CAPITOLO 19

Reti e loro prodotti diretti

Definizione 19.1. *Siano* N_1, N_2 *reti finite di ordine* n *e grado* $k+1$. *Consideriamo il prodotto diretto* $N_1 \times N_2 = \{(P_1, P_2) \mid P_i \in N_i,\ i = 1, 2\}$ *i cui elementi chiameremo " punti".*
Sia σ *una corrispondenza dalla classe di parallismo di* N_1 *alla classe di parallismo di* N_2. *Se* L *é una retta di* N_1 *e* M *é una retta di* N_2 *tale che* $L\sigma$ *é parallela a* M *allora si considera* $L \times M$. *Si noti che assumiamo che se* $L \neq L^*$ *sono parallele allora anche* $L\sigma \neq L^*\sigma$ *sono parallele;* $L \times_\sigma M$ *si chiamerá "retta".*

Useremo in generale la notazione $N_1 \times_\sigma N_2$, *mentre useremol anotazione* $N_1 \times N_1$, *solo quando* $N_1 = N_2$ *e* $\sigma = 1$). *Chiameremo, quindi* $N_1 \times_\sigma N_2$ *un prodotto di reti.*

Proposizione 19.2. $N_1 \times_\sigma N_2$ *é una rete di ordine* n^2 *e grado* $k+1$.

Per esempio, $L \times_\sigma M$ é parallela a $L^* \times_\sigma M^*$ se e soltanto se L é parallela a L^* e M^* é parallela a $L^*\sigma$. Allora, per ogni classe di parallismo α di N_1, $\{L \times_\sigma M \mid L \in \alpha,\ M \in \alpha\sigma\}$ é una classe di parallismo di $N_1 \times_\sigma N_2$. Anche per ogni classe di parallismo α di $N_1 \times_\sigma N_2$ e per ogni punto (P_1, P_2) esiste un'unica retta $L \times_\sigma M$ della classe α tale che $(P_1, P_2) \in L$ perché P_1 é in un'unica retta L di α e P_2 é in un'unica retta M di $\alpha\sigma$. Cioé, possiamo usare la stessa notazione α per la classe di parallelismo di $N_1 \times_\sigma N_2$ e la classe di N_1. Questa costruzione era nota solo per reti finite. É possibile trovarla nel libro di Beth, Jungnickel e Lenz [**10**]. Questa costruzione é stata inoltre usata da D. Drake per dare un esempio di rete che non ha una trasversale.
Considereremo il caso in cui N_1 e N_2 sono piani affini di ordine n. Allora, il grado é sempre $n+1$. In questa situazione, $N_1 \times_\sigma N_2$ é una rete di ordine n^2 e grado $n+1$. Inoltre, considereremo $N_1 = \pi_1$, $N_2 = \pi_2$, dove π_1, π_2 sono piani di traslazione di ordine $n = p^r$, p primo.

Osserviamo subito che:

Teorema 19.3. (Johnson-Ostrom [**92**]).

$\pi_1 \times_\sigma \pi_2$ é una rete di traslazione. Cioé, esiste un gruppo di traslazione che é abeliano elementare.

Dim: Sia T_i il gruppo di traslazione di π_i, per $i = 1, 2$. Si consideri $(P_1, P_2) \to (P_1\tau_1, P_2\tau_2)$, dove $\tau_i \in T_i$, $i = 1, 2$ e

$$(L_1 \times_\sigma L_2) \to (L_1\tau_1 \times_\sigma L_2\tau_2)$$

con $L_2||L_1\sigma$. Allora, $P_i\tau_i \in L_i$, $L_1\tau_1||L_1$, e $L_2\tau_2||L_2$, affinche

$$L_2\tau_2||L_2||L_1\sigma||L_1\tau_1\sigma$$

perché $L_1\tau_1||L_1$. Quindi, $L_2\tau_2||L_1\tau_1\sigma$. Allora, $T_1 \times T_2$ é un gruppo di traslazioni di $\pi_1 \times_\sigma \pi_2$ di ordine n^4. Ció implica che $\pi_1 \times_\sigma \pi_2$ é una rete di traslazione.

Infatti abbiamo:

Teorema 19.4. (Johnson-Ostrom [**92**]).

Siano G_1 e G_2 gruppi di collineazioni di π_1 e π_2, rispettivamente tali che G_i fissa ogni punto della retta all'infinito di π_i, per $i = 1, 2$. Allora $(P_1, P_2) \to (P_1g_1, P_2g_2)$, $L_1 \times_\sigma L_2 \to L_1g_1 \times_\sigma L_2g_2$ dá un gruppo di collineazioni di $\pi_1 \times_\sigma \pi_2$ tale che $G_1 \times G_2$ fissa ogni punto all'infinito di $\pi_1 \times_\sigma \pi_2$.

Osservazione 1. (Johnson-Ostrom [92]).

$\pi_1 \times_\sigma \pi_2$ **ha sottopiani di Baer isomorfi a** π_i**,** $i = 1, 2$.

Dim: $\{(P, Q)|P$ punto di $\pi_1\}$, per un fissato punto Q di π_2, é isomorfo a π_1. Si noti che non é necessaria l'ipotesi che π_1, π_2 siano piani di traslazione in (19.4). Infatti, per ogni punto (P, Q) ci sono almeno due sottopiani di Baer che contengono (P, Q). Quando $\pi_1 = \pi_2$ e $\sigma = 1$, i punti della forma (P, P) sono contenuti in almeno tre sottopiani di Baer.

La domanda più importante é:

Quando un prodotto diretto di reti é una rete di ordine n^2 e grado $n+1$?

Per reti di traslazione, é stato dimostrato che

TEOREMA 19.5. (Johnson-Ostrom [**92**]).

Se N é una rete di traslazione con un gruppo abeliano elementare di traslazione che ha almeno due piani affini di Baer π_1, π_2 su un punto, allora i piani sono piani di traslazione e N é isomorfa a $\pi_1 \times_\sigma \pi_2$ per qualche corrispondenza σ tra le classi di parallellismo di π_1 e π_2.

Per reti derivabili é possibile dimostrare il seguente teorema:

TEOREMA 19.6. (Johnson-Ostrom [**92**]).

$\pi_1 \times_\sigma \pi_2$ é derivabile se e soltanto se $\pi_1 \cong \pi_2$ é Desarguesiano e σ é una collineazione di π_1.

Osservazione 2. (Johnson-Ostrom [92]).

Se G é un gruppo di collineazioni di π tale che $[G, \sigma] = 1$ (cioé se G e σ commutano) allora G é un gruppo di collineazioni di $\pi \times_\sigma \pi$.

Per esempio quando $\sigma = 1$, si ha il gruppo G.

Se π é un piano di traslazione di ordine q^2 che ammette $GL(2, q)$ come un gruppo di collineazioni, allora $\pi \times \pi$ é una rete di traslazione di ordine q^4 e grado $q^2 + 1$ che ammette $GL(2, q)$ come un gruppo di collineazioni.

TEOREMA 19.7. (Johnson-Ostrom [**92**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^n con nucleo $GF(q)$. Consideriamo $\pi \times \pi$ (cioé $\sigma = 1$). Allora $\pi \times \pi$ ammette un gruppo Γ di collineazioni tale che

(1) $\Gamma \cong GL(2, q)$,

(2) Γ fissa ogni punto della retta all'infinito,

(3) esiste un sottogruppo di ordine $q(q-1)$ che fissa ogni punto di un sottopiano di Baer isomorfo a π,

(4) ci sono $q+1$ sottopiani di Baer in $\pi \times \pi$ e tutti sono isomorfi a π.

Dim: Per esempio, per (1), si noti che π é uno spazio vettoriale su un campo $K \cong GF(q)$. Si considerino $(P,Q) \to (P,Q) \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} = (P\alpha + Q\delta, P\beta + Q\gamma)$ tale che $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in K$ e $\alpha\gamma - \beta\delta \neq 0$, e $L \times M \to (L\alpha + M\delta, L\beta + M\gamma)$. Si ha che $(L\alpha + M\delta)||L||(L\beta + M\gamma)||M$. Allora, esiste un gruppo in $\pi \times \pi$ che é isomorfo a $GL(2,q)$ e che fissa ogni punto sulla retta all'infinito.

Anche, $H \left\langle \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} | \gamma \neq 0,\ \delta, \gamma \in K \right\rangle$ é un sottogruppo di Baer che fissa ogni punto di $\{(P,0)|P \in \pi\} \cong \pi$.

Alcuni di questi risultati sono stati dimostrati da Foulser [**2**] ma i metodi di Ostrom-Johnson sono diversi e piú forti. Per esempio, non é necessario avere ordine finito.
É possibile classificare le reti N di ordine q^r e grado $q+1$ che ammettono un gruppo di collineazioni che é isomorfo a $GL(2,q^r)$?

Recentemente, Hiramine e Johnson hanno provato quanto segue:

Osservazione 3. (Hiramine [42], Hiramine e Johnson [43]).

Sia N una rete di ordine q^2 e grado $q+1$. Se N ammette un gruppo di collineazioni G dotato di un sottogruppo normale H che agisce regolarmente sopra i punti e tale che $G/H \cong GL(2,q)$, allora si ha uno dei seguenti casi:

(1) N é una rete di un regolo

(2) N é una rete che può essere ottenuta da una cubica sghemba in $PG(3,q)$. Cioé, le tangenti di una cubica sghemba formano una rete che é isomorfa a N.

Se π é un piano di traslazione di ordine q^n con nucleo $K \cong GF(q)$, abbiamo:

Teorema 19.8. Se π é un piano di traslazione di ordine q^n con nucleo $K \cong GF(q)$, ci sono esattamente $q+1$ sottopiani di Baer in $\pi \times \pi$ che hanno un punto in comune.

Dim: Sia $\{\pi_1, \ldots, \pi_k\}$ l'insieme di tutti i sottopiani di Baer in $\pi \times \pi$ che hanno il punto (O, O) in comune. Sia $\pi_1 = \{(P, O)|P \in \pi\}$. Se $k > q+1$, sia π_{q+2} un sottopiano di Baer che contiene (O, O). Si possono prendere due qualsiasi sottopiani per ricostruire la rete. Allora, ogni nuovo sottopiano $\Sigma(\pi_{q+2})$ é isomorfo a π_1. Esiste un gruppo isomorfo a $GL(2, q)$ che é generato dai gruppi di Baer che fissano π_1 o Σ. Anche questi due gruppi sono isomorfi a $GL(2, q)$ e hanno un sottogruppo di ordine $q(q-1)$ in comune (il sottogruppo che fissa ogni punto di π_1). Allora, esistono almeno q nuovi sottopiani per ogni sottopiano Σ. Quindi ogni nuovo sottopiano $\Sigma(\pi_{q+2})$ é isomorfo a π_1. In tal modo si ottiene una contraddizione.

Esiste un piano di traslazione π di ordine n^2 che ha un sottopiano di Baer π_o non Desarguesiano?

Il motivo di questa domanda é che Pentilla ha trovato con il computer un insieme di piani di traslazione di ordine 81 che contengono il piano di Hall come un sottopiano di Baer di ordine 9. Inoltre, Jha nota che é facile usare piani di traslazione sui semicorpi per avere sottopiani di Baer che sono piani sui semicorpi ma che non sono Desarguesiani. Anche, Foulser e Walker [**39**] hanno trovato piani di traslazione con sottopiani di Hall che sono sottopiani di Baer. Infine, Ostrom ed Johnson hanno trovato diverse classi infinite di piani di traslazione di ordine n^2 che hanno un sottopiano di Baer che non é Desarguesiano. In particolare, Ostrom ed Johnson hanno trovato una catena di piani di Baer $\pi_1 \subset \pi_2 \subset \pi_3 \subset ... \subset \pi_k$ tali che π_i é un sottopiano di Baer di π_{i+1} non Desarguesiano, dove l'ordine π_j é $n^{2^{j-1}}$.

Questo risultato puó essere usato per costruire fibrazioni massimali.

Teorema 19.9. (Johnson-Ostrom [**92**]).

Se $\pi \times \pi$ può essere esteso a un piano di traslazione Σ allora possiamo fare la seguente costruzione:

Sia M la fibrazione parziale in $PG(2n-1, q)$ dove l'ordine π é q^n, $n \neq 1$, che consiste delle componenti in $\Sigma - \pi \times \pi$ e dei sottopiani di Baer di $\pi \times \pi$. Allora M é una fibrazione parziale massimale o esiste una fibrazione parziale massimale M^+, che non é una fibrazione, tale che $M \subset M^+$.

Dim: Tutte le componenti esterne a M devono essere contenute nella rete $\pi \times \pi$. Se M^+ é una fibrazione allora $\pi \times \pi$ é ricoperta. Allora esistono due piani di traslazione Σ, Σ^* che contengono $\Sigma - \pi \times \pi$. allora il risultato di Ostrom [**117**] può essere usato per provare che $\pi \times \pi$ é derivabile. Ma, in questo caso, π deve essere derivabile. Assurdo.

Per esempio, é possibile dimostrare che quando l'ordine π é q^2 con nucleo $GF(q)$, e $\pi \times \pi$ può essere esteso a un piano di traslazione Σ di ordine q^4 allora M ha $q^4 - q^2 + q - 1$ componenti ed é massimale.

Esistono molti esempi di piani di traslazione con questa proprietà.

Teorema 19.10. (Johnson-Ostrom [**92**]).

Esiste un piano di traslazione di André Σ di ordine q^{2nt}, $(n,t) = 1$, t dispari, $t > 1$, tale che esiste un sottopiano Σ_o di Baer di André di ordine q^{nt} con nucleo $GF(q^n)$.

Anche nella rete N che contiene Σ_o di grado q^{nt+1}, ci sono esattamente $q^n + 1$ sottopiani di Baer che hanno un punto in comune.

Ci sono moltissimi esempi. Per l'ordine q^{30z}, é possible avere reti di grado $q^{15z} + 1$ con $1 + q^{3z}$ sottopiani di Baer con nucleo $GF(q^{3z})$, reti di grado $q^{15z} + 1$ con $1 + q^{5z}$ sottopiani di Baer con nucleo $GF(q^{5z})$, e reti di grado $q^{15z} + 1$ con $1 + q^{z}$ sottopiani di Baer con nucleo $GF(q^{z})$.