CAPITOLO 3

Operatori ellittici in $\mathbb{R}^N$

3.1. Stime L^p in $\mathbb{R}^N$ per operatori uniformemente ellittici

Ora ci proponiamo di dimostrare risultati analoghi a quelli ottenuti per l'operatore di Laplace nel caso di operatori ellittici. Iniziamo col provare stime L^p per operatori a coefficienti costanti del tipo

$$A_0 := \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij}$$

con $a = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ matrice reale simmetrica soddisfacente la seguente *condizione di ellitticità*:

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N \text{ e con } \nu > 0.$$

Con un semplice cambio di variabili, possiamo trasformare l'operatore ellittico A_0 sopra definito nel laplaciano per ottenere in modo immediato stime analoghe a quelle provate in precedenza.

PROPOSIZIONE 3.1. *Se $1 < p < \infty$, allora esiste $C = C(N, p, \nu)$ tale che*

$$\|u\|_{2,p} \leq C(N, p, \nu)\ [\|u\|_p + \|A_0 u\|_p]$$

per ogni $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$.

DIM. Consideriamo prima il caso in cui (a_{ij}) è una matrice diagonale ossia l'operatore è del tipo

$$A_0 = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i D_{ii}.$$

Osserviamo che la condizione di ellitticità vale con $\nu = \min\{\lambda_i : i = 1, ..., N\}$.
Sia $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ e consideriamo $v \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$u(x) = v\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

(con la notazione $\frac{x}{\sqrt{\lambda}}$ intendiamo il vettore di componenti $\frac{x_1}{\sqrt{\lambda_1}}, ..., \frac{x_N}{\sqrt{\lambda_N}}$).
Risulta

$$D_{ij}u(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}} D_{ij}v\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

e

$$A_0u(x) = \Delta v\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Per quanto osservato e per il Corollario 2.13, abbiamo

$$\begin{aligned}
\|D_{ij}u\|_p &\leq \frac{1}{\nu}\left\|D_{ij}v\left(\frac{\cdot}{\sqrt{\lambda}}\right)\right\|_p \\
&= \frac{c(\lambda)}{\nu}\|D_{ij}v\|_p \leq \frac{c(\lambda)}{\nu}C(N,p)\|\Delta v\|_p \\
&= \frac{C(N,p)}{\nu}\left\|\Delta v\left(\frac{\cdot}{\sqrt{\lambda}}\right)\right\|_p = \frac{C(N,p)}{\nu}\|A_0u\|_p.
\end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto

$$\|D^2u\|_p \leq \frac{C(N,p)}{\nu}\|A_0u\|_p. \tag{3.1}$$

Trattiamo il caso generale. Sia Q matrice ortogonale tale che $QaQ^* = D_\lambda$, dove D_λ è una matrice diagonale avente come elementi $\lambda_1, ..., \lambda_N$, autovalori di a, e sia v tale che $u(x) = v(Qx)$. Siccome

$$\nabla u(x) = Q^*\nabla v(Qx) \quad \text{e} \quad D^2u(x) = Q^*D^2v(Qx)Q$$

risulta

$$\begin{aligned}
A_0u(x) &= tr(aD^2u(x)) = tr(aQ^*D^2v(Qx)Q)) \\
&= tr(QaQ^*D^2v(Qx)) = \sum_i \lambda_i D_{ii}(Qx).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Osserviamo che

$$|D^2u(x)|^2 = |D^2v(Qx)|^2 \tag{3.3}$$

poiché Q è ortogonale. Per (3.3), (3.2), (3.1) e siccome $|detQ| = 1$

$$\begin{aligned}
\|D^2u\|_p &= \|D^2v(Q\cdot)\|_p = \|D^2v\|_p \leq \frac{C(N,p)}{\nu}\left\|\sum_i \lambda_i D_{ii}v\right\|_p \\
&= \frac{C(N,p)}{\nu}\left\|\sum_i \lambda_i D_{ii}v(Q\cdot)\right\|_p = \frac{C(N,p)}{\nu}\|A_0u\|_p.
\end{aligned}$$

Sia nel caso dell'operatore in forma diagonale, che in quello generale, dalla disuguaglianza interpolativa (vedi Proposizione 2.15) e dalle precedenti segue

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2,p} &= \|D^2u\|_p + \|\nabla u\|_p + \|u\|_p \\
&\leq C(N,p,\nu)\,[\|u\|_p + \|A_0u\|_p].
\end{aligned}$$

□

Passiamo adesso al caso generale di un operatore A *uniformemente ellttico* così definito

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)D_{ij}u(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)D_iu(x) + c(x)$$

dove $a_{ij} = a_{ji} \in BUC(\mathbb{R}^N)$, $b_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ per $i,j = 1,....,N$, $c \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Inoltre supponiamo che i coefficienti a_{ij} soddisfano la condizione di ellitticità

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2$$

e la stima

$$\left|\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\right| \leq \Lambda|\xi|^2$$

per ogni $\xi, x \in \mathbb{R}^N$, dove

$$\nu = \inf_{x\in\mathbb{R}^N}\{\text{minimo autovalore di } a_{ij}(x)\};$$

$$\Lambda = \sup_{x\in\mathbb{R}^N}\{\text{massimo autovalore di } a_{ij}(x)\}.$$

Poniamo

$$M := \max\{\|a_{ij}\|_\infty, \|b_i\|_\infty, \|c\|_\infty\};$$

$$\omega(r) := \max_{i,j} \sup_{|x-y|<r} |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)|.$$

OSSERVAZIONE 3.2. La funzione $\omega(r)$ è il massimo dei moduli di continuità dei coefficienti a_{ij}. Poiché questi sono uniformemente continui risulta

$$\lim_{r\to 0}\omega(r) = 0.$$

Nel seguito proveremo stime L^p per la classe di operatori ellittici sopra definiti. La tecnica usata nella dimostrazione consiste nell'applicazione delle stime provate nella Proposizione 3.1 ad operatori a coefficienti costanti ottenuti "congelando" i coefficienti dell'operatore dato nei centri di opportune palle di $\mathbb{R}^N$. Per poter passare dalle palle a tutto $\mathbb{R}^N$ applicheremo il seguente lemma di ricoprimento.

LEMMA 3.3 (di ricoprimento). *Esiste $\xi(N) \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $r > 0$ esiste una famiglia di palle $\big(B(x_n, r/2)\big)$ che ricopre $\mathbb{R}^N$, con al più $\xi(N)$ tra le palle di raggio doppio $B(x_n, r)$ aventi intersezione non vuota, cioè*

(i) $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, r/2)$
(ii) $\bigcap_{i\in S} B(x_i, r) = \emptyset$ *per ogni* $S \subset \mathbb{N}$ *con* $|S| > \xi(N)$.

DIM. Fissiamo $r > 0$ e poniamo $L := \frac{r}{\sqrt{N}}$. Ricopriamo $\mathbb{R}^N$ con cubi disgiunti di lato L,

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q(x_n, L).$$

Osserviamo che, in virtù della scelta di L, ciascun cubo di centro x_n e lato L è contenuto nella palla di centro x_n e raggio $\frac{r}{2}$, così

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q(x_n, L) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B\left(x_n, \frac{r}{2}\right).$$

Sia ora $S \subset \mathbb{N}$ e sia $x \in \bigcap_{i \in S} B(x_i, r)$. Per ogni $i \in S$

$$Q(x_i, L) \subset B\left(x_i, \frac{r}{2}\right) \subset B\left(x, \frac{3}{2} r\right)$$

essendo $|x - x_i| < r$. Pertanto, essendo i cubi disgiunti,

$$|S| \frac{r^N}{N^{\frac{N}{2}}} = \sum_{i \in S} |Q(x_i, L)| \leq \omega_N \frac{3^N}{2^N} r^N.$$

Quindi abbiamo provato che se $\cap_{i \in S} B(x_i, r)$ è non vuota $|S| < \frac{3^N}{2^N} N^{\frac{N}{2}} \omega_N$. Basta allora prendere $\xi(N) := \omega_N \frac{3^N}{2^N} N^{\frac{N}{2}}$. □

Passiamo adesso a provare stime a priori L^p per operatori ellittici.

TEOREMA 3.4 (Stime a priori). *Se $1 < p < \infty$, allora esiste $C = C(N, p, \nu, M, \omega) > 0$ tale che*

$$\|u\|_{2,p} \leq C(N, p, \nu, M, \omega)\ [\|u\|_p + \|Au\|_p]$$

per ogni $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$.

DIM. Dati $x_0 \in \mathbb{R}^N, r > 0$, sia $\eta \in C_c^\infty(B(x_0, r))$ tale che $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ in $B(x_0, \frac{r}{2})$, $\|\nabla \eta\|_\infty \leq \frac{L}{r}$ e $\|D^2 \eta\|_\infty \leq \frac{L}{r^2}$ per qualche $L > 0$. Scriviamo semplicemente $\|\cdot\|_{k,p,r}$ al posto di $\|\cdot\|_{W^{k,p}(B(x_0,r))}$ per $k = 1, 2$. L'operatore

$$A_{x_0} = \sum_{i,j} a_{ij}(x_0) D_{ij}$$

è a coefficienti costanti e la Proposizione (3.1) applicata alla funzione ηu fornisce

$$\|\eta u\|_{2,p} \leq C(N, p, \nu)\ [\|\eta u\|_p + \|A_{x_0}(\eta u)\|_p].$$

Da qui segue

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{2,p,\frac{r}{2}} &\leq \|\eta u\|_{2,p} \\
&\leq C(N,p,\nu)\big[\|u\|_{p,r} + \big\|\eta A_{x_0}u + uA_{x_0}\eta + 2\sum_{i,j} a_{ij}(x_0)D_iuD_j\eta\big\|_p\big] \\
&\leq C(N,p,\nu)\left[\|u\|_{p,r} + \|A_{x_0}u\|_{p,r} + \frac{ML}{r^2}\|u\|_{p,r} + \frac{ML}{r}\|\nabla u\|_{p,r}\right] \\
&= C(N,p,\nu)\,[\|A_{x_0}u\|_{p,r} + K(M,r)\|u\|_{1,p,r}] \\
&\leq C(N,p,\nu)\,[\|Au\|_{p,r} + \|(A_{x_0}-A)u\|_{p,r} + K(M,r)\|u\|_{1,p,r}] \\
&= C(N,p,\nu)\Bigg[\|Au\|_{p,r} + \big\|\sum_{i,j}(a_{ij}(x_0)-a_{ij}(x))D_{ij}u\big\|_{p,r} \\
&\qquad\qquad +K(M,r)\|u\|_{1,p,r}\Bigg] \\
&\leq C(N,p,\nu)[\|Au\|_{p,r} + \omega(r)\|D^2u\|_{p,r} + K(M,r)\|u\|_{1,p,r}] \\
&\leq C(N,p,\nu)[\|Au\|_{p,r} + \omega(r)\|u\|_{2,p,r} + K(M,r)\|u\|_{1,p,r}]
\end{aligned}
$$

dove con $C(N,p,\nu)$ e $K(M,r)$ abbiamo indicato generiche costanti dipendenti dai parametri in parentesi.
Elevando ambo i membri alla potenza p-esima, otteniamo

$$
\|u\|^p_{2,p,\frac{r}{2}} \leq C(N,p,\nu)[\|Au\|^p_{p,r} + \omega^p(r)\|u\|^p_{2,p,r} + K^p(M,r)\|u\|^p_{1,p,r}]. \quad (3.4)
$$

Sia ora $(B(x_n,\frac{r}{2}))$ una famiglia di palle come nel Lemma 3.3. Applichiamo la stima (3.4) in ciascuna delle $B(x_n,\frac{r}{2})$ e sommiamo su n. Otteniamo

$$
\begin{aligned}
\|u\|^p_{2,p} &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|u\|^p_{2,p,B(x_n,\frac{r}{2})} \\
&\leq C(N,p,\nu)\sum_{n\in\mathbb{N}}\Bigg[\|Au\|^p_{p,B(x_n,r)} + \omega^p(r)\|u\|^p_{2,p,B(x_n,r)} \\
&\qquad\qquad +K^p(M,r)\|u\|^p_{1,p,B(x_n,r)}\Bigg] \\
&\leq \xi(N)C(N,p,\nu)[\|Au\|^p_p + \omega^p(r)\|u\|^p_{2,p} + K^p(M,r)\|u\|^p_{1,p}].
\end{aligned}
$$

Scegliendo r in modo tale che $\omega^p(r)\xi(N)C^p(N,p,\nu) \leq \frac{1}{2}$ e portando a primo membro $\omega^p(r)\xi(N)C^p(N,p,\nu)\|u\|^p_{2,p}$ otteniamo

$$
\|u\|^p_{2,p} \leq C^p(N,p,\nu)[\|Au\|^p_p + K^p(M,r)\|u\|^p_{1,p}]
$$

da cui segue

$$
\|u\|_{2,p} \leq C(N,p,\nu)[\|Au\|_p + K(M,r)\|u\|_{1,p}].
$$

Usando le stime interpolative della Proposizione 2.15

$$
\|u\|_{2,p} \leq C(N,p,\nu)\left[\|Au\|_p + K(M,r)\varepsilon\|D^2u\|_p + \frac{K(M,r)}{\varepsilon}\|u\|_p\right].
$$

Scegliendo infine ε in modo tale che $C(N,p,\nu)K(M,r)\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ abbiamo la tesi. $\square$

Proviamo adesso una stima analoga a (2.18) per l'operatore ellittico nella forma più generale.

TEOREMA 3.5 (Agmon). *Sia $1 < p < \infty$. Esistono λ_0, C costanti strettamente positive dipendenti da N,p,ν,M,ω, tali che $\forall\ u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$, $\forall\ \lambda \geq \lambda_0$*

$$\lambda\|u\|_p + \lambda^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_p + \|D^2u\|_p \leq C\|(\lambda - A)u\|_p.$$

DIM. Definiamo un nuovo operatore A_1 in questo modo:

$$A_1 := A + D_{tt}.$$

A_1 è ancora un operatore ellittico e agisce su funzioni della variabile $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Osserviamo che le nuove grandezze $N_1, \nu_1, M_1, \omega_1$ sono legate alle precedenti dalle seguenti relazioni:

$$N_1 = N+1 \quad \nu_1 = \min\{\nu, 1\} \quad M_1 = \max\{M, 1\} \quad \omega_1 = \omega.$$

Sia $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\eta \equiv 1$ in $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ e $supp\,\eta \subseteq [-1,1]$. Applichiamo il Teorema 3.4 all'operatore A_1 e alla funzione $v(t,x) := \eta(t)e^{irt}u(x)$, con $r \in \mathbb{R}$. Otteniamo

$$\begin{aligned}
\|v\|_{2,p,\mathbb{R}^{N+1}} &\leq C(N,p,\nu,M,\omega)[\|v\|_{p,\mathbb{R}^{N+1}} + \|A_1 v\|_{p,\mathbb{R}^{N+1}}] \\
&\leq C(N,p,\nu,M,\omega) \\
&\quad \times \left[\|u\|_p + \|\eta e^{irt}Au + u\eta'' e^{irt} + 2ire^{irt}\eta' u - r^2\eta e^{irt}u\|_{p,\mathbb{R}^{N+1}}\right] \\
&\leq C(N,p,\nu,M,\omega)[\|u\|_p + \|(A-r^2)u\|_{p,\mathbb{R}^{N+1}} + (1+2r)\|u\|_p] \\
&\leq C(N,p,\nu,M,\omega)[(1+r)\|u\|_p + \|(A-r^2)u\|_p].
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\|v\|^p_{2,p,\mathbb{R}^{N+1}} &\geq \|v\|^p_{2,p,\mathbb{R}^N\times[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{|\alpha|\leq 2} |D^\alpha(e^{irt}u(x))|^p dxdt \\
&= \|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p + \|D^2u\|_p^p + r^p\|u\|_p^p + r^{2p}\|u\|_p^p + 2r^p\|\nabla u\|_p^p \\
&\geq \|D^2u\|_p^p + r^p\|\nabla u\|_p^p + r^{2p}\|u\|_p^p.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\|D^2u\|_p + r\|\nabla u\|_p + r^2\|u\|_p \leq C(N,p,\nu,M,\omega)[(1+r)\|u\|_p + \|(A-r^2)u\|_p].$$

Scegliendo r_0 in modo tale che, se $r \geq r_0$, $r^2 - C(N,p,\nu,M,\omega)(1+r) \geq \frac{r^2}{2}$, otteniamo infine

$$\|D^2u\|_p + r\|\nabla u\|_p + \frac{1}{2}r^2\|u\|_p \leq C(N,p,\nu,M,\omega)\|(A-r^2)u\|_p \tag{3.5}$$

per ogni $r \geq r_0$. Riscrivendo (3.5) per $\lambda = r^2$ e ponendo $\lambda_0 := r_0^2$, segue la tesi. $\square$

Per ricavare esistenza e unicità della soluzione dell'equazione $\lambda u - Au = f$, useremo un risultato generale di analisi funzionale, che è noto come *metodo di continuità* e rappresenta un potente strumento nella risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali.

TEOREMA 3.6 (Metodo di continuità). *Siano X, Y spazi di Banach, L_0 ed L_1 operatori lineari e continui da X in Y. Consideriamo gli operatori lineari*

$$L_t = (1-t)L_0 + tL_1, \qquad t \in [0,1],$$

e supponiamo che esista una costante $C > 0$ tale che

$$\|L_t x\|_Y \geq C\,\|x\|_X, \quad x \in X,\ t \in [0,1]. \tag{3.6}$$

Se L_0 è suriettivo allora anche L_1 è suriettivo (e quindi bigettivo per la stima (3.6)).

DIM. Osserviamo che la stima (3.6) implica che ogni L_t è iniettivo.

Sia $E = \{t \in [0,1] : L_t \text{ è bigettivo}\}$. Per ipotesi $0 \in E$, per cui $E \neq \emptyset$. Se $t_0 \in E$ allora L_{t_0} è bigettivo, e, per (3.6), $\|L_{t_0}^{-1}\| \leq \frac{1}{C}$. Inoltre $L_t = L_{t_0}\left(I + (t-t_0)L_{t_0}^{-1}(L_1 - L_0)\right)$. Allora L_t è invertibile se e solo se $I + (t - t_0)L_{t_0}^{-1}(L_1 - L_0)$ è invertibile. Ciò è assicurato se $\|(t-t_0)L_{t_0}^{-1}(L_1 - L_0)\| < 1$ e per questo è sufficiente che $|t - t_0| < \frac{C}{\|L_1\|+\|L_0\|}$. Posto $\delta = \frac{C}{2(\|L_1\|+\|L_0)}$ e preso $t_0 = 0 \in E$, per quanto provato si ha che $[0,\delta] \subset E$. Ripartendo da δ e ripetendo lo stesso ragionamento si ottiene che $[\delta, 2\delta] \subset E$, e così via. Dopo un numero finito di passi si avrà che $[0,1] \subset E$, quindi la tesi. □

A questo punto, come anticipato, siamo in grado di provare esistenza e unicità.

TEOREMA 3.7. *Sia $1 < p < \infty$. Esistono λ_0, $C > 0$ dipendenti da N, p, ν, M, ω tali che per ogni $\lambda \geq \lambda_0$ l'operatore $\lambda - A : W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \to L^p(\mathbb{R}^N)$ è invertibile e le seguenti disuguaglianze sono verificate (la norma è quella degli operatori in L^p)*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_p \leq \frac{C}{\lambda}; \tag{3.7}$$

$$\|\nabla(\lambda - A)^{-1}\|_p \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}}; \tag{3.8}$$

$$\|D^2(\lambda - A)^{-1}\|_p \leq C. \tag{3.9}$$

DIM. Consideriamo gli spazi

$$X = W^{2,p}(\mathbb{R}^N), \qquad Y = L^p(\mathbb{R}^N)$$

e gli operatori

$$L_0 = \lambda - \Delta, \quad L_1 = \lambda - A, \quad L_t = \lambda - [(1-t)\Delta + tA].$$

Per il Teorema 2.18, l'operatore L_0 è invertibile se $\lambda > 0$. Per il Teorema 3.5 applicato all'operatore $A_t := (1-t)\Delta + tA$, esistono C e λ_0 dipendenti da N, p, ν_t, M_t, ω_t tali che

$$\|u\|_{2,p} \leq C\|(\lambda - A_t)u\|_p$$

per ogni $\lambda \geq \lambda_0$. Osservando che

$$M_t \leq \max\{1, M\}, \quad \nu_t \geq \min\{1, \nu\}, \quad \omega_t = t\omega \leq \omega,$$

possiamo pertanto eliminare la dipendenza delle costanti C e λ_0 da t. Sono soddisfatte le ipotesi del Teorema 3.6 da cui otteniamo l'invertibilità dell'operatore $L_1 = \lambda - A$.
Le disuguaglianze (3.7), (3.8) e (3.9) seguono immediatamente dal Teorema (3.5). □

3.2. Stime L^p in $\mathbb{R}^N$ per operatori ellittici in forma divergenza

Ci occupiamo di operatori ellittici della forma

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} D_i(a_{ij}D_j) + \sum_{i=1}^{N} b_i D_i + c$$

con a_{ij}, $b \in C_b^1(\mathbb{R}^N)$, $c \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2 \quad \text{per ogni } x, \xi \in \mathbb{R}^N$$

dove $\nu > 0$. Poniamo

$$M := \max\{\|a_{ij}\|_\infty, \ \|\nabla a_{ij}\|_\infty, \ \|b_i\|_\infty, \ \|c\|_\infty\}$$

e

$$\omega(r) := \max_{i,j} \sup_{|x-y|<r} |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)|.$$

Osserviamo che, per l'ipotesi sui coefficienti a_{ij}, risulta $\omega(r) \leq Mr$.
In questa sezione diamo stime esplicite per le costanti λ_0 e C del Teorema 3.7.
Abbiamo bisogno di un lemma preliminare la cui dimostrazione è analoga a quella del Lemma 2.19.

Lemma 3.8. *Sia $1 < p < \infty$ e sia $A_0 := \sum_{i,j=1}^N D_i(a_{ij}D_j)$ l'operatore ottenuto da A annullando i coefficienti b_i e il termine noto c. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^N} A_0 u u |u|^{p-2} \leq 0$$

per ogni $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$.

Poniamo adesso

$$\lambda_p := \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \big[-\frac{\mathrm{div} b(x)}{p} + c(x)\big].$$

TEOREMA 3.9. *Sia $1 < p < \infty$. Se $\lambda > \lambda_p$, l'operatore $\lambda - A : W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \to L^p(\mathbb{R}^N)$ è invertibile. Inoltre, vale la stima*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_p \le \frac{1}{\lambda - \lambda_p}. \tag{3.10}$$

DIM. Consideriamo l'equazione $\lambda - Au = f$ con $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Moltiplichiamo ambo i membri per $u|u|^{p-2}$ e integriamo su $\mathbb{R}^N$. Otteniamo così

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^N D_i(a_{ij}D_j u)u|u|^{p-2}$$
$$- \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N b_i(D_i u)u|u|^{p-2} - \int_{\mathbb{R}^N} c|u|^p = \int_{\mathbb{R}^N} fu|u|^{p-2}.$$

Siccome $(D_i u)u|u|^{p-2} = \frac{1}{p}D_i|u|^p$ si ha

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^N D_i(a_{ij}D_j u)u|u|^{p-2}$$
$$-\frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N b_i D_i|u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} c|u|^p = \int_{\mathbb{R}^N} fu|u|^{p-2}$$

e, per il Lemma 3.8,

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N b_i D_i|u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} c|u|^p \le \int_{\mathbb{R}^N} fu|u|^{p-2}.$$

Integrando per parti il secondo integrale a primo membro e applicando la disuguaglianza di Hölder otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\lambda + \frac{\mathrm{div} b}{p} - c\right)|u|^p \le \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

da cui, per com'è definito λ_p,

$$(\lambda - \lambda_p)\|u\|_p \le \|f\|_p. \tag{3.11}$$

Se $\lambda > \lambda_p$ e $\lambda \in \rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ (\lambda - A) \text{ è invertibile}\}$, quest'ultima disuguaglianza ci dà (3.10). Proviamo che per ogni $\lambda > \lambda_p$, $\lambda \in \rho(A)$. Per il Teorema 3.7, esiste $\lambda_0 = \lambda_0(N, p, \nu, M, \omega)$ tale che per ogni $\lambda \ge \lambda_0$ l'operatore $\lambda - A$ è invertibile. Se $\lambda_p \ge \lambda_0$, abbiamo subito la tesi. Supponiamo $\lambda_p < \lambda_0$. e, per assurdo,

$$\lambda_1 = \inf \big\{\lambda \in (\lambda_p, \lambda_0) \ \big| \ (\lambda, \lambda_0) \subset \rho(A)\big\} > \lambda_p.$$

Allora $\lambda_1 \in \sigma(A)$, perché $\rho(A)$ è aperto, e $\lim_{\lambda \to \lambda_1} \|R(\lambda, A)\| = +\infty$, in contraddizione con (3.11). Allora $\lambda_1 = \lambda_p$ e la tesi è provata. □

Vediamo adesso come i risultati di esistenza e unicità permettono di provare risultati di regolarità ellittica.

PROPOSIZIONE 3.10. *Siano* $1 < p,\ q < \infty$ *e sia* $u \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. *Se* $u, Au \in L^q(\mathbb{R}^N)$, *allora* $u \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$.

DIM. La funzione $f := \lambda u - Au$ appartiene a $L^q(\mathbb{R}^N)$ per ipotesi. Per il Teorema 3.9 se $\lambda > \lambda_q$ esiste un'unica $v \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\lambda v - Av = f = \lambda u - Au.$$

La funzione $w := u - v$ soddisfa $w, Aw \in L^q(\mathbb{R}^N)$ e

$$\lambda w - Aw = 0. \tag{3.12}$$

Sia $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Moltiplichiamo ambo i membri di (3.12) per ϕ e integriamo su $\mathbb{R}^N$. Otteniamo

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda w - Aw)\phi = \int_{\mathbb{R}^N} w(\lambda\phi - A^*\phi) \tag{3.13}$$

dove

$$A^* = \sum_{i,j=1}^N D_i(a_{ij}D_j) - \sum_{i=1}^N b_i D_i + c - \mathrm{div} b.$$

Per densità, (3.13) vale per ogni $\phi \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$. Per il Teorema 3.9 applicato all'operatore A^*, per ogni $\lambda > \lambda_{q'}$, l'operatore $\lambda - A^* : W^{2,q'}(\mathbb{R}^N) \to L^{q'}(\mathbb{R}^N)$ è invertibile. Fissato $\lambda > \max\{\lambda_q, \lambda_{q'}\}$ esiste $\phi \in W^{2,q'}(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\lambda\phi - A^*\phi = w|w|^{q-2}$$

e, per (3.13),

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} |w|^q.$$

Pertanto $w \equiv 0$ e $u = v \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$. □

PROPOSIZIONE 3.11. *Siano* $1 < p < q < \infty$ *e sia* $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. *Se* $\lambda u - Au \in L^q(\mathbb{R}^N)$, *allora* $u \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$.

DIM. Sia $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. Supponiamo $p < \frac{N}{2}$. Per i Teoremi di immersione di Sobolev, $u \in L^{p_1}(\mathbb{R}^N)$ con p_1 tale che $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} - \frac{2}{N}$. Supponiamo $p_1 < q$. Per ipotesi, posto $g = \lambda u - Au$, risulta $g \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$ e quindi $g \in L^{p_1}(\mathbb{R}^N)$. Allora $Au = \lambda u + g \in L^{p_1}(\mathbb{R}^N)$ e per la Proposizione 3.10, $u \in W^{2,p_1}(\mathbb{R}^N)$. A partire da p_1, ripetendo un ragionamento analogo un numero finito di volte, si prova che $u \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$.
Se invece $p_1 \geq q$ otteniamo la tesi al primo passo. Se $p > \frac{N}{2}$, per la

disuguaglianza di Morrey $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e quindi per interpolazione $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$. Allora $Au = \lambda u + (Au - \lambda u) \in L^q(\mathbb{R}^N)$ e per la Proposizione 3.10, $u \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$. □

Vediamo adesso che il risolvente di un operatore ellittico non dipende da p. Usiamo la notazione A_p per A come operatore in $L^p(\mathbb{R}^N)$ con dominio $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$.

PROPOSIZIONE 3.12. *Siano* $1 < p,\ q < \infty$, *e* $\lambda \in \rho(A_p) \cap \rho(A_q)$. *Se* $f \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$, *allora*

$$(\lambda - A_p)^{-1} f = (\lambda - A_q)^{-1} f.$$

DIM. Poniamo $u := (\lambda - A_p)^{-1} f \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ e $v := (\lambda - A_q)^{-1} f \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$. Allora

$$\lambda u - Au = f$$

e

$$\lambda v - Av = f.$$

Supponiamo $p < q$. La funzione u appartiene a $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ per ipotesi e risolve $\lambda u - Au = f$ con $f \in L^q(\mathbb{R}^N)$, quindi per la Proposizione 3.11, $u \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$. La funzione $v \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$ risolve la stessa equazione ellittica e per unicità della soluzione $u \equiv v$. Se $p > q$, perveniamo allo stesso risultato invertendo nella dimostrazione i ruoli di p e q. □

OSSERVAZIONE 3.13. L'ipotesi $\lambda \in \rho(A_p) \cap \rho(A_q)$ nella precedente proposizione è superflua poiché si può provare che gli insiemi risolventi coincidono.

3.3. Stime L^p interne per operatori uniformemente ellittici

Sia A l'operatore differenziale

$$Au = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} + \sum_{i=1}^N b_i D_i + c$$

dove, come già richiesto in precedenza, $a_{ij} = a_{ji} \in BUC(\mathbb{R}^N)$, $b_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ per ogni $i, j = 1, ..., N$, $c \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Anche qui i coefficienti a_{ij} soddisfano

$$\sum_{ij} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2;$$

per ogni $\xi, x \in \mathbb{R}^N$ e con $\nu > 0$. Ricordiamo le notazioni

$$M := \max\{\|a_{ij}\|_\infty, \|b_i\|_\infty, \|c\|_\infty\}$$

e

$$\omega(r) := \max_{i,j} \sup_{|x-y|<r} |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)|.$$

Proviamo stime L^p senza condizioni al bordo. Con le notazioni del Teorema 3.14 seguente, è necessario che $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$. Infatti se $\Omega_1 = \Omega_2 = B(0,1)$ è il disco unitario in $\mathbb{C}$, le funzioni $f_n(z) = z^n$ soddisfano $\Delta(z^n) = 0$ ma la stima

$$\|f_n\|_{2,p} \leq C\left[\|f_n\|_p + \|\Delta f_n\|_p\right]$$

non può valere per ogni n.

TEOREMA 3.14 (Stime interne). *Siano $1 < p < \infty$, Ω_1, Ω_2 aperti di $\mathbb{R}^N$ con Ω_1 limitato e $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$. Allora esiste $C = C(N, p, \nu, M, \omega, \Omega_1, \Omega_2)$ tale che*

$$\|u\|_{2,p,\Omega_1} \leq C\left[\|u\|_{p,\Omega_2} + \|Au\|_{p,\Omega_2}\right]$$

per ogni $u \in W^{2,p}(\Omega_2)$.

Dimostriamo prima questo teorema per palle di $\mathbb{R}^N$.

LEMMA 3.15. *Siano $1 < p < \infty$, $B(R)$ e $B(2R)$ palle concentriche di $\mathbb{R}^N$ di raggio R e $2R$ rispettivamente. Allora esiste $C = C(N, p, \nu, M, \omega, R)$ tale che*

$$\|u\|_{2,p,B(R)} \leq C(N, p, \nu, M, \omega, R)\left[\|u\|_{p,B(2R)} + \|Au\|_{p,B(2R)}\right]$$

per ogni $u \in W^{2,p}(B(2R))$.

DIM. Per semplicità di notazione, scriviamo $\|\cdot\|_{2,p,R}$ invece che $\|\cdot\|_{2,p,B(R)}$ e analogamente per le norme L^p.
Poniamo

$$R_n := R\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}.$$

Evidentemente $R_0 = R$, $R_\infty = 2R$ e $R_{n+1} - R_n = R2^{-(n+1)}$. Indichiamo con B_n la palla di raggio R_n. Consideriamo funzioni $\eta_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tali che $0 \leq \eta_n \leq 1$, $\eta_n \equiv 1$ in B_n, *supp* $\eta_n \subset B_{n+1}$, $|\nabla \eta_n| \leq \frac{L}{R}2^n$ e $|D^2\eta_n| \leq \frac{L}{R^2}4^n$ per qualche $L > 0$. Applicando le stime globali (Teorema 3.4) alle funzioni

$\eta_n u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\|\eta_n u\|_{2,p} &\leq \widetilde{C}(N,p,\nu,M,\omega)[\|\eta_n u\|_p + \|A(\eta_n u)\|_p] \\
&\leq \widetilde{C}(N,p,\nu,M,\omega)\Bigg[\|u\|_{p,2R} + \Big\|\eta_n Au + 2\sum_{i,j} a_{ij} D_i u D_j \eta_n \\
&\qquad + u\sum_{i,j} a_{ij} D_{ij}\eta_n + u\sum_i b_i D_i \eta_n\Big\|_p\Bigg] \\
&\leq \widetilde{C}(N,p,\nu,M,\omega)\Bigg[\|u\|_{p,2R} + \|Au\|_{p,2R} + \frac{ML}{R^2} 4^n \|u\|_{p,2R} \\
&\qquad + \frac{ML}{R} 2^n \|\nabla u\|_{p,R_{n+1}}\Bigg] \\
&\leq C(N,p,\nu,M,\omega,R)\Bigg[\|Au\|_{p,2R} + 4^n\|u\|_{p,2R} + 2^n\|\nabla \eta_{n+1} u\|_p\Bigg].
\end{aligned}$$

Se stimiamo $\|\nabla(\eta_{n+1}u)\|_p$ servendoci delle disuguaglianze interpolative della Proposizione 2.15 otteniamo

$$\begin{aligned}
\|\eta_n u\|_{2,p} &\leq C(N,p,\nu,M,\omega,R) \\
&\quad \times\left[\|Au\|_{p,2R} + 4^n\|u\|_{p,2R} + 2^n\varepsilon\|\eta_{n+1}u\|_{2,p} + \frac{2^n}{\varepsilon}\|u\|_{p,2R}\right]
\end{aligned}$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Posto $\xi := C(N,p,\nu,M,\omega,R)2^n\varepsilon$, la stima precedente diventa

$$\|\eta_n u\|_{2,p} \leq C\left[\|Au\|_{p,2R} + \left(\frac{C4^n}{\xi} + 4^n\right)\|u\|_{p,2R} + \frac{\xi}{C}\|\eta_{n+1}u\|_{2,p}\right].$$

Moltiplicando ambo i membri per ξ^n, otteniamo

$$\xi^n\|\eta_n u\|_{2,p} \leq \xi^n C\|Au\|_{p,2R} + C_1 4^n \xi^{n-1}\|u\|_{p,2R} + \xi^{n+1}\|\eta_{n+1}u\|_{2,p} \quad (3.14)$$

dove $C_1 = C_1(N,p,\nu,M,\omega,R)$. Scegliamo ε_n in modo tale che ξ sia indipendente da n e minore di $\frac{1}{8}$ e sommiamo su n le disuguaglianze (3.14)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n\|\eta_n u\|_{2,p} &\leq C\|Au\|_{p,2R}\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n + C_1\|u\|_{p,2R}\sum_{n=0}^{\infty}4^n\xi^{n-1} \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{\infty}\xi^{n+1}\|\eta_{n+1}u\|_{2,p}
\end{aligned}$$

(le serie convergono perché $\|\eta_n u\|_{2,p} \leq C4^n\|u\|_{2,p,B(2R)}$ e $\xi < \frac{1}{8}$). Osserviamo che $\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n = \frac{1}{1-\xi}$ e $C_1\sum_{n=0}^{\infty}4^n\xi^{n-1} = C_2$, dove C_2 dipende da N,p,ν,M,ω ed R. Cancellando i termini uguali a primo e secondo membro otteniamo infine

$$\|u\|_{2,p,R} \leq \|\eta_0 u\|_{2,p} \leq C(N,p,\nu,M,\omega,R)[\|Au\|_{p,2R} + \|u\|_{p,2R}].$$

□

DIM. (Teorema 3.14) Scegliamo R in modo che $2R < dist(\Omega_1, \partial\Omega_2)$. Ovviamente risulta

$$\overline{\Omega}_1 \subseteq \bigcup_{x\in\Omega_1} B(x,R).$$

Per compattezza possiamo estrarre un sottoricoprimento finito di $\overline{\Omega}_1$; risulta quindi

$$\overline{\Omega}_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i,R).$$

Dal Lemma 3.15 segue

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2,p,\Omega_1} &\leq \sum_{i=1}^{k} \|u\|_{2,p,B(x_i,R)} \\
&\leq C(N,p,\nu,M,\omega,R) \sum_{i=1}^{k} \left(\|u\|_{p,B(x_i,2R)} + \|Au\|_{p,B(x_i,2R)}\right).
\end{aligned}$$

Per l'ipotesi su R, $B(x_i,2R) \subseteq \Omega_2$, pertanto

$$\|u\|_{2,p,\Omega_1} \leq kC(N,p,\nu,M,\omega,R)\ [\|u\|_{p,\Omega_2} + \|Au\|_{p,\Omega_2}].$$

$\square$