CAPITOLO 11

Piani proiettivi della classe II-1 di Lenz-Barlotti

Un piano proiettivo di classe Lenz-Barlotti II-1 ammette esattamente una (P, L)-transitività con P incidente L. Il primo esempio in questa classe é stato ottenuto per derivazione dal piano di Hughes e si chiama il piano di Ostrom-Rosati ([**116**], [**131**]). Unáltro esempio é stato ottenuto da Ostrom derivando i duali dei piani di Lüneburg-Tits ([**115**]). La proprietà più importante dei piani di Lüneburg-Tits è che questi piani ammettono un gruppo di elazioni con asse affine che fissa una rete del nucleo nei duali dei piani. Cioè, per un piano di ordine q^2, c'è un gruppo centrale con centro (∞) di ordine q^3 nell'estenzione proiettiva di ordine q^3. Questo gruppo é un gruppo di traslazioni del duale del piano e inoltre esso é un gruppo di collineazioni del piano di semi-traslazione contenente una (P, L)-transitività con P incidente L. Anche, Kantor [**104**] ha considerato piani di questo tipo.

In questo Capitolo, studieremo piani di traslazione di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$ che ammettono un gruppo di elazioni di ordine q che fissa un sottospazio di dimensione due. Usando questo metodo, sono stati trovati molti piani di classe II-1 (si veda [**74**]).

Teorema 11.1. Sia π un piano di traslazione di ordine q e nucleo $K \cong GF(q)$. Sia E un gruppo di elazioni con asse affine L che fissa un K-sottospazio π_o di dimensione due non è uguale a L. Allora,

(i) π_o è un sottopiano di Baer di π.

(ii) Sia N il numero dei K-sottospazi di dimensione due che hanno in comune le classi di parallelismo con π_o e che sono fissati da E. Allora, $N = 1, 2$ o $q + 1$.

Questo teorema può essere dimostrato usando i risultati di Foulser [**37**] nella struttura delle reti di traslazione definite da un sottopiano di Baer e il risultato di Biliotti-Lunardon [**15**] sul numero dei sottopiani di Baer nelle reti che sono K-sottospazi.

Definizione 11.2. *Un piano di traslazione π di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$ si chiama un piano di tipo elazione i, per $i = 1, 2, q+1$, se e solo se π ammette un gruppo di elazioni E con asse affine di ordine q e un sottospazio di dimensione due fissato da E tale che $N = 1, 2$, o $q + 1$, rispettivamente, come in (11.1).*

È possibile dimostrare che:

Teorema 11.3. Sia un piano di traslazione di tipo elazione i. Allora, E fissa esattamente $i \cdot q + 1$ K-sottospazi di dimensione due.

Quando si considerano piani di semi-traslazione ottenuti per derivazione da reti del nucleo, occorre considerare i duali dei sottopiani di Baer nel piano duale del piano di traslazione.

Teorema 11.4. (Johnson [**74**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$. Si fissi un punto all'infinito (∞), e si estenda π ad un piano proiettivo π^+. Ora, si consideri il duale π^d eliminando (∞). Sia D una rete del nucleo in π^d costruita a partire dal duale π_o^d del sottopiano di Baer π_o(scegliendo le coordinate per il piano π^d all'interno di π_o^d). Sia S_{π_o} l'insieme delle rette di π_o che incidono (∞) (retta all'infinito inclusa). Allora

(1) S_{π_o} è l'insieme dei punti all'infinito di D nel duale del piano di traslazione π^d.

(2) Sia $x = 0$ la componente di π che è incidente con (∞) nell'estenzione proiettiva. Sia Z un qualunque K-sottospazio di dimensione uno di $x = 0$.

Allora, ci sono esattamente q K-sottospazi di dimensione due che come sottopiani di Baer contengono Z e che hanno S_{π_o} come insieme di rette incidenti (∞).

(3) Sia T gruppo delle traslazione di π con centro (∞). Allora, ogni sottopiano di Baer che contiene (∞) è in una T-orbita di lungezza q.

(4) L'insieme di $q^2(q+1)$ sottopiani di Baer nella rete del nucleo D di π^d è la T-immagine dell'insieme di $q(q+1)$ sottopiani costruiti come in (2).

In generale, abbiamo:

PROPOSIZIONE 11.5. *Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$ che ammette un gruppo di elazioni G con asse L. Si estenda π al piano proiettivo π^+. Sia $l_{(\infty)}$ la retta all'infinito e sia $L \cap l_{(\infty)} = (\infty)$. Si costruisca il duale di π^+ e si elimini (∞) per costruire il piano π^d duale del piano π. Allora, G é un gruppo di traslazioni di π^d. Inoltre, se T è il sottogruppo di traslazione di π con centro (∞), allora $\langle G, T\rangle$ é un gruppo di traslazioni di π^d di ordine $q^2|G|$.*

Con riferimento ai piani di classe II-1 di Lenz-Barlotti, si ha il seguente teorema:

TEOREMA 11.6. (Johnson [**74**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine $q^2 > 16$ e nucleo $K \cong GF(q)$. Sia D una rete derivabile che è una rete del nucleo nel duale di π ottenuto eliminando il punto (∞) nell' estenzione proiettiva di π. Sia π^s il piano di semi-traslazione che è ottenuto da π^d derivando in D. Allora,

(1) π^s contiene un gruppo di (P, L)-transitività con P incidente L se e solo se esiste un gruppo di elazioni E di π di ordine q e centro (∞) che fissa un qualsiasi K-sottospazio di dimensione due che definisce la rete del nucleo D.

(2) Esistono $1, 2$ o $q+1$ reti derivabili che sono reti del nucleo che contengono K-sottospazi fissati da E e ottenuti dal duale dell'estensione proiettiva di π eliminando il centro di E quando π è di tipo elazione $1, 2$ o $(q+1)$, rispettivamente.

(3) Se π^s é un piano di semi-traslazione ottenuto per derivazione da una delle reti del nucleo in (2), allora π^s ́dotato di un gruppo di traslazioni di ordine q^3 che contene una $(P, L)-$transitivitá con P incidente L.

(4) Se π non é un piano su un semicorpo, allora ogni piano di semi-traslazione che é ottenuto come in (2) é della classe II-1 di Lenz-Barlotti.

(5) Se π è un piano di tipo elazione i e non è un piano su un semi-corpo, allora ci sono esattamente i piani proiettivi della classe II-1 di Lenz-Barlotti che possono essere costruiti per derivazione delle reti del nucleo.

(6) Viceversa, sia π^s un piano proiettivo della classe II-1 di Lenz-Barlotti derivato dal duale di un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$ per derivazione della rete del nucleo. Allora esiste un gruppo di elazioni di ordine q del corrispondente piano di traslazione il quale fissa un K-sottospazio di dimensione due.

Definizione 11.7. *Un piano proiettivo finito si chiama di tipo i se e solo se il piano è ottenuto per derivazione della rete del nucleo del duale di un piano di traslazione di tipo elazione i.*

Un piano di tipo i è di classe II-1 se e solo se il piano di traslazione non è un piano su un semi-corpo.

Consideriamo il gruppo

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & u & g(u) \\ 0 & 1 & 0 & f(u) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : u \in K \cong GF(q), f, g \text{ sono funzioni} \right\}.$$

Useremo per questo gruppo la notazione $(g(u), f(u))$. Co tale notazione, descriveremo i piani di tipo 1 , 2 e $(q+1)$.

Descrizione dei piani di tipo 1

1. Lüneburg-Tits $(u^2 - u,u)$, **l'ordine** $\mathbf{2}^{2(2e-1)}$ **per** $\sigma = \mathbf{2}^e$, $u \in GF(2^{2e-1})$ **(Ostrom [115])**

2. Kantor $(u^2 - u, u)$, **l'ordine** $3^{2(2e-1)}$, $\sigma = 3^e$, $u \in GF(3^e)$.**(si veda Capitolo 13).**

3. Biliotti - Menichetti, $(u^4 + u^2, u)$, **l'ordine 64,** $u \in GF(8)$ **(si veda [17]).**

4. Jha-Johnson, $(u + u^2, u)$, **l'ordine 64,** $u \in GF(8)$. **(si veda [74]).**

Per descrivere i piani di tipo 2, useremo il metodo di elevazione visto nel Capitolo 4.

TEOREMA 11.8. Sia π un piano non-Desarguesiano di traslazione di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$. Allora, ci sono almeno due piani proiettivi delle classe II-1 di Lenz-Barlotti di tipo 2 che possono essere costruiti con il metodo dell' elevazione.

Cenni della dimostrazione: si scelga una fibrazione per π definita da:

$$x = O, y = x \begin{bmatrix} u & v \\ m(u, v) & h(u, v) \end{bmatrix}$$

$u, v \in K$, dove m, h sono funzioni non biadditive da $K \times K$ a K. Le funzioni m, h sono biadditive se e solo se π é un piano su un semicorpo con $x = O$ come asse di elazioni. Cambiando le coordinate in modo tale che $x = O$ non sia asse di elazioni, allora le funzioni corrispondenti m e h non sono entrambe biadditive. Con l'elevazione, si costruisca il piano π^L di ordine q^4 e nucleo $F \cong GF(q^2)$. Allora, π^L non è un piano su un semicorpo ed ammette un gruppo di elazione di ordine q^2 che produce un piano di tipo 2 di elazione di traslazione. Allora, π^L produce a almeno due piani proiettivi di tipo 2. Chiaramente, é possibile far variare tale metodo per costruire piani non-isomorfi a partire dallo stesso piano di traslazione.
Si ricordi che un flock conico produce un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo che contiene $K \cong GF(q)$ dotato di un gruppo di elazioni E di ordine q tale che ogni orbita di componenti unione l'asse di E é un regolo in $PG(4, K)$. È facile provare che questo piano é di tipo $q + 1$.

TEOREMA 11.9. (Johnson [**74**]).

(i) Un flock conico è equivalente ad un piano di tipo $q + 1$.

(ii) Un flock conico che non è un flock su un semicorpo è equivalente a un piano proiettivo della classe II-1 di Lenz-Barlotti di tipo $q + 1$.

Per descrivere i piani di tipo $q+1$, possiamo discrivere i piani corrispondenti di tipo $(q + 1)$ di traslazione.

Descrizione dei piani di tipo q+1

1. I piani likeable di Kantor di ordine 5^{2r}(tipo I.2 nel Capitolo 7, si veda anche Kantor [104]).

2. I piani di tipo $q+1$ di s-inversione dai piani likeable di Kantor (si veda il Capitolo 7(7.8)).

3. I piani di Walker-Betten. (si veda [33] per i piani di tipo $q+1$), (tipo I.1 in Capitolo 7).

4. I piani dal flock di Fisher. I piani di tipo $q+1$ sono nuovi (tipo III-2 nel Capitolo 7).

5. Piani derivati di Barriga-Cohen-Ganley (si veda Kantor [103] e Payne [122] per i quadrangoli generalizzati). I piani di tipo $q+1$ sono nuovi (tipo III-1 nel Capitolo 7).

6. I piani di s-inversione dai piani di Barriga-Cohen-Ganley sono nuovi (si veda (7.9)).

7. I piani di s-inversione dei piani di Ganley su un semicorpo . I piani di tipo $q+1$ sono nuovi (tipo II-3 in Capitolo 7-si veda (7.8)).