalle consente di passare a quello al bordo di aperti regolari mediante l'uso di carte locali. Il lemma successivo mostra che tramite un cambio di variabili l'operatore di partenza si trasforma in un altro operatore uniformemente ellittico del secondo ordine.

Lemma 2.2.26 *Sia Ω un aperto di classe C^2, sia (U, H) una carta locale su Ω. Sia inoltre $u \in H_0^1(U \cap \Omega)$ tale che*

$$\int_{U\cap\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{x_i} u D_{x_j} \varphi = \int_{U\cap\Omega} g\varphi \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(U \cap \Omega) \tag{2.17}$$

dove $g \in L^2(U \cap \Omega)$. Allora, posto

$$v(y) := u(H(y)) \,, \quad y \in B_R^+$$

si ha che $v \in H_0^1(B_R^+)$ e soddisfa

$$\int_{B_R^+} \sum_{h,k=1}^N \alpha_{hk} D_{y_k} v D_{y_h} \psi = \int_{B_R^+} \widetilde{g}\, \psi \qquad \forall \psi \in C_0^\infty(B_R^+) \tag{2.18}$$

dove $\widetilde{g} = (g \circ H)|JacH| \in L^2(B_R^+)$ e i coefficienti $\alpha_{hk} \in C^1(B_R^+)$ verificano la condizione di ellitticità uniforme.

DIM. Sia $\psi \in C_0^\infty(B_R^+)$; poniamo $\varphi(x) := \psi(J(x))$, dove J indica la funzione inversa di H e $x \in U \cap \Omega$. Allora $\varphi \in C_0^1(U \cap \Omega)$ e

$$D_{x_i} u(x) = \sum_{k=1}^N D_{y_k} v(Jx) D_{x_i} J_k(x), \quad D_{x_j} \varphi(x) = \sum_{h=1}^N D_{y_h} \psi(Jx) D_{x_j} J_h(x).$$

Dunque si ha

$$\begin{aligned}
&\int_{U\cap\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) D_{x_i} u(x) D_{x_j} \varphi(x)\; dx \\
&= \sum_{i,j=1}^N \int_{U\cap\Omega} a_{ij}(x) \sum_{h,k=1}^N D_{y_k} v(Jx) D_{x_i} J_k(x) D_{y_h} \psi(Jx) D_{x_j} J_h(x)\; dx \\
&= \sum_{i,j=1}^N \sum_{h,k=1}^N \int_{B_R^+} \big(a_{ij}(H(y)) D_{y_k} v(y) D_{x_i} J_k(H(y)) D_{y_h} \psi(y) D_{x_j} J_h(H(y)) \\
&\qquad\qquad |JacH|\big)\; dy,
\end{aligned}$$

in base alle usuali formule sul cambio di variabili in un integrale. Pertanto, posto

$$\alpha_{hk}(y) := \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(H(y)) D_{x_i} J_k(H(y)) D_{x_j} J_h(H(y))\, |JacH|(y)$$

risulta

$$\int_{U\cap\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) D_{x_i} u(x) D_{x_j} \varphi(x) dx = \int_{B_R^+} \sum_{h,k=1}^N \alpha_{hk}(y) D_{y_k} v(y) D_{y_h} \psi(y) dy. \tag{2.19}$$

Siccome i coefficienti a_{ij} sono di classe C^1 e le funzioni H, J di classe C^2, i nuovi coefficienti α_{hk} appartengono a $C^1(B_R^+)$ e inoltre soddisfano la condizione di ellitticità. Infatti per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$, usando il fatto che le matrici iacobiane JacH e JacJ non sono singolari risulta

$$\begin{aligned}\sum_{h,k=1}^{N}\alpha_{hk}\xi_h\xi_k &= \sum_{h,k=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}D_{x_i}J_kD_{x_j}J_h\,|JacH|\xi_h\xi_k\\ &= |JacH|\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}\Big(\sum_{k=1}^{N}D_{x_i}J_k\xi_k\Big)\Big(\sum_{h=1}^{N}D_{x_j}J_h\xi_h\Big)\\ &\geq |JacH|\nu_0\sum_{i=1}^{N}\Big(\sum_{k=1}^{N}D_{x_i}J_k\xi_k\Big)^2\geq\beta|\xi|^2.\end{aligned}$$

D'altra parte si ha

$$\int_{U\cap\Omega}g\varphi\,dx=\int_{B_R^+}(g\circ H)\psi|JacH|\,dy \tag{2.20}$$

per cui, combinando (2.17), (2.19), e (2.20) si ottiene la tesi. □

Giungiamo infine al risultato più importante di questo capitolo.

Teorema 2.2.27 *Siano Ω aperto limitato di classe C^2, $u\in H_0^1(\Omega)$ soluzione debole di $-Au=f$, $f\in L^2(\Omega)$. Allora $u\in H^2(\Omega)$ ed esiste una costante $C=C(\nu_0,M_0,N_0,\Omega)$ tale che*

$$\|u\|_{H^2}\leq C\,(\|f\|_{L^2}+\|u\|_{H^1}).$$

DIM. Siccome Ω è un aperto di classe C^2, dalla Definizione 1.0.1 segue che per ogni $x\in\partial\Omega$ esistono U_x intorno di x in $\mathbb{R}^N$ e $J_x:\overline{U}_x\to\overline{B}_1$ biiettiva, di classe C^2 con la sua inversa H_x, tali che $J_x(U_x\cap\Omega)=B_1^+$ e $J_x(U_x\cap\partial\Omega)=\overline{B_1^+}\cap\{x_N=0\}$. Poniamo $V_x:=H_x(B_{\frac{1}{2}})$. Per ogni $x\in\Omega$ sia $B_{2R_x}(x)$ una palla contenuta in Ω. Siccome $\overline{\Omega}$ è compatto, possiamo determinare intorni $\{V_{x_i}\}_{i=1,\dots,n_1}$ e palle $\{B_{R_{x_i}}(x_i)\}_{i=n_1+1,\dots,n_2}$ interne ad Ω, tali che

$$\overline{\Omega}=\bigcup_{i=1}^{n_1}V_i\;\cup\bigcup_{j=n_1+1}^{n_2}B_{R_{x_j}}(x_j)\;.$$

Poniamo $V_i=V_{x_i}$, $R_j=R_{x_j}$ e $n=n_1+n_2$.

Sia $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ una partizione dell'unità relativa a questo ricoprimento di $\overline{\Omega}$. Allora, in particolare $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\theta_i=1$ in un intorno di $\overline{\Omega}$, e quindi possiamo scrivere

$$u=\sum_{i=1}^{n}\theta_iu=\sum_{i=1}^{n}u_i\quad\text{in }\Omega.$$

A questo punto si tratta di provare che $u_i\in H^2(\Omega)$, per ogni $i=1,\dots,n$.

Se $i = n_1+1, \ldots, n$ allora $\operatorname{supp}(u_i) \subset B_{R_i}(x_i)$, per cui dal Teorema 2.2.5 applicato alle palle $B_{R_i}(x_i)$ e $B_{2R_i}(x_i)$ otteniamo

$$\begin{aligned}\|u_i\|_{H^2(\Omega)} &= \|u\,\theta_i\|_{H^2(B_{R_i}(x_i))} \le C_i\,\|u\|_{H^2(B_{R_i}(x_i))} \le \\ &\le C_i\,C(R_i, 2R_i, \nu_0, M_0, N_0)(\|f\|_{L^2(B_{2R_i}(x_i))} + \|u\|_{H^1(B_{2R_i}(x_i))}) \\ &\le C(\nu_0, M_0, N_0, \Omega)\,(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)})\end{aligned}$$

Sia adesso $i \le n_1$; la funzione $u_i = \theta_i u$ appartiene ad $H_0^1(U_i \cap \Omega)$, siccome $u \in H_0^1(\Omega)$ e $\operatorname{supp}\theta_i \subseteq V_i$ e soddisfa

$$\int_{U_i\cap\Omega} \sum_{h,k=1}^{N} a_{hk}\,D_h u_i\,D_k v = \int_{U_i\cap\Omega} g_i\,v \qquad \forall v \in C_0^\infty(U_i \cap \Omega)$$

con $g_i \in L^2(U_i \cap \Omega)$ che verifica $\|g_i\|_{L^2(U_i\cap\Omega)} \le C(M_0, N_0, \Omega)\,[\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}]$ (si veda la dimostrazione del Lemma 2.2.4).

Consideriamo la funzione $v_i := u_i \circ H_i$. Per il Lemma 2.2.26 risulta che $v_i \in H_0^1(B_1^+)$ e risolve un'altra equazione ellittica del secondo ordine, relativa alla semipalla B_1^+. Applicando la Proposizione 2.2.16, deduciamo che $v_i \in H^2(B^+_{\frac{1}{2}})$ e

$$\|v_i\|_{H^2(B_1^+)} = \|v_i\|_{H^2(B^+_{\frac{1}{2}})} \le C(\nu_0, M_0, N_0, \Omega)\,[\|\tilde{g}_i\|_{L^2(B_1^+)} + \|v_i\|_{H^1(B_1^+)}]$$

e quindi

$$\|u_i\|_{H^2(U_i\cap\Omega)} \le C(\nu_0, M_0, N_0, \Omega)[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|u_i\|_{H^1(\Omega)}]$$

da cui infine

$$\|u_i\|_{H^2(\Omega)} \le C(\nu_0, M_0, N_0, \Omega)[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}].$$

Siccome $u = \sum_{i=1}^{n} u_i$ su Ω, concludiamo che $u \in H^2(\Omega)$ e che

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{H^2(\Omega)} \le C(\nu_0, M_0, N_0, \Omega)\,(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}).$$

□

Concludiamo adesso con un risultato di regolarità di ordine superiore, di cui non diamo la dimostrazione poichè tecnicamente analoga a quelle precedenti.

Teorema 2.2.28 *Sia Ω aperto limitato di classe C^{k+2} e sia $f \in H^k(\Omega)$. Se $a_{ij} \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$, $b_i \in C^k(\overline{\Omega})$ e $c \in C^k(\overline{\Omega})$, allora la soluzione debole di $-Au = f$ appartiene ad $H^{k+2}(\Omega)$.*

Osservazione 2.2.29 Se $k > \dfrac{N}{2}$ allora $u \in C^2(\overline{\Omega})$ (per le immersioni di Sobolev) e diventa come tale soluzione classica del problema di Dirichlet.