CAPITOLO 9

Derivazione dei piani duali di piani di traslazione

Sia π^t un piano affine di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$. Le coordinate $Q = (Q, +, \cdot)$ possono essere scelte in modo tale che i punti siano le coppie (x, y) con $x, y \in Q$ e le rette abbiano equazioni $y = x \cdot m + b$, $x = c$ con $m, b, c \in Q$. Inoltre, $(Q, +, \cdot)$ ha le seguenti proprietà :

(i) $(Q, +)$ è un gruppo abeliano elementare,

(ii) Q è uno spazio vettoriale sinistro di dimensione due su K. Cioè:

$\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$, $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$, $(\alpha\ \beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot b)$, dove $\alpha, \beta \in K$, $a, b \in K$).

Si estenda π^t a un piano proiettivo π^{t+} e si formi il duale di π^{t+}, π^{d+}, si costruisca un piano affine π^d rimuovendo la retta per (∞) in π^{d+}.

In questo caso, a π^d può essere assegnato un'insieme delle coordinate $Q^d = (Q, +, *)$ tale che:

$a * b = b \cdot a$ dove le rette hanno equazioni $x = c$, $y = x * m + b$ con $c, m, b \in Q^d$.

Da (8.5), π^d è derivabile. Questo metodo produce a molti piani derivabili.

Definizione 9.1. *(i) Sia π^d un piano affine di traslazione duale di π^t. Sia R^d una rete derivabile in π^d. Diremo che π^d ha la proprietá del nucleo rispetto a R^d se e solo se esiste un sottogruppo non banale di omologie H_P in π^t che fissa un punto affine P di π^d e la rete R^d.*

(ii) Una rete derivabile R^d in π^d di ordine q^2 è una rete del nucleo se e solo se $|H_P| = q - 1$.

Teorema 9.2. Teorema (si veda Johnson [**71**](8.3)).

Esistono esattamente $(q^2+1)(q+1)$ reti derivabili, che sono reti del nucleo, ottenute da un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$.

Esistono molti piani di traslazione di ordine q^2 con nucleo arbitrario il cui duale é derivabile. Per esempio esistono piani su semicorpi che hanno questa proprietá (Biliotti e Menichetti [**16**], Vincenti [**140**] e Johnson-Rahilly [**98**]).

Definizione 9.3. *Nella rete derivabile R^d, ogni sottopiano di Baer diventa una retta nella rete derivata R^s e questo sottopiano è fissato da un gruppo di traslazioni di π^d di ordine q. Anche le orbite di T^d in π^d sono rette in R^d che diventano sottopiani di Baer nel piano derivato π^s.*

La questione più importante relativa alla derivazione é:
Se π^s è un piano di semi-traslazione che é derivato da un piano π^d duale di un piano di traslazione, allora il gruppo delle collineazione di π^s lascia fissa la rete derivata R^s in π^s? Questo gruppo si chiama gruppo ereditato.

Piú in generale, ci si può domandare (quando Σ è un piano affine che è derivabile) se il gruppo ereditato è l'intero gruppo di collineazioni del piano. Chiaramente ció non è sempre vero. Infatti, si consideri, per esempio, il caso in cui il piano derivato é un piano su un semicorpo.

Per i piani di traslazione che sono derivabili si ha:

Teorema 9.4. (Johnson, Ostrom [**93**]).

Sia π^t un piano finito di traslazione di ordine almeno 16. Sia R^t una rete derivabile e sia $K \cong GF(q)$, q potenz di un primo, il nucleo di π^t. Esistono esattamente $(q^2+1)(q+1)$ reti derivabili che sono reti del nucleo che possono essere ottenute da un piano di traslazione di ordine q^2. Se i sottopiani di R^t che sono incidenti con il vettore nullo non sono tutti K-spazi, allora l'intero gruppo di collineazioni del piano derivato da π^t è il gruppo ereditato.

Walker [**141**] ha studiato il caso in cui ci sono molte reti derivabli R_i, $i = 1, 2, \ldots, t$ che hanno a due a due intersezione identica nel piano Desarguesiano Σ di ordine q^2. Nello specifico Walker ha provato che se il piano Σ costruito dalla derivazione di $\{R_i | i = 1, 2, \ldots, t \leq q-1\}$ non è un piano di Andrè di tipo particolare, allora il gruppo di collineazioni di Σ é il gruppo ereditato; cioé, il gruppo permuta le reti derivate.

Nel Capitolo 12, parleremo di gruppi ereditati nei piani di semi-traslazione per particolari applicazioni.

Quando il piano π^d è un piano su un semicorpo, di ordine > 16, allora il gruppo di collineazioni del piano di semi-traslazione π^s è sempre il gruppo ereditato.

Recentemente, é stata studiata la seguente situazione:

Teorema 9.5. (Johnson [**71**], Theorem A).

Sia π^d un piano affine duale di un piano di traslazione di ordine $q^2 > 16$ che ammette una rete derivabile R^d contenente l'asse di una elazione. Sia π^s il piano di semi-traslazione ottenuto derivando R^d.

Allora, puó verificarsi una delle seguenti situazioni:

(1) Il gruppo di collineazioni di π^s è il gruppo ereditato.

(2)(a) L'ordine di π^s è pari e il sottogruppo di omologie del nucleo del piano di traslazione associato che fissa la rete R^d è banale.

(2)(b) Esiste un punto affine P tale che il gruppo delle collineazioni di π^s che fissa il punto P non fissa la rete derivata R^s; questo gruppo contiene un sottogruppo $G \cong SL(2, q)$ dove i 2-sottogruppi di Sylow fissano ogni punto dei sottopiani di Baer.

(2)(c) π^s è un piano di semi-traslazione ma non è un piano di traslazione.

Introduciamo alcuni risultati sui piani isomorfi:

Corollario 9.6. (Johnson [**71**], Corollary B).

Siano π_1^s e π_2^s piani di semi-traslazione isomorfi e di ordine $q^2 > 16$, rispettivamente derivati dai piani di traslazione duali π_1^d, π_2^d rispetto alle reti derivabili R_i^d, $i = 1, 2$ contenenti l'asse di una elazione. Se l'intero gruppo di collineazioni di π_i^s , $i = 1, 2$, é il gruppo ereditato, allora π_1^d è isomorfo a π_2^d.

Quando il piano π^t di ordine q^2 ha nucleo $K \cong GF(q)$, abbiamo:

Corollario 9.7. (Johnson [**71**], Corollary C).

Sia π^t un piano di traslazione di ordine $q^2 > 16$ e nucleo $K \cong GF(q)$. Sia π^{d+} il duale dell' estensione proiettiva π^{t+} di π^t e sia (∞) il punto di π^{d+} corrispondnete alla retta all'infinito di π^t. Allora

(1) ci sono $q+1$ reti derivate in ogni piano affine $\pi^{d+} - M$ di π^{d+} ottenuto rimuovendo una retta M incidente con il punto (∞). Inoltre, queste reti contengono l'asse di una elazione e sono fissate da un gruppo di omologie del nucleo di ordine $q-1$.

(2) L'intero gruppo di collineazioni del piano di semi-traslazione π^s ottenuto derivando una qualunque rete del nucleo di $\pi^{d+} - M$ è il gruppo ereditato.

(3) Siano π_1^s e π_2^s piani di semi-traslazione isomorfi e derivati dai piani π_1^d, π_2^d, rispettivamente, allora π_1^s e π_2^s sono duali di piani di traslazione di ordine $q^2 > 16$. Allora π_2^d è isomorfo a π_1^d.

Corollario 9.8. *Sia π^t un piano di traslazione di ordine $q^2 > 16$ e nucleo $K \cong GF(q)$ tale che l'intero gruppo di collineazioni consista del gruppo di traslazioni e del gruppo di omologie del nucleo. Allora, il numero dei piani di semi-traslazione che non sono isomorfi ottenuti derivando una rete del nucleo di un piano duale di π^t é $(q^2+1)(q+1)$.*

Esiste un piano di traslazione π^t di ordine 17^2 che ha origine dagli ovoidi di Conway, Kleidman e Wilson. In [**24**], Charnes prova che il gruppo delle collineazioni di π^t consiste del gruppo di omologie del nucleo di ordine $q-1$ e del gruppo di traslazioni.

Nota 9.9. *Il piano di Charnes di ordine 17^2 produce a $(17^2+1)(17+1)$ piani di traslazione che non sono isomorfi.*